

Séries à termes positifs

I. Séries numériques : vocabulaire et premiers exemples

Une série est une manière d'additionner une infinité de nombres. Cependant, une telle somme n'a pas de sens a priori. On la définit donc comme la limite d'une suite de sommes finies. Tout le chapitre repose sur cette idée simple.

1. Sommes partielles, somme et reste

Définition :

Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite réelle. On appelle **somme partielle** d'indice n le réel

$S_n = \sum_{k=0}^n u_k$. La **série de terme général** u_n , notée $\sum u_n$, est la suite (S_n) . On

dit que la série **converge** si (S_n) admet une limite finie S . Ce réel s'appelle la **somme** de la série et se note $S = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$. Sinon, la série **diverge**.

Déterminer la **nature** d'une série, c'est dire si elle converge ou diverge. Ainsi, modifier un nombre fini de termes ne change pas la nature. En revanche, cela change la somme. De même, la série peut commencer à un indice n_0 quelconque.

Définition :

Si $\sum u_n$ converge, on appelle **reste** d'indice n le réel $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k = S - S_n$. Par conséquent, la suite (R_n) tend vers 0 .

L'ensemble des séries convergentes est un espace vectoriel. En effet, si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent, alors $\sum (\lambda u_n + \mu v_n)$ converge et sa somme vaut $\lambda \sum u_n + \mu \sum v_n$. Cela découle de la linéarité de la limite.

2. Condition nécessaire de convergence

Proposition :

Si la série $\sum u_n$ converge, alors $u_n \rightarrow 0$. Autrement dit, si (u_n) ne tend pas vers 0 , la série diverge : on parle de **divergence grossière**.

Démonstration :

Pour $n \geq 1$, on a $u_n = S_n - S_{n-1}$. Si $S_n \rightarrow S$, alors $S_{n-1} \rightarrow S$ aussi. Donc $u_n \rightarrow S - S = 0$.

Attention :

La réciproque est fausse. Par exemple, $\frac{1}{n} \rightarrow 0$, mais la **série harmonique** $\sum \frac{1}{n}$ diverge. En effet, pour tout $n \geq 1$,

$$H_{2n} - H_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geq n \times \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}.$$

Si (H_n) convergerait vers H , on aurait $H_{2n} - H_n \rightarrow 0$, ce qui contredit cette minoration.

3. Séries géométriques et séries télescopiques

Théorème :

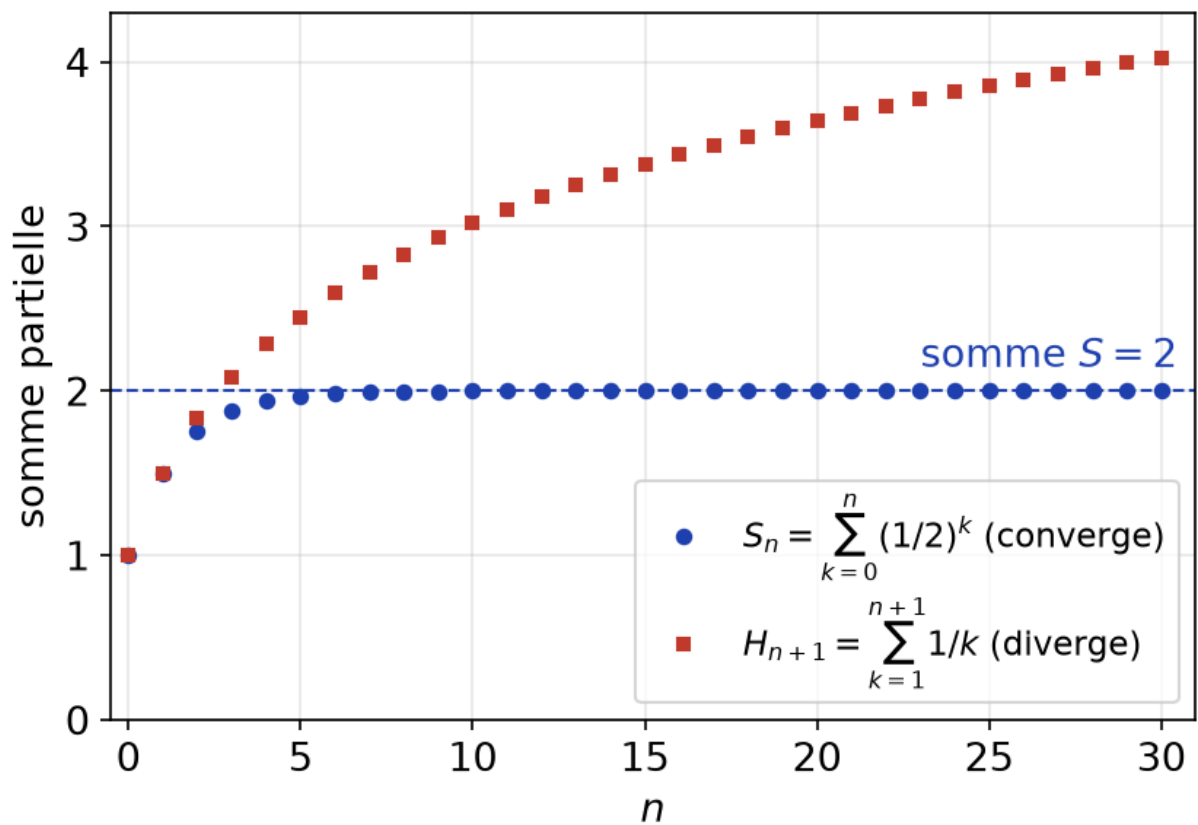
Soit $q \in \mathbb{R}$. La **série géométrique** $\sum q^n$ converge si et seulement si $|q| < 1$. Dans ce cas,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q} \text{ et } R_n = \frac{q^{n+1}}{1-q}.$$

Démonstration :

Pour $q \neq 1$, on a $S_n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$. Si $|q| < 1$, alors $q^{n+1} \rightarrow 0$, d'où la limite. Si $|q| \geq 1$, le terme q^n ne tend pas vers 0, donc la série diverge grossièrement.

La figure ci-dessous compare deux sommes partielles. D'une part, celles de $\sum (1/2)^n$ se stabilisent vers 2. D'autre part, celles de la série harmonique croissent sans borne, mais très lentement.



Propriété :

Soit (a_n) une suite réelle. La **série télescopique** $\sum (a_{n+1} - a_n)$ converge si et seulement si la suite (a_n) converge. Dans ce cas, $\sum_{n=0}^{+\infty} (a_{n+1} - a_n) = \lim a_n - a_0$.

En effet, la somme partielle vaut $\sum_{k=0}^n (a_{k+1} - a_k) = a_{n+1} - a_0$. Ce lien entre suites et séries est fondamental : toute suite est la suite des sommes partielles d'une série.

Exemple :

Pour $n \geq 1$, on a $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$. Donc $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}$, et

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1. \text{ À l'inverse, } \sum \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \text{ diverge, car sa somme partielle vaut } \ln(n+1).$$

II. Séries à termes positifs et théorèmes de comparaison

Dans toute cette partie, les séries sont à termes positifs, au moins à partir d'un certain rang. Cette hypothèse change tout. En effet, elle rend la suite des sommes partielles monotone.

1. Le théorème fondamental

Théorème :

Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs. Alors la suite (S_n) est croissante. Par conséquent, la série converge si et seulement si (S_n) est majorée. Dans ce cas, $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sup_n S_n$. Sinon, $S_n \rightarrow +\infty$.

Démonstration :

On a $S_{n+1} - S_n = u_{n+1} \geq 0$, donc (S_n) est croissante. D'après le théorème de la limite monotone, une suite croissante converge si et seulement si elle est majorée, et sa limite est alors sa borne supérieure. Enfin, une suite croissante non majorée tend vers $+\infty$.

Ce théorème est le moteur de tout le chapitre. En effet, chaque critère qui suit consiste à majorer ou à minorer des sommes partielles. Pour une série à termes positifs, on écrit donc $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = +\infty$ en cas de divergence.

2. Comparaison par inégalités

Théorème :

Soient (u_n) et (v_n) deux suites telles que $0 \leq u_n \leq v_n$ à partir d'un rang n_0 .

- Si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge.
- Si $\sum u_n$ diverge, alors $\sum v_n$ diverge.

Démonstration :

Pour $n \geq n_0$, on a $\sum_{k=n_0}^n u_k \leq \sum_{k=n_0}^n v_k \leq \sum_{k=n_0}^{+\infty} v_k$. Ainsi, les sommes partielles de $\sum u_n$ sont majorées. Le théorème fondamental donne la convergence. Le second point est la contraposée du premier.

3. Comparaison par o, O et équivalents

Théorème :

Soient (u_n) et (v_n) deux suites positives.

- Si $u_n = O(v_n)$ (en particulier si $u_n = o(v_n)$) et si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge.
- Si $u_n \sim v_n$, alors les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de **même nature**.

Démonstration :

Si $u_n = O(v_n)$, il existe $M > 0$ et un rang n_0 tels que $u_n \leq M v_n$ pour $n \geq n_0$.
Or $\sum M v_n$ converge, donc la comparaison conclut. Si $u_n \sim v_n$, alors $\frac{1}{2} v_n \leq u_n \leq 2 v_n$ à partir d'un certain rang. On applique alors la comparaison dans les deux sens.

Attention :

Le critère des équivalents exige un signe constant. Par exemple, $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ et $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}$ sont équivalents. Pourtant, la première série converge et la seconde diverge (ce résultat relève du chapitre suivant sur les séries alternées).

Méthode :

Pour déterminer la nature d'une série à termes positifs :

1. vérifiez d'abord que $u_n \rightarrow 0$, sinon la série diverge grossièrement ;
2. cherchez un équivalent simple de u_n grâce aux équivalents usuels et aux développements limités ;
3. comparez cet équivalent à une série de référence : géométrique ou de Riemann ;
4. concluez en citant le théorème de comparaison utilisé et en vérifiant la positivité.

Exemple :

Considérons $u_n = 1 - \cos\left(\frac{1}{n}\right)$, qui est positif. D'abord, $1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$ quand $x \rightarrow 0$.
Donc $u_n \sim \frac{1}{2n^2}$. Ensuite, la série $\sum \frac{1}{n^2}$ converge (voir la partie III). Par conséquent,
 $\sum u_n$ converge.

Exemple :

Considérons $u_n = e^{-\sqrt{n}}$. Ici, aucun équivalent simple n'est utile. En revanche, par croissances comparées, $n^2 e^{-\sqrt{n}} = t^4 e^{-t}$ avec $t = \sqrt{n} \rightarrow +\infty$, donc ce produit tend vers 0.
Autrement dit, $u_n = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Comme $\sum \frac{1}{n^2}$ converge, la série $\sum e^{-\sqrt{n}}$ converge aussi.
Retenez ce réflexe : multipliez u_n par n^α et regardez la limite.

Proposition :

Soit (u_n) une suite positive et soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

- S'il existe $\alpha > 1$ tel que $n^\alpha u_n \rightarrow 0$, alors $\sum u_n$ converge.
- Si $n u_n$ tend vers une limite $\ell \in]0, +\infty]$, alors $\sum u_n$ diverge.

En effet, dans le premier cas, $u_n = o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$. Dans le second, on a $u_n \geq \frac{c}{n}$ à partir d'un certain rang, pour une constante $c > 0$. Ce critère, parfois appelé règle « $n^\alpha u_n$ », est souvent le plus rapide en pratique.

III. Comparaison série-intégrale et séries de Riemann

Lorsque le terme général s'écrit $f(n)$ avec f monotone, on peut comparer la somme à une intégrale.

Cette idée donne à la fois la nature de la série et des encadrements précis.

1. Encadrement par des intégrales

Lemme :

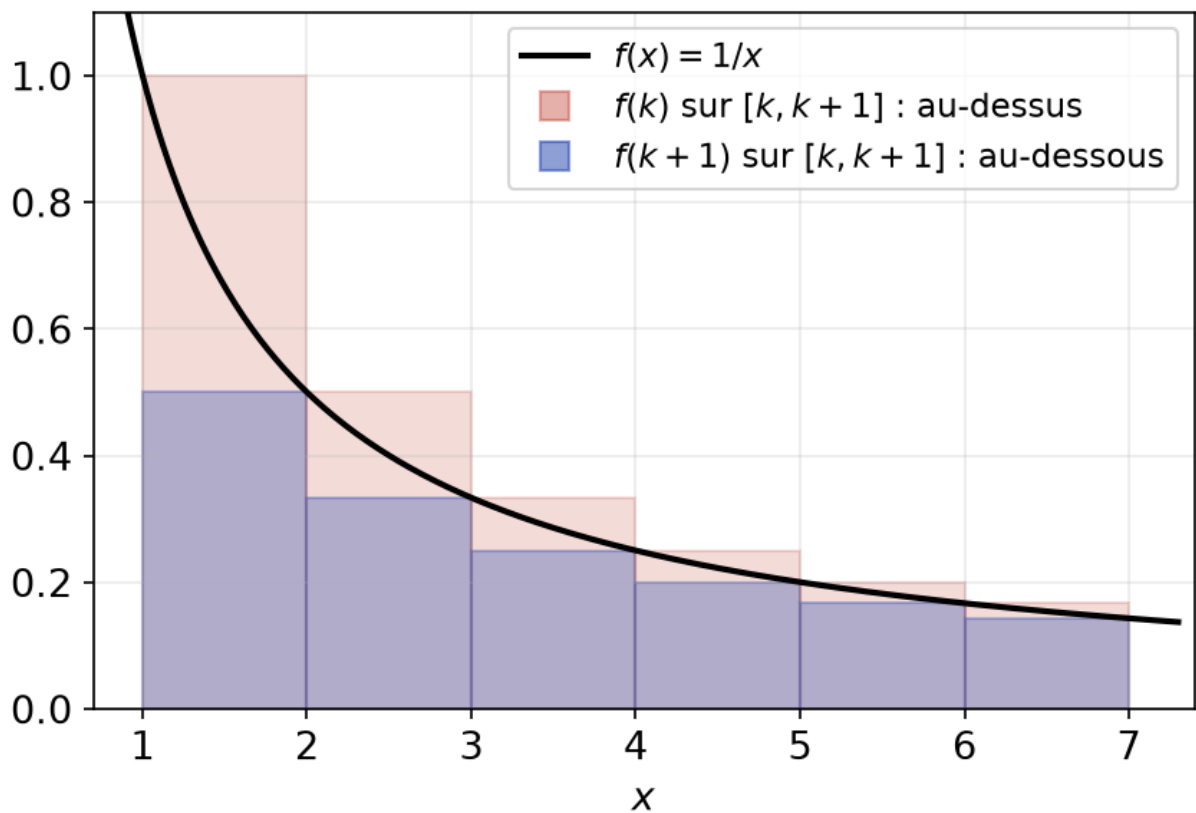
Soit f une fonction continue, positive et décroissante sur $[n_0, +\infty[$. Pour tout entier $k \geq n_0 + 1$,

$$\int_k^{k+1} f(t) \, dt \leq f(k) \leq \int_{k-1}^k f(t) \, dt.$$

Démonstration :

Pour $t \in [k, k+1]$, la décroissance donne $f(t) \leq f(k)$. On intègre sur un intervalle de longueur 1 : $\int_k^{k+1} f \leq f(k)$. De même, pour $t \in [k-1, k]$, on a $f(k) \leq f(t)$, d'où la seconde inégalité.

La figure ci-dessous illustre ce lemme pour $f(x) = \frac{1}{x}$. Les rectangles rouges ont pour aire $f(k)$ et recouvrent la courbe. Les rectangles bleus ont pour aire $f(k+1)$ et restent sous la courbe.



Théorème :

Soit f continue, positive et décroissante sur $[n_0, +\infty[$. Alors la série $\sum f(n)$ converge si et seulement si la suite $\left(\int_{n_0}^n f(t) dt \right)_n$ est majorée, c'est-à-dire si et seulement si l'intégrale $\int_{n_0}^{+\infty} f(t) dt$ converge.

Démonstration :

Posons $F(n) = \int_{n_0}^n f$, suite croissante puisque $f \geq 0$. En sommant le lemme de $k = n_0 + 1$ à n , on obtient

$$\int_{n_0+1}^{n+1} f(t) dt \leq \sum_{k=n_0+1}^n f(k) \leq F(n).$$

Si $(F(n))$ est majorée, les sommes partielles le sont aussi : la série converge. Réciproquement, si la série converge, la minoration montre que $F(n+1) - F(n_0 + 1)$ est majorée, donc $(F(n))$ aussi.

2. Les séries de Riemann

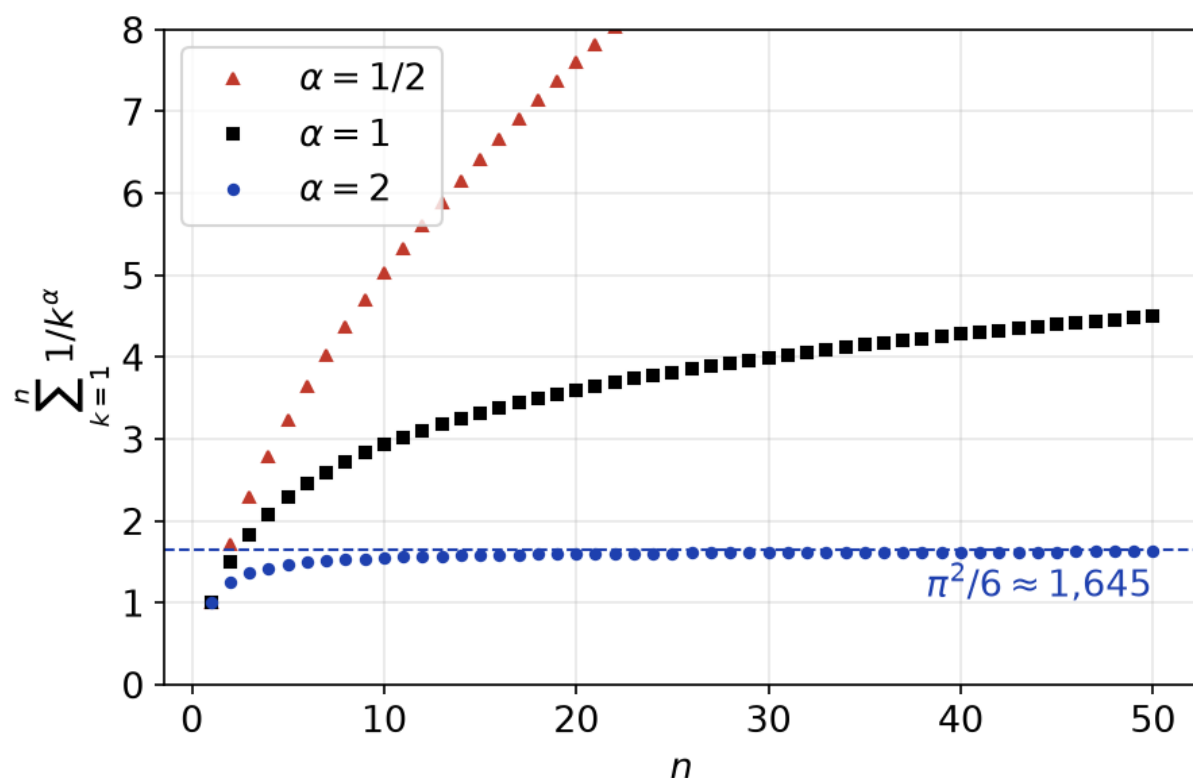
Théorème :

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. La **série de Riemann** $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Démonstration :

Si $\alpha \leq 0$, le terme général ne tend pas vers 0 : la divergence est grossière. Si $\alpha > 0$, la fonction $t \rightarrow t^{-\alpha}$ est continue, positive et décroissante sur $[1, +\infty[$. Pour $\alpha \neq 1$, on a $\int_1^n t^{-\alpha} dt = \frac{n^{1-\alpha} - 1}{1-\alpha}$. Cette quantité est bornée si $\alpha > 1$ et tend vers $+\infty$ si $\alpha < 1$. Enfin, pour $\alpha = 1$, on a $\int_1^n \frac{dt}{t} = \ln n \rightarrow +\infty$. Le théorème précédent conclut.

Comme le montre la figure ci-dessous, les sommes partielles pour $\alpha = 2$ se stabilisent vers $\frac{\pi^2}{6}$. En revanche, celles pour $\alpha = 1$ et $\alpha = \frac{1}{2}$ croissent sans borne.



Remarque :

La valeur $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ sera établie avec les séries de Fourier. Pour l'instant, seule la convergence compte. De même, les **séries de Bertrand** $\sum \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$ s'étudient avec les mêmes outils (voir les exercices).

3. Encadrer une somme partielle ou un reste

Méthode :

Pour encadrer $S_n = \sum_{k=1}^n f(k)$ avec f décroissante :

1. écrivez le lemme d'encadrement pour un indice k quelconque ;
2. summez-le en choisissant bien les bornes, et utilisez la relation de Chasles ;
3. calculez les intégrales obtenues ;
4. si les deux bornes sont équivalentes, déduisez-en un équivalent de S_n .

Pour un reste $R_n = \sum_{k \geq n+1} f(k)$ d'une série convergente, on somme de $n+1$ à N , puis on fait tendre N vers $+\infty$.

Exemple :

Avec $f(t) = \frac{1}{t}$, on somme de $k = 1$ à n l'inégalité $\int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \leq \frac{1}{k}$. On obtient $\ln(n+1) \leq H_n$. De même, en sommant $\frac{1}{k} \leq \int_{k-1}^k \frac{dt}{t}$ de $k = 2$ à n , on obtient $H_n \leq 1 + \ln n$. Ainsi,

$$\ln(n+1) \leq H_n \leq 1 + \ln n, \text{ donc } H_n \sim \ln n.$$

De plus, la suite $u_n = H_n - \ln n$ est décroissante et minorée par 0 . En effet,

$$u_n - u_{n+1} = \int_n^{n+1} \frac{dt}{t} - \frac{1}{n+1} \geq 0. \text{ Elle converge donc vers un réel noté } \gamma \approx 0,577, \text{ la}$$

constante d'Euler.

IV. Règles de d'Alembert et de Cauchy

Ces deux règles comparent la série à une série géométrique. Elles sont efficaces quand le terme général

contient des puissances n -ièmes ou des factorielles.

1. La règle de d'Alembert

Théorème :

Soit (u_n) une suite de réels strictement positifs telle que $\frac{u_{n+1}}{u_n} \rightarrow \ell \in [0, +\infty]$.

- Si $\ell < 1$, la série $\sum u_n$ converge.
- Si $\ell > 1$, la série $\sum u_n$ diverge grossièrement.
- Si $\ell = 1$, on ne peut pas conclure.

Démonstration :

Supposons $\ell < 1$ et posons $q = \frac{1+\ell}{2}$, de sorte que $\ell < q < 1$. Il existe un rang n_0 tel que $u_{n+1} \leq q u_n$ pour $n \geq n_0$. Par récurrence, $u_n \leq u_{n_0} q^{n-n_0}$ pour $n \geq n_0$. Or la série géométrique $\sum q^n$ converge, donc $\sum u_n$ converge par comparaison.

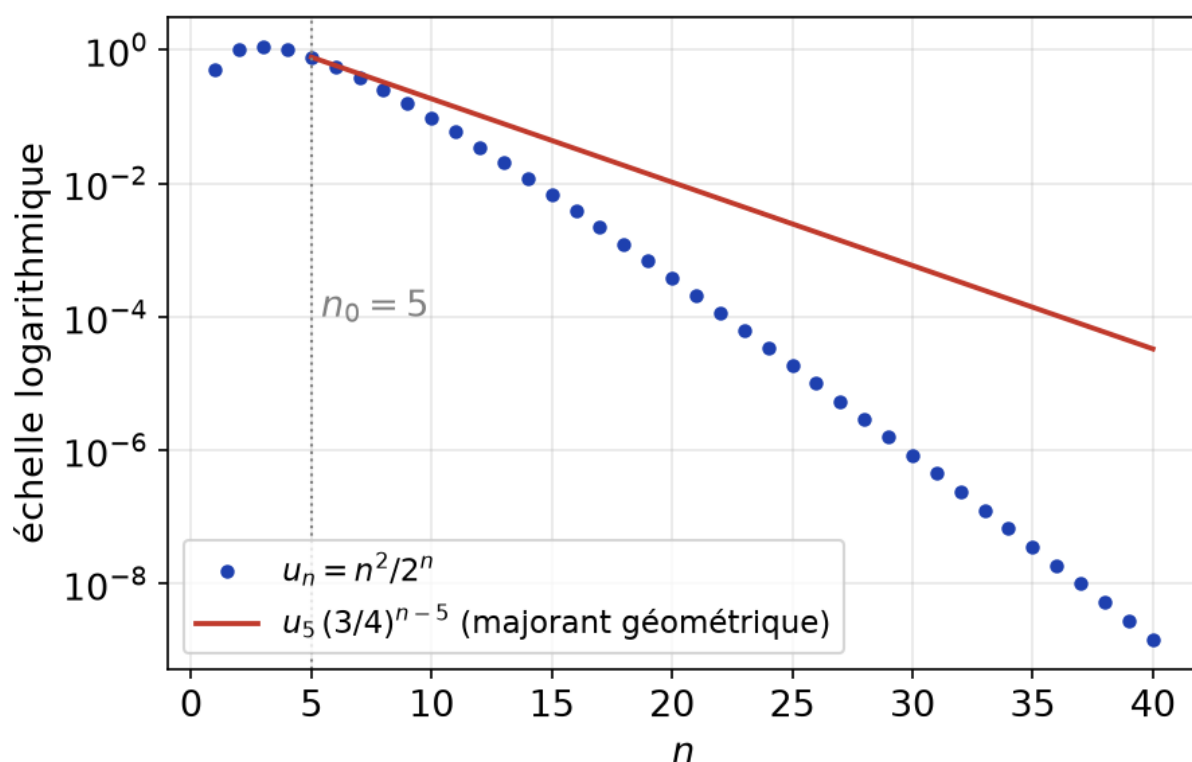
Supposons $\ell > 1$. À partir d'un rang n_0 , on a $u_{n+1} \geq u_n$. Ainsi, la suite (u_n) est croissante à partir de n_0 et reste supérieure à $u_{n_0} > 0$. Elle ne tend donc pas vers 0.

Enfin, pour $\ell = 1$, les séries $\sum \frac{1}{n}$ et $\sum \frac{1}{n^2}$ donnent toutes deux un rapport tendant vers 1. Pourtant, la première diverge et la seconde converge.

Exemple :

Pour $u_n = \frac{n^2}{2^n}$, on a $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 \rightarrow \frac{1}{2}$. La série converge. Plus précisément, pour $n \geq 5$, ce rapport vaut au plus $\frac{18}{25} < \frac{3}{4}$. Donc $u_n \leq u_5 \left(\frac{3}{4}\right)^{n-5}$.

La figure ci-dessous, en échelle logarithmique, visualise cette majoration. Après le rang $n_0 = 5$, les termes restent sous la droite du majorant géométrique.



Propriété :

Soit (u_n) une suite strictement positive. On suppose qu'il existe $q \in]0, 1[$ et un rang n_0 tels que $u_{k+1} \leq q u_k$ pour tout $k \geq n_0$. Alors, pour tout $n \geq n_0$,

$$0 \leq R_n \leq \frac{u_{n+1}}{1 - q}.$$

Démonstration :

Pour $k \geq n+1$, une récurrence immédiate donne $u_k \leq u_{n+1} q^{k-n-1}$. En sommant de $k = n+1$ à N , on obtient $\sum_{k=n+1}^N u_k \leq u_{n+1} \sum_{j=0}^{N-n-1} q^j \leq \frac{u_{n+1}}{1-q}$. Il reste à faire tendre N vers $+\infty$.

Cette majoration rend la règle de d'Alembert quantitative. Par exemple, elle permet d'estimer le nombre de termes de $\sum \frac{1}{k!}$ nécessaires pour approcher e à 10^{-6} près. Ainsi, la convergence est très rapide lorsque le rapport tend vers 0 .

2. La règle de Cauchy

Théorème :

Soit (u_n) une suite positive telle que $\sqrt[n]{u_n} \rightarrow \ell \in [0, +\infty]$. Si $\ell < 1$, la série $\sum u_n$ converge. Si $\ell > 1$, elle diverge grossièrement. Si $\ell = 1$, on ne peut pas conclure.

Démonstration :

Si $\ell < 1$, on choisit $q \in]\ell, 1[$. À partir d'un certain rang, $\sqrt[n]{u_n} \leq q$, c'est-à-dire $u_n \leq q^n$. La série converge donc par comparaison à une série géométrique. Si $\ell > 1$, on a $u_n \geq 1$ à partir d'un certain rang, d'où la divergence grossière.

Exemple :

Pour $u_n = \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$, on a $\sqrt[n]{u_n} = \frac{n}{2n+1} \rightarrow \frac{1}{2} < 1$. La série converge.

Remarque :

Ces deux règles ne sont jamais indispensables : elles ne font que comparer à une série géométrique. Par conséquent, elles échouent dès que le terme général décroît comme une puissance de n . Dans ce cas, préférez un équivalent et les séries de Riemann.

V. Sommation des relations de comparaison

Les théorèmes de comparaison donnent la nature d'une série. Toutefois, on souhaite souvent aller plus loin : obtenir un équivalent d'une somme partielle divergente ou d'un reste convergent. C'est l'objet des théorèmes de sommation.

1. Cas des séries convergentes : les restes

Théorème :

Soit (v_n) une suite positive telle que $\sum v_n$ converge. On note $R_n(v) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k$.

- Si (u_n) est positive et $u_n = o(v_n)$, alors $\sum u_n$ converge et $R_n(u) = o(R_n(v))$. Le même énoncé vaut avec O .
- Si $u_n \sim v_n$, alors $\sum u_n$ converge et $R_n(u) \sim R_n(v)$.

Démonstration :

Traitons le cas des équivalents. D'abord, u_n est positif à partir d'un certain rang, donc $\sum u_n$ converge par le critère des équivalents. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe N tel que $|u_k - v_k| \leq \varepsilon v_k$

pour $k \geq N$. Pour $n \geq N$ et $m > n$, l'inégalité triangulaire donne

$$\left| \sum_{k=n+1}^m u_k - \sum_{k=n+1}^m v_k \right| \leq \varepsilon \sum_{k=n+1}^m v_k.$$

On fait tendre m vers $+\infty$: $|R_n(u) - R_n(v)| \leq \varepsilon R_n(v)$. Autrement dit,
 $R_n(u) - R_n(v) = o(R_n(v))$. Le cas 0 se traite de la même façon avec $0 \leq u_k \leq \varepsilon v_k$.

2. Cas des séries divergentes : les sommes partielles

Théorème :

Soit (v_n) une suite positive telle que $\sum v_n$ diverge. On note $S_n(v) = \sum_{k=0}^n v_k$, qui tend vers $+\infty$.

- Si (u_n) est réelle et $u_n = o(v_n)$, alors $S_n(u) = o(S_n(v))$. Le même énoncé vaut avec 0 .
- Si $u_n \sim v_n$, alors $\sum u_n$ diverge et $S_n(u) \sim S_n(v)$.

Démonstration :

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe N tel que $|u_k| \leq \varepsilon v_k$ pour $k \geq N$. Pour $n \geq N$, on a donc

$$|S_n(u)| \leq |S_{N-1}(u)| + \varepsilon \sum_{k=N}^n v_k \leq |S_{N-1}(u)| + \varepsilon S_n(v).$$

Or $S_n(v) \rightarrow +\infty$ et $|S_{N-1}(u)|$ est une constante. Ainsi, il existe N' tel que $|S_{N-1}(u)| \leq \varepsilon S_n(v)$ pour $n \geq N'$. Pour $n \geq \max(N, N')$, on obtient

$|S_n(u)| \leq 2\varepsilon S_n(v)$. Enfin, si $u_n \sim v_n$, on applique ce résultat à $u_n - v_n = o(v_n)$.

Méthode :

Pour obtenir un équivalent d'une somme partielle divergente ou d'un reste :

1. trouvez un équivalent simple v_n positif du terme général ;
2. calculez ou encadrez la somme partielle (ou le reste) de $\sum v_n$, souvent par comparaison série-intégrale ou par télescopage ;
3. appliquez le théorème de sommation adapté, en vérifiant d'abord la nature de $\sum v_n$.

Exemple :

Cherchons un équivalent du reste $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$. D'abord, $\frac{1}{k^2} \sim \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$ pour $k \geq 2$. Ensuite, par télescopage, $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) = \frac{1}{n}$. Par conséquent, le théorème de sommation des équivalents donne $R_n \sim \frac{1}{n}$.

Exemple :

Pour la somme partielle $T_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k-1}$, on a $\frac{1}{2k-1} \sim \frac{1}{2k}$, terme positif d'une série divergente. Donc $T_n \sim \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k} = \frac{H_n}{2} \sim \frac{\ln n}{2}$.

Ce qu'il faut retenir

- Une série converge si la suite de ses sommes partielles converge ; le reste $R_n = S - S_n$ tend alors vers 0 .
- Si u_n ne tend pas vers 0 , la série diverge grossièrement ; la réciproque est fausse, comme le montre la série harmonique.
- La série géométrique $\sum q^n$ converge si et seulement si $|q| < 1$; une série télescopique a la nature de la suite associée.
- Pour une série à termes positifs, la convergence équivaut à la majoration des sommes partielles : tous les critères en découlent.
- Comparaison, domination et équivalents ne s'utilisent qu'avec des termes de signe constant.
- La série de Riemann $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.
- Avec f positive et décroissante, $\int_k^{k+1} f \leq f(k) \leq \int_{k-1}^k f$ permet d'encadrer sommes partielles et restes.
- Les règles de d'Alembert et de Cauchy concluent si la limite ℓ diffère de 1 ; pour $\ell = 1$, elles ne disent rien.
- On somme les équivalents : les restes pour des séries convergentes, les sommes partielles pour des séries divergentes.

Questions fréquentes sur séries à termes positifs

Pourquoi la positivité des termes est-elle si importante ?

Si les termes sont positifs, la suite des sommes partielles est croissante. Elle converge donc si et seulement si elle est majorée, ce qui ramène tout à des majorations. Sans signe constant, les critères de comparaison et d'équivalence deviennent faux : $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ et $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}$ sont équivalents mais de

natures différentes.

Que faire quand la règle de d'Alembert donne une limite égale à 1 ?

La règle ne permet alors aucune conclusion : $\sum \frac{1}{n}$ diverge et $\sum \frac{1}{n^2}$ converge, avec un rapport qui tend vers 1 dans les deux cas. Cherchez plutôt un équivalent du terme général et comparez-le à une série de Riemann. Si le terme contient une factorielle, un développement de $\ln \frac{u_{n+1}}{u_n}$ permet souvent de conclure.

Comment savoir s'il faut sommer des restes ou des sommes partielles ?

Tout dépend de la nature de la série de comparaison. Si elle converge, les sommes partielles tendent vers la somme et l'information utile est dans les restes : on somme les équivalents à partir de $n+1$ jusqu'à l'infini. Si elle diverge, les restes n'existent pas et l'on somme les équivalents de 0 à n .

La série harmonique diverge-t-elle vraiment, alors que son terme tend vers 0 ?

Oui. On a $H_{2n} - H_n \geq \frac{1}{2}$ pour tout n , ce qui interdit la convergence. Plus précisément, $H_n \sim \ln n$: la divergence est très lente, puisqu'il faut plus de 12 000 termes pour dépasser 10.

Pour aller plus loin en L2

- Les énoncés : [exercices de maths en L2 sur séries à termes positifs](#)
- Chapitre suivant : [Séries à termes quelconques](#)
- Tester vos connaissances : [QCM de maths en L2 par chapitre](#)
- Le sommaire : [tous les chapitres de maths de L2](#) et la [licence de maths de L1 à L3](#)