

Séries à termes positifs

Corrigé de l'exercice 1 : Série géométrique : sommes partielles et reste

1. La raison $q = \frac{2}{3}$ est différente de 1. D'après la formule de la somme géométrique,

$$S_N = \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{N+1}}{1 - \frac{2}{3}} = 3\left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{N+1}\right).$$

Comme $\left|\frac{2}{3}\right| < 1$, on a $\left(\frac{2}{3}\right)^{N+1} \rightarrow 0$. **La série converge et sa somme vaut $S = 3$.**

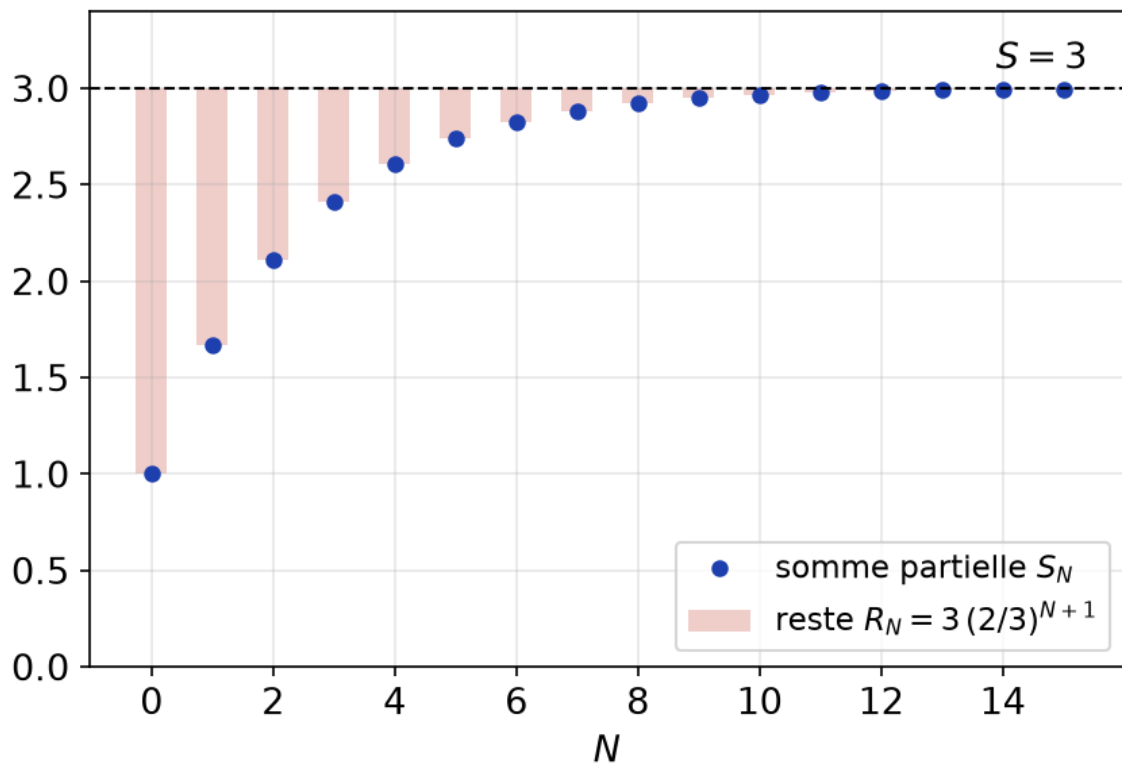
2. Par définition, $R_N = S - S_N = 3\left(\frac{2}{3}\right)^{N+1}$. Ensuite, la fonction $\ln$ est croissante, donc

$$R_N \leq 10^{-3} \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^{N+1} \leq \frac{1}{3000} \Leftrightarrow (N+1)\ln\frac{2}{3} \geq \ln 3000.$$

Or $\frac{\ln 3000}{\ln \frac{2}{3}} \approx \frac{8,006}{-0,405} \approx -19,75$. Il faut donc $N+1 \geq 20$. Par exemple,

$R_{19} \approx 9,0 \times 10^{-4}$ et $R_{18} \approx 1,35 \times 10^{-3}$. **Le plus petit entier convenable est**

$N = 19$. La figure ci-dessous montre les sommes partielles qui montent vers 3 et les restes, en rouge, qui s'écrasent vers 0.



3. On a $\frac{2^n + 3^n}{6^n} = \left(\frac{1}{3}\right)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^n$. Les deux séries géométriques convergent, car leurs raisons sont dans $] -1, 1[$. De plus, $\sum_{n=1}^{+\infty} q^n = \frac{q}{1-q}$. Par linéarité, la somme vaut $\frac{1/3}{2/3} + \frac{1/2}{1/2} = \frac{1}{2} + 1$.
La série converge et sa somme vaut $\frac{3}{2}$.

4. On factorise le premier terme : $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{5}{4^n} = \frac{5}{16} \sum_{m=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^m = \frac{5}{16} \times \frac{4}{3}$. **La somme vaut $\frac{5}{12}$.**

Point de méthode : pour une série géométrique qui commence à l'indice n_0 , factorisez par le premier terme : $\sum_{n \geq n_0} q^n = \frac{q^{n_0}}{1-q}$.

Corrigé de l'exercice 2 : Divergence grossière

1. Par continuité de $\cos$ en 0 , $\cos\left(\frac{1}{n}\right) \rightarrow 1 \neq 0$. **La série diverge grossièrement.**
2. On a $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \exp\left(n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right)$. Or $\ln(1+x) \sim x$ en 0 , donc $n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \rightarrow 1$. Par continuité de l'exponentielle, le terme tend vers $e \neq 0$. **La série diverge grossièrement.**
3. Comme $\sin x \sim x$ en 0 , on a $n \sin\left(\frac{1}{n}\right) \sim n \times \frac{1}{n} = 1$. Le terme tend donc vers 1 . **La série diverge grossièrement.**
4. On écrit $\frac{n-1}{n+1} = 1 - \frac{2}{n+1}$. Ainsi, $u_n = \exp\left(n \ln\left(1 - \frac{2}{n+1}\right)\right)$. Or $n \ln\left(1 - \frac{2}{n+1}\right) \sim n \times \left(-\frac{2}{n+1}\right) \rightarrow -2$. Donc $u_n \rightarrow e^{-2} \neq 0$. **La série diverge grossièrement.**
5. Ici, $u_n \rightarrow 0$, donc la condition nécessaire ne permet pas de conclure. En revanche, pour $1 \leq k \leq n$, on a $\frac{1}{\sqrt{k}} \geq \frac{1}{\sqrt{n}}$. En sommant ces n inégalités, $S_n \geq \frac{n}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}$. Donc $S_n \rightarrow +\infty$. **La série $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge, bien que son terme général tende vers 0 .**

Point de méthode : commencez toujours par regarder la limite du terme général. Si elle n'est pas nulle, la question est réglée en une ligne.

Corrigé de l'exercice 3 : Séries télescopiques

1. On a $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$. Par télescopage, $\sum_{n=1}^N \frac{1}{n(n+1)} = 1 - \frac{1}{N+1}$. **La série converge et sa somme vaut 1 .**

2. D'abord, on réduit au même dénominateur :

$$\frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{(n+2) - n}{n(n+1)(n+2)} = \frac{2}{n(n+1)(n+2)}.$$

Posons $a_n = \frac{1}{n(n+1)}$. Alors $\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2}(a_n - a_{n+1})$. Par télescopage,

$$\sum_{n=1}^N \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2}(a_1 - a_{N+1}) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{(N+1)(N+2)}\right).$$

La série converge et sa somme vaut $\frac{1}{4}$.

3. On a $\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \ln(n+1) - \ln n$. Donc

$\sum_{n=1}^N \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \ln(N+1) - \ln 1 = \ln(N+1)$. Cette quantité tend vers $+\infty$. **La série diverge.**

4. Pour $n \geq 2$, on a $1 - \frac{1}{n^2} = \frac{(n-1)(n+1)}{n^2}$. Posons $b_n = \ln \frac{n-1}{n}$. Alors

$$\ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \ln \frac{n-1}{n} - \ln \frac{n}{n+1} = b_n - b_{n+1}. \text{ Par télescopage,}$$

$$\sum_{n=2}^N \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = b_2 - b_{N+1} = \ln \frac{1}{2} - \ln \frac{N}{N+1} = \ln \frac{N+1}{2N}.$$

Cette somme tend vers $\ln \frac{1}{2}$. **La série converge et sa somme vaut $-\ln 2$.**

5. On a $\frac{1}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+3}\right)$. En effet, la différence entre parenthèses vaut

$$\frac{2}{(2n+1)(2n+3)}. \text{ Par télescopage, } \sum_{n=0}^N \frac{1}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2N+3}\right).$$

La série converge et sa somme vaut $\frac{1}{2}$.

Point de méthode : une décomposition en éléments simples fait souvent apparaître une différence $a_n - a_{n+1}$. La nature de la série est alors celle de la suite (a_n) .

Corrigé de l'exercice 4 : Comparaison par inégalités

1. Pour $n \geq 1$, on a $0 \leq \frac{1}{n^2 + \sqrt{n}} \leq \frac{1}{n^2}$. Or la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^2}$ converge, car $2 > 1$. **Par comparaison, la série converge.**

2. Pour $n \geq 2$, l'inégalité $\ln x \leq x - 1$ donne $0 < \ln n \leq n - 1 < n$. Par conséquent, $\frac{1}{\ln n} \geq \frac{1}{n}$. Or la série harmonique diverge. **Par comparaison, la série $\sum \frac{1}{\ln n}$ diverge.**

3. Comme $\cos n \geq -1$, on a $\frac{2 + \cos n}{n} \geq \frac{1}{n} \geq 0$. **Par comparaison à la série harmonique, la série diverge.**
4. Montrons $n! \geq 2^{n-1}$ par récurrence. Pour $n = 1$, on a $1 \geq 1$. Si $n! \geq 2^{n-1}$, alors $(n+1)! = (n+1)n! \geq 2 \times 2^{n-1} = 2^n$, car $n+1 \geq 2$. Ainsi, pour $n \geq 1$, $0 < \frac{1}{n!} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$. La série géométrique de raison $\frac{1}{2}$ converge. **Par comparaison, $\sum \frac{1}{n!}$ converge.**
5. Pour tout $n \geq 1$, on a $0 \leq \frac{\sin^2 n}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}$. **Par comparaison à une série de Riemann convergente, la série converge.**

Corrigé de l'exercice 5 : Équivalents usuels et nature d'une série

1. Pour $n \geq 1$, on a $\frac{1}{n^2} \in]0, 1]$, donc $\sin\left(\frac{1}{n^2}\right) > 0$. De plus, $\sin x \sim x$ en 0 , donc $u_n \sim \frac{1}{n^2}$. **Par le critère des équivalents, la série converge.**
2. Le terme est positif, car $1 + \frac{1}{\sqrt{n}} > 1$. Ensuite, $\ln(1+x) \sim x$ donne $u_n \sim \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{1}{n^{1/2}}$. Or $\frac{1}{2} \leq 1$. **La série diverge.**
3. Le terme est positif, car $e^{1/n} > 1$. De plus, $e^x - 1 \sim x$, donc $u_n \sim \frac{1}{n}$. **La série diverge, comme la série harmonique.**
4. Le terme est positif et $u_n \sim \frac{n}{n^3} = \frac{1}{n^2}$. **La série converge.**
5. Posons $x = \frac{1}{n} \in]0, 1]$. Alors $\tan x - \sin x = \tan x (1 - \cos x)$. Sur $]0, 1]$, on a $\tan x > 0$ et $1 - \cos x > 0$, donc le terme est positif. Ensuite, $\tan x \sim x$ et $1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$. Par produit, $u_n \sim \frac{x^3}{2} = \frac{1}{2n^3}$. **La série converge.**
6. Le discriminant de $n^2 - n + 1$ est négatif, donc ce trinôme est strictement positif et le terme aussi. De plus, $u_n \sim \frac{\sqrt{n}}{n^2} = \frac{1}{n^{3/2}}$. Or $\frac{3}{2} > 1$. **La série converge.**

Point de méthode : un équivalent d'un produit s'obtient en multipliant les équivalents. En revanche, pour

une différence comme $\tan x - \sin x$, factorisez ou utilisez un développement limité.

Corrigé de l'exercice 6 : Comparaison aux séries de Riemann

1. Le terme est positif et $\frac{n^a}{n^2+1} \sim n^{a-2} = \frac{1}{n^{2-a}}$. D'après le critère des équivalents, la série a la nature de la série de Riemann d'exposant $2-a$. Celle-ci converge si et seulement si $2-a > 1$. **La série converge si et seulement si $a < 1$.**
2. On a $\sqrt{n(n+1)} \sim \sqrt{n^2} = n$. Donc $\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} \sim \frac{1}{n}$, terme positif. **La série diverge.**
3. On a $n^4 + 1 \sim n^4$, donc $\sqrt[3]{n^4 + 1} \sim n^{4/3}$. Ainsi, le terme est équivalent à $\frac{1}{n^{4/3}}$, avec $\frac{4}{3} > 1$. **La série converge.**
4. Première méthode : par la quantité conjuguée, $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \sim \frac{1}{2\sqrt{n}}$. Ce terme est positif et la série $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge. Seconde méthode : par télescopage,
$$\sum_{n=0}^N (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \sqrt{N+1} \rightarrow +\infty$$
. **La série diverge.**
5. D'après la question précédente, $\frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{n} \sim \frac{1}{2n^{3/2}}$, terme positif. **La série converge.**

Corrigé de l'exercice 7 : Règle de d'Alembert

1. Tous les termes sont strictement positifs. On calcule chaque rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$.
 - Pour $\frac{n^2}{2^n}$: le rapport vaut $\frac{1}{2} \left(\frac{n+1}{n} \right)^2 \rightarrow \frac{1}{2} < 1$. La série converge.
 - Pour $\frac{3^n}{n!}$: le rapport vaut $\frac{3}{n+1} \rightarrow 0$. La série converge.
 - Pour $\frac{n!}{n^n}$: le rapport vaut $\frac{(n+1)n^n}{(n+1)^{n+1}} = \left(\frac{n}{n+1} \right)^n = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} \rightarrow \frac{1}{e} < 1$. La série converge.

- Pour $\frac{n^{10}}{(1,1)^n}$: le rapport vaut $\frac{1}{1,1}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{10} \rightarrow \frac{1}{1,1} < 1$. La série converge.
- Pour $\frac{(n!)^2}{(2n)!}$: le rapport vaut $\frac{(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)} = \frac{n+1}{2(2n+1)} \rightarrow \frac{1}{4}$. La série converge.

Les cinq séries convergent.

2. On a $\binom{2n+2}{n+1} = \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2} \binom{2n}{n}$. Donc

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(2n+2)(2n+1)}{4(n+1)^2} = \frac{2n+1}{2n+2}.$$

Ce rapport tend vers 1 : la règle de d'Alembert ne permet pas de conclure.

3. On calcule $\frac{(n+1)a_{n+1}}{na_n} = \frac{n+1}{n} \times \frac{2n+1}{2(n+1)} = \frac{2n+1}{2n} > 1$. La suite (na_n) est donc croissante. Ainsi, $na_n \geq 1 \times a_1 = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$, soit $a_n \geq \frac{1}{2n}$. Or $\sum \frac{1}{2n}$ diverge. **Par comparaison, $\sum a_n$ diverge.**

Point de méthode : quand le rapport tend vers 1, comparez $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ au rapport $\frac{v_{n+1}}{v_n}$ d'une série de Riemann bien choisie.

Corrigé de l'exercice 8 : Règle de Cauchy

1. Le terme est positif et $\sqrt[n]{u_n} = \frac{n+1}{3n+2} \rightarrow \frac{1}{3} < 1$. **D'après la règle de Cauchy, la série converge.**
2. Le terme est positif et $\sqrt[n]{u_n} = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \exp\left(n \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)\right)$. Or $n \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) \sim n \times \left(-\frac{1}{n}\right) = -1$. Donc $\sqrt[n]{u_n} \rightarrow e^{-1} < 1$. **La série converge.**
3. On a $\sqrt[n]{u_n} = \frac{a}{n+1} \rightarrow a$.
 - Si $a < 1$, la série converge d'après la règle de Cauchy.

◦ Si $a > 1$, elle diverge grossièrement.

◦ Si $a = 1$, la règle ne conclut pas. Cependant, $u_n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \rightarrow \frac{1}{e}$, d'après l'exercice précédent. Le terme ne tend pas vers 0 : la série diverge grossièrement.

La série converge si et seulement si $a < 1$.

4. Pour $n \geq 3$, on a $\ln n > 1$, donc le terme est positif. Ensuite, $\sqrt[n]{u_n} = \frac{1}{\ln n} \rightarrow 0$. **La série converge.**

Corrigé de l'exercice 9 : Conséquences de la majoration des sommes partielles

1. La série $\sum u_n$ converge, donc $u_n \rightarrow 0$. Il existe ainsi un rang N tel que $0 \leq u_n \leq 1$ pour $n \geq N$. Pour ces indices, $u_n^2 \leq u_n$. **Par comparaison, $\sum u_n^2$ converge.**

2. D'abord, $0 \leq \frac{u_n}{1+u_n} \leq u_n$, donc la série converge par comparaison. Réciproquement, posons $t_n = \frac{u_n}{1+u_n} \in [0, 1[$. La série $\sum t_n$ converge, donc $t_n \rightarrow 0$. Or $w_n = \frac{t_n}{1-t_n}$. À partir d'un certain rang, $t_n \leq \frac{1}{2}$, donc $0 \leq w_n \leq 2t_n$. **Par comparaison, $\sum w_n$ converge.**

3. L'inégalité $\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$ donne $0 \leq \sqrt{u_n u_{n+1}} \leq \frac{u_n + u_{n+1}}{2}$. La série $\sum u_{n+1}$ converge, car elle ne diffère de $\sum u_n$ que par un terme. Par linéarité, le majorant est le terme d'une série convergente. **Par comparaison, $\sum \sqrt{u_n u_{n+1}}$ converge.**

4. On applique $ab \leq \frac{a^2+b^2}{2}$ avec $a = \sqrt{u_n}$ et $b = \frac{1}{n}$: $0 \leq \frac{\sqrt{u_n}}{n} \leq \frac{1}{2} \left(u_n + \frac{1}{n^2} \right)$. Les séries $\sum u_n$ et $\sum \frac{1}{n^2}$ convergent. **Donc $\sum \frac{\sqrt{u_n}}{n}$ converge.**

5. Non. En effet, pour $u_n = \frac{1}{n}$, la série $\sum u_n^2 = \sum \frac{1}{n^2}$ converge. Pourtant, $\sum \frac{1}{n}$ diverge. **La réciproque est fautive.**

6. Pour $n+1 \leq k \leq 2n$, la décroissance donne $u_k \geq u_{2n}$. En sommant ces n inégalités, $0 \leq n u_{2n} \leq \sum_{k=n+1}^{2n} u_k = S_{2n} - S_n$. Or S_{2n} et S_n tendent vers la même limite.

Donc $n u_{2n} \rightarrow 0$, puis $2n u_{2n} \rightarrow 0$. Ensuite,

$0 \leq (2n+1) u_{2n+1} \leq \frac{2n+1}{2n} \times 2n u_{2n} \rightarrow 0$. Les suites extraites d'indices pairs et impairs tendent vers 0. **Donc** $n u_n \rightarrow 0$.

7. Posons $u_n = \frac{1}{n}$ si n est un carré parfait et $u_n = 0$ sinon. Les sommes partielles sont majorées par $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$, donc la série converge. Cependant, pour $n = m^2$, on a $n u_n = 1$.
La suite $(n u_n)$ ne tend pas vers 0 : l'hypothèse de décroissance est indispensable.

Corrigé de l'exercice 10 : Encadrement de la série harmonique

1. La fonction $t \rightarrow \frac{1}{t}$ est décroissante sur $]0, +\infty[$. Pour $t \in [k, k+1]$, on a donc $\frac{1}{t} \leq \frac{1}{k}$.

En intégrant sur un intervalle de longueur 1, $\int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \leq \frac{1}{k}$. De même, pour $k \geq 2$ et

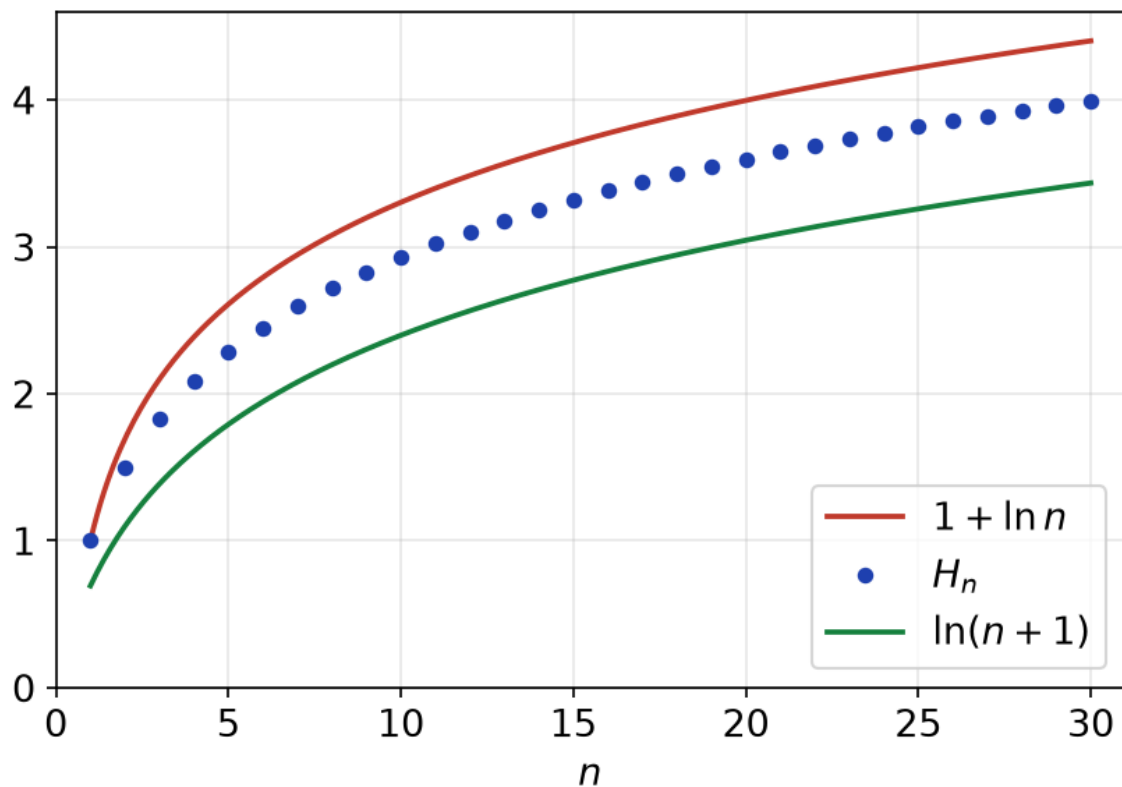
$t \in [k-1, k]$, on a $\frac{1}{k} \leq \frac{1}{t}$. **On obtient les deux inégalités demandées.**

2. On somme la première inégalité pour k de 1 à n . Par la relation de Chasles,

$$\ln(n+1) = \int_1^{n+1} \frac{dt}{t} \leq H_n. \text{ Ensuite, on somme la seconde pour } k \text{ de } 2 \text{ à } n :$$

$$H_n - 1 \leq \int_1^n \frac{dt}{t} = \ln n. \text{ Ainsi, } \ln(n+1) \leq H_n \leq 1 + \ln n. \text{ Enfin,}$$

$\ln(n+1) = \ln n + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \sim \ln n$ et $1 + \ln n \sim \ln n$. **Par encadrement,**
 $H_n \sim \ln n$. La figure ci-dessous montre H_n coincé entre les deux courbes.



3. D'une part, $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} - \int_n^{n+1} \frac{dt}{t} \leq 0$, d'après la question 1 (décroissance de $\frac{1}{t}$ sur $[n, n+1]$). D'autre part, $v_{n+1} - v_n = \frac{1}{n+1} - \int_{n+1}^{n+2} \frac{dt}{t} \geq 0$. Enfin, $u_n - v_n = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \rightarrow 0$. Les suites sont donc adjacentes et convergent vers une même limite γ . De plus, $v_1 \leq \gamma \leq u_1$. **On obtient** $1 - \ln 2 \leq \gamma \leq 1$, **soit** $0,30 \leq \gamma \leq 1$.

4. Notons n_0 le plus petit entier tel que $H_{n_0} \geq 10$. Si $n \leq 8103$, alors $\ln n < 9$, car $e^9 \approx 8103,08$. Donc $H_n \leq 1 + \ln n < 10$. Ainsi, $n_0 \geq 8104$. Ensuite, $e^{10} \approx 22026,47$. Pour $n = 22026$, on a $\ln(n+1) > 10$, donc $H_n \geq 10$. **On conclut que** $8104 \leq n_0 \leq 22026$.

Corrigé de l'exercice 11 : Encadrement d'une somme par des intégrales

1. La fonction f est dérivable et $f'(x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2} \leq 0$ sur $[0, +\infty[$. Elle est donc décroissante. Pour $t \in [n, n+1]$, on a $f(t) \leq f(n)$. Pour $t \in [n-1, n]$, on a $f(n) \leq f(t)$. **En intégrant sur des intervalles de longueur 1, on obtient l'encadrement voulu.**

2. On somme l'encadrement pour n de 1 à N :

$$\int_1^{N+1} f(t) dt \leq \sum_{n=1}^N f(n) \leq \int_0^N f(t) dt.$$

Une primitive de f est $\arctan$. Le majorant vaut $\arctan N \leq \frac{\pi}{2}$. Les sommes partielles sont donc majorées, et la série à termes positifs converge. Ensuite, on fait tendre N vers $+\infty$. Le minorant tend vers $\frac{\pi}{2} - \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$. **Ainsi, $\frac{\pi}{4} \leq S \leq \frac{\pi}{2}$.**

3. On somme cette fois de $k = n+1$ à N :

$$\arctan(N+1) - \arctan(n+1) \leq \sum_{k=n+1}^N f(k) \leq \arctan N - \arctan n.$$

Quand $N \rightarrow +\infty$, on obtient $\frac{\pi}{2} - \arctan(n+1) \leq R_n \leq \frac{\pi}{2} - \arctan n$. Or, pour $x > 0$, $\frac{\pi}{2} - \arctan x = \arctan \frac{1}{x}$. D'où l'encadrement annoncé. De plus, $\arctan u \sim u$ en 0, donc les deux bornes sont équivalentes à $\frac{1}{n}$. **Par encadrement, $R_n \sim \frac{1}{n}$.**

4. On a $S_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{10} = 0,8$. Ensuite, $\arctan \frac{1}{4} \approx 0,2450$ et $\arctan \frac{1}{3} \approx 0,3218$. Comme $S = S_3 + R_3$, on obtient $1,0449 \leq S \leq 1,1218$. L'amplitude vaut environ 0,077. **Ainsi, $1,044 \leq S \leq 1,122$.**

Point de méthode : pour encadrer un reste, sumez jusqu'à un indice N fini, puis seulement ensuite faites tendre N vers l'infini.

Corrigé de l'exercice 12 : Séries de Bertrand

1. Cas $\beta \leq 0$: pour $n \geq 3$, on a $\ln n \geq 1$, donc $(\ln n)^\beta \leq 1$ et $u_n \geq \frac{1}{n}$. La série

diverge par comparaison à la série harmonique. Cas $\beta > 0$: la fonction $f : t \rightarrow \frac{1}{t (\ln t)^\beta}$ est continue et positive sur $[2, +\infty[$. Elle est décroissante, car $t \rightarrow t (\ln t)^\beta$ est un produit de fonctions positives croissantes. La comparaison série-intégrale s'applique donc. Pour $\beta \neq 1$, une primitive de f est $\frac{(\ln t)^{1-\beta}}{1-\beta}$. Ainsi, $\int_2^n f$ est bornée si $\beta > 1$ et tend vers $+\infty$ si $\beta < 1$. Pour $\beta = 1$, on a $\int_2^n f = \ln(\ln n) - \ln(\ln 2) \rightarrow +\infty$. **Pour $\alpha = 1$, la série converge si et seulement si $\beta > 1$.**

2. On a $1 < \gamma < \alpha$. Ensuite, $n^\gamma u_n = \frac{1}{n^{(\alpha-1)/2} (\ln n)^\beta}$. Par croissances comparées, cette quantité tend vers 0, que β soit positif ou négatif. Donc $u_n = o\left(\frac{1}{n^\gamma}\right)$, avec $\sum \frac{1}{n^\gamma}$ convergente. **La série converge pour tout β .**

3. On a $n u_n = \frac{n^{1-\alpha}}{(\ln n)^\beta} \rightarrow +\infty$ par croissances comparées. Ainsi, $u_n \geq \frac{1}{n}$ à partir d'un certain rang. **La série diverge pour tout β .**

4. On applique les résultats précédents :

- $\sum \frac{1}{n \ln n}$: $\alpha = 1$, $\beta = 1$, divergente ;
- $\sum \frac{\ln n}{n^2}$: $\alpha = 2$, $\beta = -1$, convergente ;
- $\sum \frac{1}{\sqrt{n} \ln n}$: $\alpha = \frac{1}{2}$, divergente ;
- $\sum \frac{1}{n (\ln n)^2}$: $\alpha = 1$, $\beta = 2$, convergente ;
- $\sum \frac{1}{n \sqrt{\ln n}}$: $\alpha = 1$, $\beta = \frac{1}{2}$, divergente.

Seules la deuxième et la quatrième séries convergent.

Point de méthode : quand $\alpha \neq 1$, le logarithme ne pèse rien face à une puissance. On le « noie » en comparant à $n^{-\gamma}$ avec γ strictement entre 1 et α .

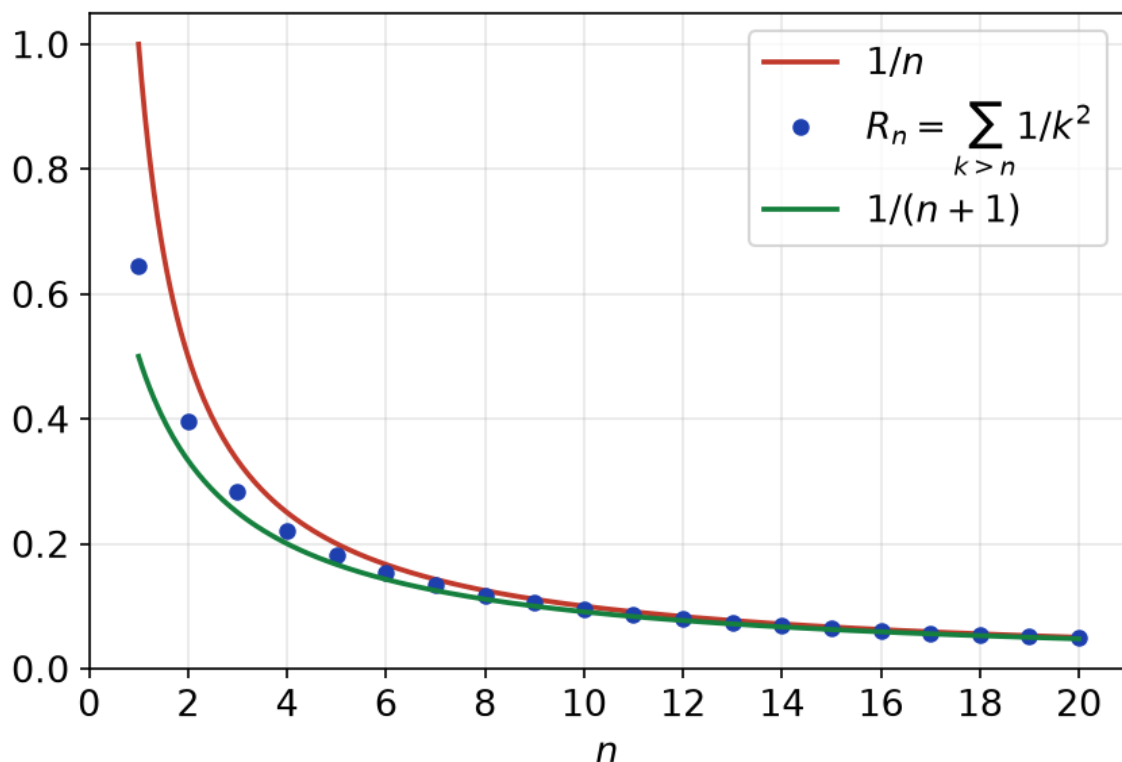
Corrigé de l'exercice 13 : Reste d'une série de Riemann convergente

1. La fonction $t \rightarrow t^{-\alpha}$ est continue, positive et décroissante sur $[1, +\infty[$. Pour $k \geq 2$, on a donc $\int_k^{k+1} t^{-\alpha} dt \leq \frac{1}{k^\alpha} \leq \int_{k-1}^k t^{-\alpha} dt$. On somme de $k = n+1$ à N :

$$\int_{n+1}^{N+1} \frac{dt}{t^\alpha} \leq \sum_{k=n+1}^N \frac{1}{k^\alpha} \leq \int_n^N \frac{dt}{t^\alpha}.$$

Comme $\alpha > 1$, on a $\int_a^N t^{-\alpha} dt = \frac{a^{1-\alpha} - N^{1-\alpha}}{\alpha - 1} \rightarrow \frac{a^{1-\alpha}}{\alpha - 1}$. En faisant tendre N vers $+\infty$, on obtient l'encadrement. Enfin, $(n+1)^{1-\alpha} \sim n^{1-\alpha}$. **Donc** $R_n \sim \frac{1}{(\alpha - 1) n^\alpha - 1}$.

2. Pour $\alpha = 2$, on a $\alpha - 1 = 1$. **L'encadrement devient** $\frac{1}{n+1} \leq R_n \leq \frac{1}{n}$. La figure ci-dessous montre les restes coincés entre les deux courbes, qui se rejoignent vite.



3. L'erreur commise est exactement R_n . Si $n \geq 1000$, alors $R_n \leq \frac{1}{n} \leq 10^{-3}$. Si $n \leq 998$, alors $R_n \geq \frac{1}{n+1} \geq \frac{1}{999} > 10^{-3}$. **Le plus petit rang convenable vaut donc 999 ou 1000.**
4. L'erreur vaut $\frac{\pi^2}{6} - S_n - \frac{1}{n} = R_n - \frac{1}{n}$. D'après la question 2, $\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} \leq R_n - \frac{1}{n} \leq 0$. Or $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)}$. Donc l'erreur est majorée en valeur absolue par $\frac{1}{n(n+1)}$. Enfin, $31 \times 32 = 992$ et $32 \times 33 = 1056 \geq 1000$. **Le rang $n = 32$ suffit, au lieu d'environ 1000.**

Point de méthode : un équivalent du reste permet d'accélérer la convergence : on ajoute à S_n une approximation de R_n .

Corrigé de l'exercice 14 : Équivalents de sommes partielles divergentes

1. La fonction $t \rightarrow \sqrt{t}$ est croissante. Pour $k \geq 1$, on a donc $\int_{k-1}^k \sqrt{t} \, dt \leq \sqrt{k} \leq \int_k^{k+1} \sqrt{t} \, dt$.

En sommant de $k = 1$ à n ,

$$\frac{2}{3} n^{3/2} = \int_0^n \sqrt{t} \, dt \leq A_n \leq \int_1^{n+1} \sqrt{t} \, dt = \frac{2}{3} \left((n+1)^{3/2} - 1 \right).$$

Or $(n+1)^{3/2} - 1 \sim n^{3/2}$. **Par encadrement, $A_n \sim \frac{2}{3} n^{3/2}$.**

2. La fonction $t \rightarrow \frac{1}{\sqrt{t}}$ est décroissante sur $]0, +\infty[$. En sommant $\int_k^{k+1} \frac{dt}{\sqrt{t}} \leq \frac{1}{\sqrt{k}}$ de $k = 1$ à n , on obtient $2\sqrt{n+1} - 2 \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}$. Ensuite, en sommant $\frac{1}{\sqrt{k}} \leq \int_{k-1}^k \frac{dt}{\sqrt{t}}$ de

$k = 2$ à n , puis en ajoutant le terme 1, on obtient la majoration par $1 + (2\sqrt{n} - 2) = 2\sqrt{n} - 1$. **Les deux bornes sont équivalentes à $2\sqrt{n}$, donc**

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} \sim 2\sqrt{n}.$$

3. La fonction $f : t \rightarrow \frac{1}{t \ln t}$ est continue, positive et décroissante sur $[2, +\infty[$. Une primitive est $\ln(\ln t)$. Par la même méthode,

$$\ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln 2) \leq \sum_{k=2}^n \frac{1}{k \ln k} \leq \frac{1}{2 \ln 2} + \ln(\ln n) - \ln(\ln 2).$$

De plus, $\ln(n+1) = \ln n \left(1 + \frac{\ln(1 + 1/n)}{\ln n}\right)$, donc $\ln(\ln(n+1)) = \ln(\ln n) + o(1)$.

Comme $\ln(\ln n) \rightarrow +\infty$, les deux bornes sont équivalentes à $\ln(\ln n)$. **Ainsi,**

$$\sum_{k=2}^n \frac{1}{k \ln k} \sim \ln(\ln n).$$

Corrigé de l'exercice 15 : Sommation des relations de comparaison

1. On a $\frac{k}{k^2 + 1} \sim \frac{1}{k}$, terme positif d'une série divergente. D'après le théorème de sommation des équivalents (cas divergent), $A_n \sim H_n$. Or $H_n \sim \ln n$. **Donc** $A_n \sim \ln n$.

2. Par télescopage, $\sum_{k=n+1}^N \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{N+1}$. Le reste vaut donc $\frac{1}{n+1}$. Ensuite, $\frac{1}{k^2 + k + 1} \sim \frac{1}{k(k+1)}$, terme positif d'une série convergente. D'après le théorème de sommation des équivalents (cas convergent), $B_n \sim \frac{1}{n+1}$. **Donc** $B_n \sim \frac{1}{n}$.

3. On réduit au même dénominateur : $\frac{1}{(k-1)k} - \frac{1}{k(k+1)} = \frac{(k+1) - (k-1)}{(k-1)k(k+1)} = \frac{2}{(k-1)k(k+1)}$.
L'identité est donc vraie. Par télescopage, $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{(k-1)k(k+1)} = \frac{1}{2n(n+1)}$. Or $\frac{1}{k^3} \sim \frac{1}{(k-1)k(k+1)}$, termes positifs. Par sommation des équivalents, $C_n \sim \frac{1}{2n(n+1)}$. **Ainsi,**
 $C_n \sim \frac{1}{2n^2}$.

4. La série $\sum \frac{1}{n}$ est à termes positifs et diverge. D'après le théorème de sommation des relations de comparaison (cas divergent), $\sum_{k=1}^n a_k = o(H_n)$. Or $H_n \sim \ln n$, donc

$o(H_n) = o(\ln n)$. Pour l'application, $n a_n = \frac{1}{\ln(n+1)} \rightarrow 0$, donc $a_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$. **Par conséquent,** $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k \ln(k+1)} = o(\ln n)$.

5. La série $\sum \frac{1}{n^3}$ converge. D'après le théorème (cas convergent, version O), $\sum u_n$ converge et son reste est un $O(C_n)$. Or $C_n \sim \frac{1}{2n^2}$. **Le reste de $\sum u_n$ est donc un $O\left(\frac{1}{n^2}\right)$.**

Point de méthode : retenir le principe. Pour une série convergente on somme les restes ; pour une série divergente on somme les débuts.

Corrigé de l'exercice 16 : Séries à paramètre et développements limités

1. Posons $d_n = \sqrt{n^2 + n + 1} - \sqrt{n^2 + n - 1}$. Par la quantité conjuguée,

$$d_n = \frac{2}{\sqrt{n^2 + n + 1} + \sqrt{n^2 + n - 1}}.$$

Le dénominateur est équivalent à $2n$, donc $d_n \sim \frac{1}{n}$, avec $d_n > 0$. Ainsi, $n d_n \rightarrow 1$, puis $(n d_n)^\alpha \rightarrow 1$. Autrement dit, $d_n^\alpha \sim \frac{1}{n^\alpha}$. **La série converge si et seulement si $\alpha > 1$.**

2. Le terme est positif. De plus, $1 - \cos \frac{1}{n} \sim \frac{1}{2n^2}$, donc le terme est équivalent à $\frac{1}{2n^{2-\alpha}}$. **La série converge si et seulement si $2 - \alpha > 1$, c'est-à-dire $\alpha < 1$.**

3. Pour $x > 0$, on a $\ln(1+x) < x$. Donc $n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < 1$, puis $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e$. Ensuite, le développement limité de $\ln(1+x)$ donne

$$n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1 - \frac{1}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Par conséquent, $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \exp\left(-\frac{1}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = e - \frac{e}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Ainsi, $e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \sim \frac{e}{2n}$. Ce terme est positif. **La série diverge.**

4. Posons $x = \frac{1}{n^\alpha}$, qui tend vers 0 car $\alpha > 0$. Pour $x > 0$, on a $\sin x < x$, donc le terme est positif. De plus, $x - \sin x \sim \frac{x^3}{6}$. Le terme est donc équivalent à $\frac{1}{6 n^{3\alpha}}$. **La série converge si et seulement si $3\alpha > 1$, soit $\alpha > \frac{1}{3}$.**

Corrigé de l'exercice 17 : Calcul approché de e et irrationalité

1. Les termes sont strictement positifs et $\frac{1/(k+1)!}{1/k!} = \frac{1}{k+1} \rightarrow 0 < 1$. **D'après la règle de d'Alembert, la série converge.**

2. On a $e - S_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k!} > 0$, car tous les termes sont strictement positifs. Pour $k \geq n+1$, on écrit

$$\frac{1}{k!} = \frac{1}{(n+1)!} \times \frac{1}{(n+2)(n+3)\dots k}.$$

Le second facteur contient $k - n - 1$ entiers, tous supérieurs à $n+1$. Donc

$$\frac{1}{k!} \leq \frac{1}{(n+1)!} \left(\frac{1}{n+1}\right)^{k-n-1}. \text{ En sommant, avec une série géométrique de raison } \frac{1}{n+1} < 1,$$

$$e - S_n \leq \frac{1}{(n+1)!} \times \frac{1}{1 - \frac{1}{n+1}} = \frac{1}{(n+1)!} \times \frac{n+1}{n} = \frac{1}{n \cdot n!}.$$

On a bien $0 < e - S_n \leq \frac{1}{n \cdot n!}$.

3. On cherche $n \cdot n! \geq 10^6$. Or $8 \times 8! = 322\,560$ et $9 \times 9! = 3\,265\,920$. **Le rang $n = 9$ garantit une erreur inférieure à 10^{-6} .**

4. Posons $A = q!(e - S_q)$. D'une part, $A = (q-1)! \left(p - \sum_{k=0}^q \frac{q!}{k!} \right)$. Chaque $\frac{q!}{k!}$ est entier pour $k \leq q$, donc A est un entier. D'autre part, la question 2 donne $0 < A \leq \frac{1}{q} \leq \frac{1}{2}$. Aucun entier ne vérifie cela : c'est absurde. Enfin, tout rationnel s'écrit avec un dénominateur $q \geq 2$ (quitte à multiplier p et q par 2). **Le nombre e est donc irrationnel.**

Point de méthode : une majoration du reste par une série géométrique est le prolongement quantitatif

de la règle de d'Alembert.

Corrigé de l'exercice 18 : Une suite récurrente et deux séries

1. Posons $g(x) = x - x^2 = x(1 - x)$. Si $u_n \in]0, 1[$, alors $u_{n+1} = u_n(1 - u_n)$ est un produit de deux réels de $]0, 1[$. Donc $u_{n+1} \in]0, 1[$. Par récurrence, $u_n \in]0, 1[$ pour tout n . Ensuite, $u_{n+1} - u_n = -u_n^2 < 0$: la suite est décroissante. Elle est minorée par 0, donc elle converge vers un réel $\ell \in [0, 1[$. Par continuité de g , $\ell = \ell - \ell^2$, d'où $\ell = 0$. **La suite décroît et tend vers 0.**

2. On calcule

$$\frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n} = \frac{1}{u_n(1 - u_n)} - \frac{1}{u_n} = \frac{1 - (1 - u_n)}{u_n(1 - u_n)} = \frac{1}{1 - u_n}.$$

Comme $u_n \rightarrow 0$, cette différence tend vers 1.

3. Posons $v_k = \frac{1}{u_{k+1}} - \frac{1}{u_k}$. On a $v_k \sim 1$, terme positif de la série divergente $\sum 1$. Par sommation des équivalents (cas divergent), $\sum_{k=0}^{n-1} v_k \sim \sum_{k=0}^{n-1} 1 = n$. Or, par télescopage,

$$\sum_{k=0}^{n-1} v_k = \frac{1}{u_n} - \frac{1}{u_0}. \text{ Ainsi, } \frac{1}{u_n} = n + o(n) + \frac{1}{u_0}, \text{ donc } \frac{1}{u_n} \sim n. \text{ On conclut que } u_n \sim \frac{1}{n}.$$

4. La suite (u_n) est positive et $u_n \sim \frac{1}{n}$. **Par comparaison à la série harmonique, $\sum u_n$ diverge.**

5. On a $u_n^2 \sim \frac{1}{n^2}$, donc $\sum u_n^2$ converge. Mieux, la relation de récurrence donne

$$u_n^2 = u_n - u_{n+1}. \text{ Par télescopage, } \sum_{n=0}^N u_n^2 = u_0 - u_{N+1} \rightarrow u_0. \text{ La somme vaut } \sum_{n=0}^{+\infty} u_n^2 = u_0.$$

Point de méthode : pour une suite $u_{n+1} = u_n - a u_n^p$ qui tend vers 0, cherchez un exposant β tel que $u_{n+1}^\beta - u_n^\beta$ ait une limite finie non nulle, puis summez.

Corrigé de l'exercice 19 : Logarithme de la factorielle

1. La fonction $\ln$ est croissante. Pour $k \geq 2$, on a donc $\int_{k-1}^k \ln t \, dt \leq \ln k \leq \int_k^{k+1} \ln t \, dt$.

Comme $\ln 1 = 0$, on a $\ln(n!) = \sum_{k=2}^n \ln k$. Une primitive de $\ln$ est $t \ln t - t$. En sommant de $k = 2$ à n ,

$$\int_1^n \ln t \, dt = n \ln n - n + 1 \leq \ln(n!) \leq \int_2^{n+1} \ln t \, dt.$$

Le majorant vaut $(n+1)\ln(n+1) - (n+1) - 2\ln 2 + 2$. **On obtient bien**
 $n \ln n - n + 1 \leq \ln(n!) \leq (n+1)\ln(n+1) - n + 1 - 2\ln 2$.

2. Le minorant vérifie $n \ln n - n + 1 \sim n \ln n$, car $n = o(n \ln n)$. Pour le majorant, $(n+1)\ln(n+1) = (n+1)\left(\ln n + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right) \sim n \ln n$. Les autres termes sont des $o(n \ln n)$. **Par encadrement**, $\ln(n!) \sim n \ln n$.

3. On soustrait $n \ln n - n$ à l'encadrement. Le minorant devient 1. Le majorant devient

$$(n+1)\ln(n+1) - n \ln n + 1 - 2\ln 2 = n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) + \ln(n+1) + 1 - 2\ln 2.$$

Or $n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \leq 1$ et $\ln(n+1) \leq \ln n + 1$. Ainsi,
 $1 \leq \ln(n!) - (n \ln n - n) \leq \ln n + 3$. **Donc** $\ln(n!) = n \ln n - n + O(\ln n)$.

4. Pour $n \geq 2$, $\ln(n!) > 0$ et $\frac{1}{\ln(n!)} \sim \frac{1}{n \ln n}$. Or $\sum \frac{1}{n \ln n}$ diverge (série de Bertrand, exercice 12). Donc $\sum \frac{1}{\ln(n!)}$ diverge. Ensuite, $\frac{1}{(\ln(n!))^2} \sim \frac{1}{n^2 (\ln n)^2}$. Pour $n \geq 3$, ce dernier terme est majoré par $\frac{1}{n^2}$. **La première série diverge et la seconde converge.**

Corrigé de l'exercice 20 : Critère de condensation de Cauchy

1. Le bloc d'indices k allant de 2^n à $2^{n+1} - 1$ contient 2^n termes. Par décroissance, chacun vérifie $u_{2^{n+1}} \leq u_{2^{n+1}-1} \leq u_k \leq u_{2^n}$. **En sommant les 2^n inégalités, on obtient l'encadrement voulu.**
2. On somme l'encadrement pour n de 0 à N . Les blocs recouvrent exactement les indices de 1 à $2^{N+1} - 1$. Ainsi,

$$\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N+1} 2^n u_{2^n} \leq \sum_{k=1}^{2^{N+1}-1} u_k \leq \sum_{n=0}^N 2^n u_{2^n}.$$

Si $\sum 2^n u_{2^n}$ converge, de somme T , alors $S_{2^{N+1}-1} \leq T$. Pour tout m , on choisit N avec $m \leq 2^{N+1} - 1$. Comme (S_m) croît, $S_m \leq T$. La série $\sum u_n$ converge donc. Réciproquement, si $\sum u_n$ converge, de somme S , la minoration donne

$\sum_{n=1}^{N+1} 2^n u_{2^n} \leq 2S$. Les sommes partielles de la série condensée sont donc majorées. **Les deux séries sont de même nature.**

3. Pour $\alpha > 0$, la suite $\frac{1}{n^\alpha}$ est positive et décroissante. De plus,
 $2^n u_{2^n} = 2^n \times 2^{-n\alpha} = (2^{1-\alpha})^n$. Cette série géométrique converge si et seulement si $2^{1-\alpha} < 1$. **On retrouve la convergence si et seulement si $\alpha > 1$.**
4. La nature ne dépend pas du premier terme. On pose donc $u_1 = u_2$, et la suite reste positive et décroissante. Pour $n \geq 1$, $2^n u_{2^n} = \frac{2^n}{2^n (n \ln 2)^\beta} = \frac{1}{(n \ln 2)^\beta} \times \frac{1}{n^\beta}$. **La série converge si et seulement si $\beta > 1$.**
5. Pour $n \geq 3$, on a $\ln(\ln n) > 0$. Le terme est positif et décroissant, car $n \ln n \ln(\ln n)$ est un produit de fonctions positives croissantes. On pose $u_1 = u_2 = u_3$. Pour $n \geq 2$, on a $2^n \geq 3$ et

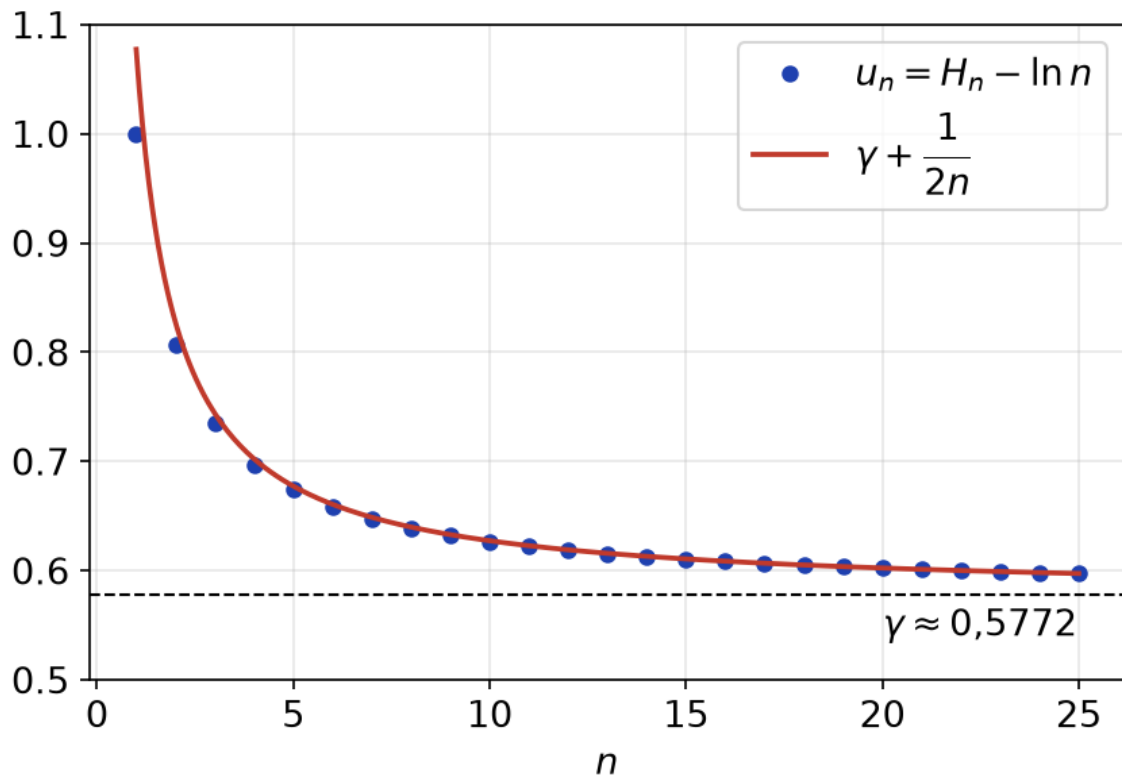
$$2^n u_{2^n} = \frac{1}{n \ln 2 \times \ln(n \ln 2)} \sim \frac{1}{\ln 2} \times \frac{1}{n \ln n},$$

car $\ln(n \ln 2) = \ln n + \ln(\ln 2) \sim \ln n$. La série de Bertrand $\sum \frac{1}{n \ln n}$ diverge. **La série condensée diverge, donc la série étudiée diverge aussi.**

Point de méthode : la condensation remplace une série lente par une série qui avance à pas exponentiels. Elle transforme ainsi un logarithme en simple puissance de n .

Corrigé de l'exercice 21 : Problème : développement asymptotique de la série harmonique

- On a $u_n - u_{n+1} = -\frac{1}{n+1} + \ln(n+1) - \ln n$. Or $\ln n - \ln(n+1) = \ln \frac{n}{n+1} = \ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)$. D'où la formule. Ensuite, pour $x \in [0, 1[$, on a $\ln(1-x) \leq -x$ par concavité. Donc $-\ln(1-x) - x \geq 0$. Avec $x = \frac{1}{n+1}$, on obtient $u_n - u_{n+1} \geq 0$.
- Le développement limité $-\ln(1-x) = x + \frac{x^2}{2} + O(x^3)$ donne $-\ln(1-x) - x \sim \frac{x^2}{2}$. Avec $x = \frac{1}{n+1}$, on a donc $u_n - u_{n+1} \sim \frac{1}{2(n+1)^2} \sim \frac{1}{2n^2}$. La série $\sum (u_n - u_{n+1})$ est à termes positifs. Par équivalence avec une série de Riemann convergente, elle converge. C'est une série télescopique : la suite (u_n) converge donc. **On note γ sa limite, la constante d'Euler.**
- Pour $N \geq n$, on a $\sum_{k=n}^N (u_k - u_{k+1}) = u_n - u_{N+1}$. **En faisant tendre N vers $+\infty$, on obtient** $u_n - \gamma = \sum_{k=n}^{+\infty} (u_k - u_{k+1})$.
- Les termes $u_k - u_{k+1}$ sont positifs et équivalents à $\frac{1}{2k^2}$, terme d'une série convergente. Par sommation des équivalents (cas convergent), $u_n - \gamma \sim \frac{1}{2} \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$. D'après l'exercice 13, $\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = R_{n-1} \sim \frac{1}{n-1} \sim \frac{1}{n}$. Ainsi, $u_n - \gamma \sim \frac{1}{2n}$, c'est-à-dire $u_n - \gamma = \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$. **On obtient** $H_n = \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$. La figure ci-dessous confirme cette approximation, déjà excellente pour $n = 5$.



5. On a $H_n - \ln n - \gamma = u_n - \gamma \geq 0$ et $u_n - \gamma \sim \frac{1}{2n}$. Donc $\sum (u_n - \gamma)$ diverge. Ensuite, $(u_n - \gamma)^2 \sim \frac{1}{4n^2}$. **La première série diverge et la seconde converge.**

6. On écrit $\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = H_{2n} - H_n$. D'après la question 4,

$$H_{2n} - H_n = \ln(2n) + \gamma + \frac{1}{4n} - \ln n - \gamma - \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Donc
$$\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = \ln 2 - \frac{1}{4n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Point de méthode : pour trouver le terme suivant d'un développement, étudiez la série télescopique des différences $u_n - u_{n+1}$, puis sumez les équivalents sur le reste.

Corrigé de l'exercice 22 : Problème : quand la règle de d'Alembert ne conclut pas

1. On calcule

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)! e^{n+1}} \times \frac{n! e^n}{n^n} = \frac{1}{e} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Comme $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \rightarrow e$, ce rapport tend vers 1. **La règle de d'Alembert ne permet pas de conclure.**

2. On a $\ln \frac{u_{n+1}}{u_n} = n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - 1$. Le développement $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + O(x^4)$ donne

$$n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1 - \frac{1}{2n} + \frac{1}{3n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

Donc $\ln \frac{u_{n+1}}{u_n} = -\frac{1}{2n} + \frac{1}{3n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right).$

3. On a $w_n = \frac{1}{2} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) + \ln \frac{u_{n+1}}{u_n}$. Or $\frac{1}{2} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2n} - \frac{1}{4n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)$. En additionnant,

$$w_n = \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) \frac{1}{n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right) = \frac{1}{12n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

Ainsi, $w_n \sim \frac{1}{12n^2}.$

4. La suite (w_n) est positive à partir d'un certain rang et équivalente au terme d'une série de Riemann convergente. Donc $\sum w_n$ converge. Or, par télescopage,

$\sum_{k=1}^{n-1} w_k = \ln v_n - \ln v_1$. La suite $(\ln v_n)$ converge donc vers un réel λ . Par continuité de l'exponentielle, $v_n \rightarrow L = e^\lambda > 0$. **Autrement dit,** $\sqrt{n} u_n \rightarrow L$, **soit** $u_n \sim \frac{L}{\sqrt{n}}.$

5. Le terme u_n est positif et équivalent à $\frac{L}{\sqrt{n}}$, avec $L > 0$. La série de Riemann $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge. **Donc** $\sum u_n$ **diverge.**

6. La relation $\frac{n^n}{n! e^n} \sim \frac{L}{\sqrt{n}}$ donne $n! \sim \frac{1}{L} \sqrt{n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$. Avec $L = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$, **on obtient la formule**

de Stirling : $n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$.

Point de méthode : quand $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$, la suite $n^\alpha u_n$ converge vers une limite strictement positive. Ainsi, u_n se compare à une série de Riemann.

[Revenir aux énoncés des exercices](#)

Pour aller plus loin en L2

- Le cours : [séries à termes positifs, cours de maths en L2](#)
- Les énoncés : [exercices de maths en L2 sur séries à termes positifs](#)
- Chapitre suivant : [Séries à termes quelconques](#)
- Tester vos connaissances : [QCM de maths en L2 par chapitre](#)
- Le sommaire : [tous les chapitres de maths de L2](#) et la [licence de maths de L1 à L3](#)