

Représentation paramétrique et équation cartésienne

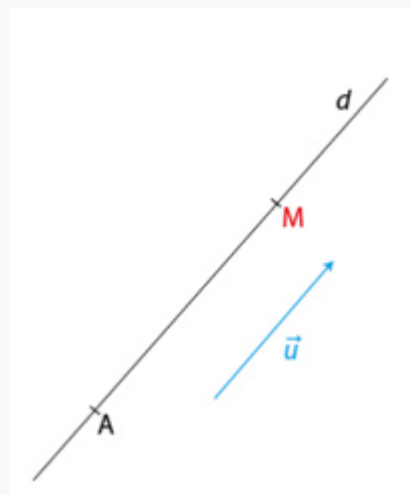
I. Représentations paramétriques d'une droite.

$(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est un repère orthonormé de l'espace.

1.Principe.

Définition :

Soit (d) la droite qui passe par le point A de coordonnées $(x_A; y_A; z_A)$ et qui admet pour vecteur directeur le vecteur $\vec{u}$ de coordonnées (a ; b ; c).



Dire qu'un point M de coordonnées $(x; y; z)$ appartient à (d), équivaut à dire que les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires, c'est-à-dire qu'il existe un réel t tel que $\overrightarrow{AM} = t\vec{u}$, autrement dit tel que :

$$(S) \begin{cases} x = x_A + ta \\ y = y_A + tb \\ z = z_A + tc \end{cases}$$

Définition :

Le système (S) est une **représentation paramétrique** de la droite (d).
t est le **paramètre** de cette représentation.

Exemple :

(d) est la droite qui passe par le point $A(2; -3; 1)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(3; 4; 2)$;
Une représentation paramétrique de d est

$$\begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = -3 + 4t \\ z = 1 + 2t \end{cases} (t \in \mathbb{R}).$$

coordonnées de A $\nearrow$ $\nwarrow$ coordonnées de $\vec{u}$

2. Utiliser une représentation paramétrique.

Définition :

Une droite (d) admet **une infinité de représentations paramétriques**. En effet, on peut choisir un point de (d) autre que A ou choisir un vecteur non nul colinéaire à $\vec{u}$ et autre que $\vec{u}$.

Exemple :

On reprend l'exemple du paragraphe 1 .

• Le point $B(5 ; 1 ; 3)$ (obtenu pour $t = 1$) appartient à (d), donc une autre représentation paramétrique de (d) est :

$$(S) \begin{cases} x = 5 + 3t' \\ y = 1 + 4t' \\ z = 3 + 2t' \end{cases} \quad (t' \in \mathbb{R}) .$$

• Le vecteur $\vec{v}(-6 ; -8 ; -4)$ est un autre vecteur directeur de (d), donc une autre représentation paramétrique de (d) est :

$$(S) \begin{cases} x = 2 - 6t'' \\ y = -3 - 8t'' \\ z = 1 - 4t'' \end{cases} \quad (t'' \in \mathbb{R}) .$$

Remarque :

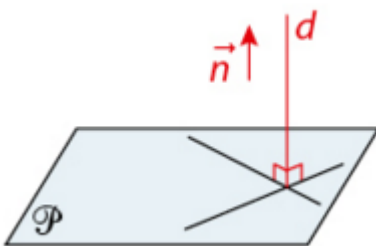
Par un raisonnement analogue à celui du paragraphe 1, on obtient une représentation paramétrique d'un plan à partir d'un de ses points et d'un couple de vecteurs non colinéaires de ce plan.

II. Équations cartésiennes d'un plan.

1. Vecteur normal à un plan.

Définition :

Dire qu'un vecteur non nul $\vec{n}$ est **normal** à un plan (P) signifie que toute droite de vecteur directeur $\vec{n}$ est orthogonale au plan (P) .



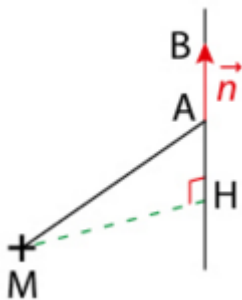
Propriété :

A est un point de l'espace et $\vec{n}$ est un vecteur non nul.

L'ensemble des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$ est le plan (P) passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$.

Preuve :

On note B le point distinct de A tel que $\vec{n} = \overrightarrow{AB}$ et H le projeté orthogonal d'un point M sur la droite (AB).



Avec ces notations :

$$\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{AB}.$$

Ainsi $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$ si, et seulement si, $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$, c'est-à-dire A = H car les vecteurs $\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires.

Autrement dit, $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$ si, et seulement si, A est le projeté orthogonal de M sur la droite (AB). L'ensemble cherché est donc le plan passant par A et orthogonal à (AB).

2. Équations cartésiennes d'un plan.

Propriétés et définition :

L'espace est muni d'un repère **orthonormé**.

1. Un plan de vecteur normal $\vec{n}(a; b; c)$ a une équation de la forme $ax + by + cz + d = 0$, où d désigne

un nombre réel. On dit que c'est une **équation cartésienne** de ce plan.

2. Réciproquement, a, b, c et d étant quatre nombres réels donnés avec a, b et c non tous nuls, l'ensemble des points $M(x; y; z)$ tels que $ax + by + cz + d = 0$ est un plan de vecteur normal $\vec{n}(a; b; c)$.

Preuve :

1. Un point $M(x; y; z)$ appartient au plan (P) passant par $A(x_A; y_A; z_A)$ et de vecteur normal $\vec{n}$ si, et seulement si, $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$, c'est-à-dire ;

$$a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = 0.$$

En posant $d = -(ax_A + by_A + cz_A)$, on obtient $\square$.

2. (φ) est l'ensemble des points $M(x; y; z)$ qui vérifie $ax + by + cz + d = 0$

où a, b et c sont des nombres réels non tous nuls.

On peut supposer, par exemple, $a \neq 0$.

Le point $A(-\frac{d}{a}; 0; 0)$ est alors un point de (φ) et l'équation équivaut à $a(x + \frac{d}{a}) + by + cz = 0$,

c'est-à-dire

$$\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0 \text{ avec } \vec{n}(a; b; c).$$

(φ) est donc le plan passant par A et de vecteur normal $\vec{n}(a; b; c)$.

3. Cas particuliers des plans (xOy), (yOz) et (xOz).

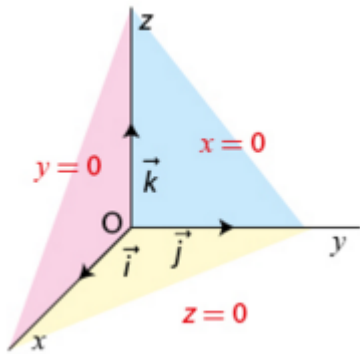
• Le plan (xOy) passe par l'origine $O(0; 0; 0)$ du repère et le vecteur $\vec{k}(0; 0; 1)$ est un vecteur normal à ce plan.

Ainsi, une équation cartésienne du plan (xOy) est de la forme $0x + 0y + 1z + d = 0$.

Or, $O(0; 0; 0)$ appartient à (xOy) donc $1 \times 0 + d = 0$ et $d = 0$.

Ainsi, une équation cartésienne du plan (xOy) est $z = 0$.

- De même, le plan (yOz) a pour équation cartésienne $x = 0$ et le plan (xOz) a pour équation cartésienne $y = 0$.



III. Traduire un problème par un système d'équations linéaires.

1. Déterminer l'intersection de deux droites.

Exemple :

Dans un repère orthonormé, on se propose de démontrer que les droites (d) et (d') de représentations paramétriques respectives :

$$(S) \begin{cases} x = 5 + t \\ y = 2 + t \\ z = -2t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}) \quad \text{et} \quad (S') \begin{cases} x = 17 + 2t' \\ y = -2 - 2t' \\ z = -4 + t' \end{cases} \quad (t' \in \mathbb{R}) \quad \text{sont sécantes.}$$

Les droites (d) et (d') sont sécantes si, et seulement si, le système ci-dessous de six équations à cinq inconnues t, t', x, y, z a une seule solution.

$$\begin{cases} x = 5 + t \\ y = 2 + t \\ z = -2t \\ x = 17 + 2t' \\ y = -2 - 2t' \\ z = -4 + t' \end{cases}$$

Autrement dit, (d) et (d') sont sécantes si, et seulement si, il existe un unique couple $(t; t')$ tel que :

$$(T) \begin{cases} 5 + t = 17 + 2t' \\ 2 + t = -2 - 2t' \\ -2t = -4 + t' \end{cases} \quad \text{c'est-à-dire} \quad \begin{cases} t - 2t' = 12 & (1) \\ t + 2t' = -4 & (2) \\ -2t - t' = -4 & (3) \end{cases}$$

Pour résoudre ce système (T) de trois équations à deux inconnues, on commence par résoudre un système formé par deux de ces équations, par exemple (1) et (2) comme ci-dessous.

Ce système ayant un seul couple solution, on vérifie qu'il est aussi solution de (3).

On conclut que ce couple est solution de (T).

- Par addition membre à membre des équations (1) et (2), on obtient $2t = 8$ soit $t = 4$.
- On remplace t par 4 dans l'équation (1), on obtient $4 - 2t' = 12$ soit $t' = -4$.
- On vérifie que les valeurs de t et t' obtenues sont solutions de l'équation (3) :

$$-2 \times 4 - (-4) = -4.$$

- On remplace t par 4 dans le système (S) ou $\boxed{\times}$ par -4 dans (S') et on obtient les coordonnées du point d'intersection de (d) et (d') : $M(9;6;-8)$.

Remarque :

Il est important de noter l'utilité d'avoir nommé différemment les paramètres t et t'. En effet, le point commun M à (d) et (d') est atteint sur (d) pour $t = 4$, alors qu'il est atteint sur (d') pour $t' = -4$.

2. Étudier l'intersection d'une droite et d'un plan.

Exemple :

Dans un repère orthonormé, le plan (P) a pour équation cartésienne $5x + y - z + 3 = 0$ et la droite (d) pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = t \\ y = 1 - 6t \\ z = 3 - t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

On se propose d'étudier l'intersection du plan (P) et de la droite (d) .

Pour cela, on résout le système (S) ci-dessous de quatre équations à quatre inconnues x, y, z, t .

$$(S) \begin{cases} x = t \\ y = 1 - 6t \\ z = 3 - t \\ 5x + y - z + 3 = 0 \end{cases}$$

Ce système (S) équivaut à :

$$(S) \begin{cases} x = t \\ y = 1 - 6t \\ z = 3 - t \end{cases} \quad \text{c'est-à-dire} \quad (S) \begin{cases} x = t \\ y = 1 - 6t \\ z = 3 - t \\ 0t = -1 \end{cases}$$

Or, la quatrième équation n'a pas de solution donc le système (S) n'a pas de solution.

La droite (d) et le plan (P) n'ont pas de point commun, donc (d) est strictement parallèle à (P) .