

Relations de comparaison

Exercice 1 : Limites par équivalents usuels

À l'aide des équivalents usuels, calculez les limites suivantes.

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+3x)}{\sin(2x)}.$

2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - 1}{1 - \cos x}.$

3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(1 - \cos \frac{1}{x}\right).$

4. $\lim_{n \rightarrow +\infty} n(2^{1/n} - 1).$

5. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{\tan x}.$

Exercice 2 : Croissances comparées écrites avec o

1. Justifiez les relations suivantes :

1. $(\ln x)^3 = o(\sqrt{x})$ en $+\infty$;

2. $x^5 e^{-x} = o\left(\frac{1}{x^2}\right)$ en $+\infty$;

3. $\ln x = o\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$ en 0^+ ;

4. $e^{-1/x} = o(x^{10})$ en 0^+ .

2. On considère, pour $x > 1$, les fonctions $f_1(x) = x \ln x$, $f_2(x) = x^{3/2}$,
 $f_3(x) = x (\ln x)^5$, $f_4(x) = e^{\sqrt{x}}$ et $f_5(x) = \frac{x^2}{\ln x}$. Rangez-les de sorte que chacune
soit négligeable devant la suivante en $+\infty$, en justifiant chaque comparaison.

Exercice 3 : Équivalents de polynômes et de fractions rationnelles

1. Soit $f(x) = \frac{3x^4 - x + 2}{x^2 + 5x}$. Donnez un équivalent simple de f en $+\infty$, puis en 0 .
Déduisez-en les limites de f en $+\infty$, en 0^+ et en 0^- .
2. Soit $g(x) = x^3 - 2x^2 + x$. Donnez un équivalent simple de g en 0 , en $+\infty$, puis en 1 .
3. Soit $h(x) = \frac{x^2 - 1}{x^3 - 1}$. Pourquoi ne peut-on pas remplacer numérateur et dénominateur par leurs
termes de plus bas degré en 1 ? Calculez la limite de h en 1 .

Exercice 4 : Comparer des suites avec o et O

1. Justifiez les relations suivantes et dites, dans chaque cas, si l'on a aussi un o ou un équivalent :

1. $n^2 + 3n = O(n^2)$;

2. $(-1)^n n = O(n)$;

3. $n^2 \sin \frac{1}{n} \sim n$;

4. $\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

2. Rangez les suites suivantes de sorte que chacune soit négligeable devant la suivante : n^{10} , $1, 1^n$

$$, n!, (\ln n)^{100}, n^n, \sqrt{n} \ln n.$$

Exercice 5 : Vrai ou faux sur les règles de calcul

Les suites (u_n) , (v_n) , (w_n) et (t_n) sont strictement positives. Pour chaque affirmation, donnez une démonstration si elle est vraie et un contre-exemple si elle est fausse.

1. Si $u_n \sim v_n$, alors $u_n^2 \sim v_n^2$.
2. Si $u_n \sim v_n$ et $w_n \sim t_n$, alors $u_n + w_n \sim v_n + t_n$.
3. Si $u_n \sim v_n$, alors $e^{u_n} \sim e^{v_n}$.
4. Si $u_n \sim v_n$, alors $u_n - v_n \rightarrow 0$.
5. Si $u_n = o(v_n)$ et $v_n = O(w_n)$, alors $u_n = o(w_n)$.
6. Si $u_n = o(v_n)$, alors $u_n + v_n \sim v_n$.
7. Si $u_n - v_n \rightarrow 0$, alors $u_n \sim v_n$.

Exercice 6 : Différences, factoriser avant d'utiliser les équivalents

1. Un étudiant écrit : « $\sqrt{n+1} \sim \sqrt{n}$, donc $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} \sim 0$ ». Relevez les deux erreurs.
2. Montrez que $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} \sim \frac{1}{2\sqrt{n}}$.
3. Montrez que $\ln(n+1) - \ln n \sim \frac{1}{n}$.
4. Montrez que $e^{1/n} - e^{1/(n+1)} \sim \frac{1}{n^2}$.

5. Calculez $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x} - x)$.

Exercice 7 : Signe et limite par équivalents

1. Soit $f(x) = \frac{(1 - \cos x)(e^x - 1)}{\ln(1 + x^2)}$ pour $x \neq 0$ voisin de 0 . Trouvez un équivalent simple de f en 0 . Déduisez-en la limite de f en 0 et son signe au voisinage de 0 .

2. Calculez $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{\sqrt{1+x} - 1}$.

3. Soit $u_n = \frac{n^2 - 3n \ln n + 1}{n^3 - 100n^2}$ pour $n \geq 101$. Donnez un équivalent de u_n , sa limite, et montrez que $u_n > 0$ à partir d'un certain rang.

4. Soit $v_n = \ln\left(\cos \frac{1}{n}\right)$ pour $n \geq 1$. Donnez un équivalent de v_n et le signe de v_n . Calculez $\lim n^2 v_n$.

Exercice 8 : Domination et symbole O

1. Soit $f(x) = x(2 + \sin x)$ pour $x > 0$. Montrez qu'en $+\infty$, $f(x) = O(x)$ et $x = O(f(x))$, mais que $f(x)$ n'est pas équivalent à x .

2. Montrez que $\sin \frac{1}{x} = O(1)$ en 0 , mais que ce n'est pas un $o(1)$.

3. Montrez que si $f = O(g)$ en a et si $g \rightarrow 0$ en a , alors $f \rightarrow 0$ en a .

4. Montrez que si $u_n = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$, alors $n u_n \rightarrow 0$. Est-ce encore vrai si l'on suppose seulement $u_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$?

Exercice 9 : Équivalent de $\ln(n!)$ par encadrement

1. En utilisant la croissance de $\ln$, montrez que pour tout entier $k \geq 2$:

$$\int_{k-1}^k \ln t \, dt \leq \ln k \leq \int_k^{k+1} \ln t \, dt.$$

2. Déduisez-en que, pour $n \geq 2$, $n \ln n - n + 1 \leq \ln(n!) \leq (n+1) \ln(n+1) - n$.
3. Montrez que $\ln(n!) \sim n \ln n$, sans utiliser la formule de Stirling.
4. A-t-on $n! \sim n^n$? Commentez.

Exercice 10 : Sommes de puissances d'entiers

1. Soit $\alpha > 0$ et $S_n = \sum_{k=1}^n k^\alpha$. Montrez que

$$\frac{n^{\alpha+1}}{\alpha+1} \leq S_n \leq \frac{(n+1)^{\alpha+1}}{\alpha+1},$$

puis que $S_n \sim \frac{n^{\alpha+1}}{\alpha+1}$.

2. Vérifiez ce résultat pour $\alpha = 2$ à l'aide de la formule exacte de $\sum_{k=1}^n k^2$.

3. Soit $T_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}$. Montrez que $2\sqrt{n+1} - 2 \leq T_n \leq 2\sqrt{n} - 1$, puis que $T_n \sim 2\sqrt{n}$.

Exercice 11 : Logarithme d'un équivalent

1. Soient f et g strictement positives au voisinage de a , avec $f \sim g$ en a . On suppose que g tend vers $\ell \in [0, +\infty]$ avec $\ell \neq 1$. Montrez que $\ln f \sim \ln g$ en a .
2. Déduisez-en un équivalent simple de $\ln(n^2 + n + 1)$, de $\ln(\sin x)$ en 0^+ , et de $\ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ en $+\infty$.
3. Montrez par un contre-exemple que l'hypothèse $\ell \neq 1$ ne peut pas être supprimée.

Exercice 12 : Limites de puissances, les pièges de la composition

1. Calculez $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{1/x^2}$.
2. Calculez $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln(x+1)}{\ln x} \right)^{x \ln x}$.
3. On admet que $\sin u = u - \frac{u^3}{6} + o(u^3)$ en 0 . Calculez $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(n \sin \frac{1}{n} \right)^{n^2}$.
4. On admet que $\ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + o(u^2)$ en 0 . Montrez que $x^2 \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \sim x$ en $+\infty$, puis calculez la limite de $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x^2} e^{-x}$. A-t-on $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x^2} \sim e^x$?

Exercice 13 : Formule de Stirling et coefficients binomiaux

1. Montrez que $\frac{n^n}{n! e^n} \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi n}}$.
2. Montrez que $\binom{3n}{n} \sim \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{\pi n}} \left(\frac{27}{4}\right)^n$.
3. On lance $2n$ fois une pièce équilibrée. On note p_n la probabilité d'obtenir exactement n fois

pile. Exprimez p_n , donnez-en un équivalent et sa limite.

4. Montrez que $\sqrt{n} p_n$ a une limite finie non nulle. Que vaut-elle ?

Exercice 14 : Formule de Stirling et racine n-ième de n!

1. Montrez que $(n!)^{1/n} \sim \frac{n}{e}$. Expliquez pourquoi on ne peut pas se contenter d'élever la formule de Stirling à la puissance $\frac{1}{n}$ sans justification.
2. Déduisez-en $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{(2n)!}{n!} \right)^{1/n}$.
3. Comparez $n!$ et $n^{n/2}$ au sens de o .

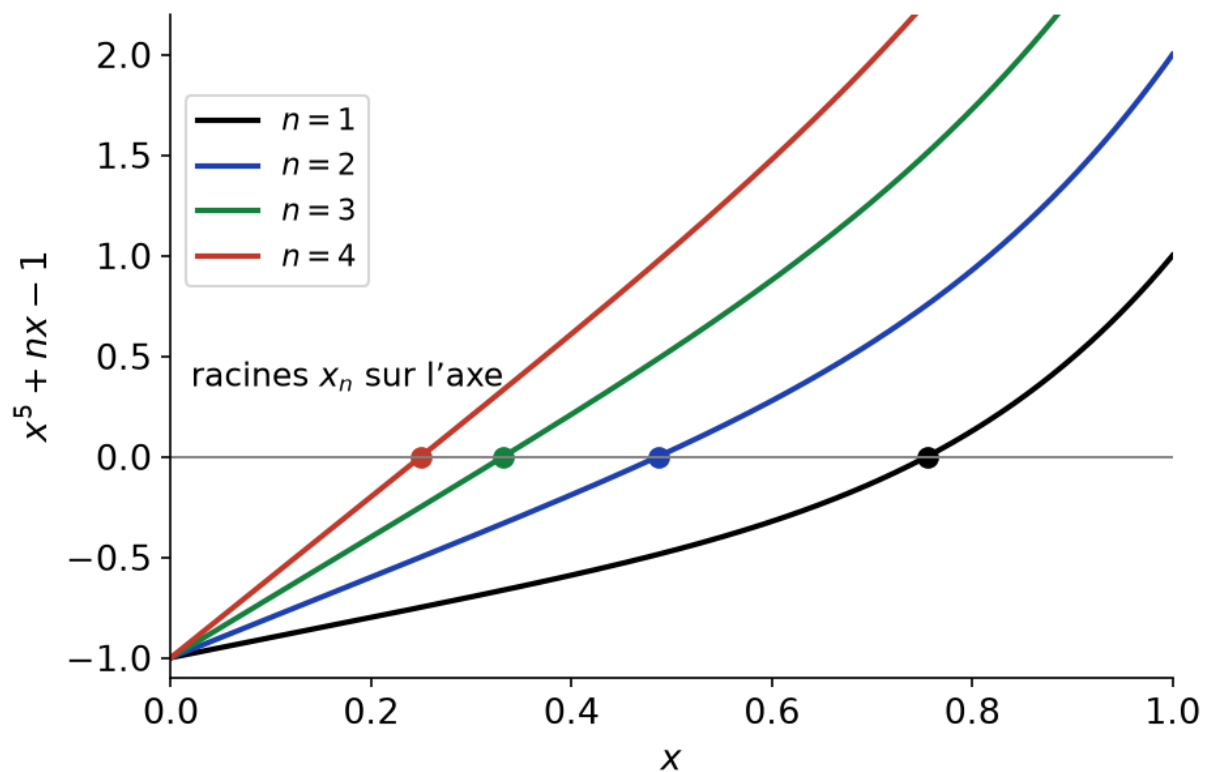
Exercice 15 : Une suite récurrente qui tend vers 0

Soit $u_0 \in]0, 1[$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n - u_n^2$.

1. Montrez que $u_n \in]0, 1[$ pour tout n , que (u_n) est décroissante et qu'elle tend vers 0.
2. Montrez que $\frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n} = \frac{1}{1 - u_n}$ pour tout n . Déduisez-en que $u_n < \frac{1}{n}$ pour tout $n \geq 1$.
3. À l'aide du lemme de Cesàro, montrez que $u_n \sim \frac{1}{n}$.

Exercice 16 : Racine d'une équation à paramètre

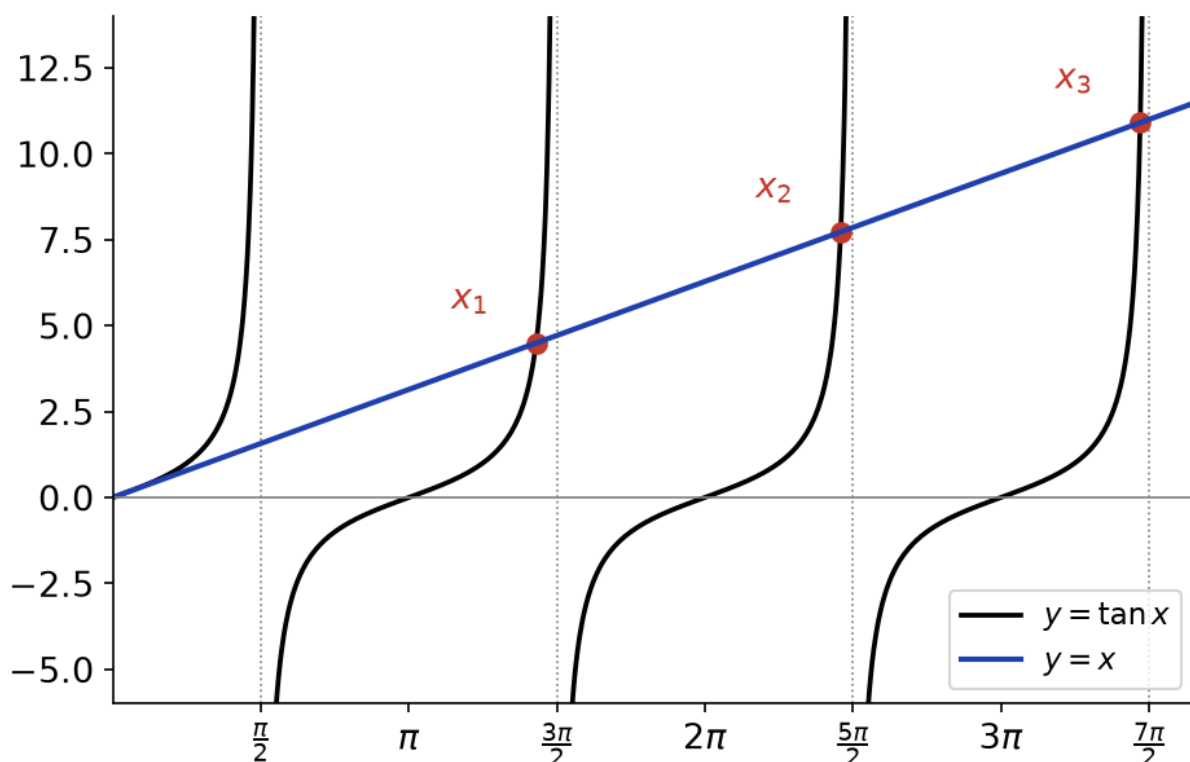
Pour $n \geq 1$, on pose $f_n(x) = x^5 + nx - 1$. La figure ci-dessous représente f_1 , f_2 , f_3 et f_4 sur $[0, 1]$.



1. Montrez que f_n admet une unique racine x_n dans $[0, +\infty[$, et que $0 < x_n < \frac{1}{n}$.
2. Montrez que $x_n \sim \frac{1}{n}$.
3. Montrez que $x_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^6} + o\left(\frac{1}{n^6}\right)$.
4. Poussez le développement d'un terme : montrez que $x_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^6} + \frac{5}{n^{11}} + o\left(\frac{1}{n^{11}}\right)$.

Exercice 17 : Les solutions de $\tan x = x$

La figure ci-dessous montre les intersections de la courbe de la tangente avec la droite $y = x$.

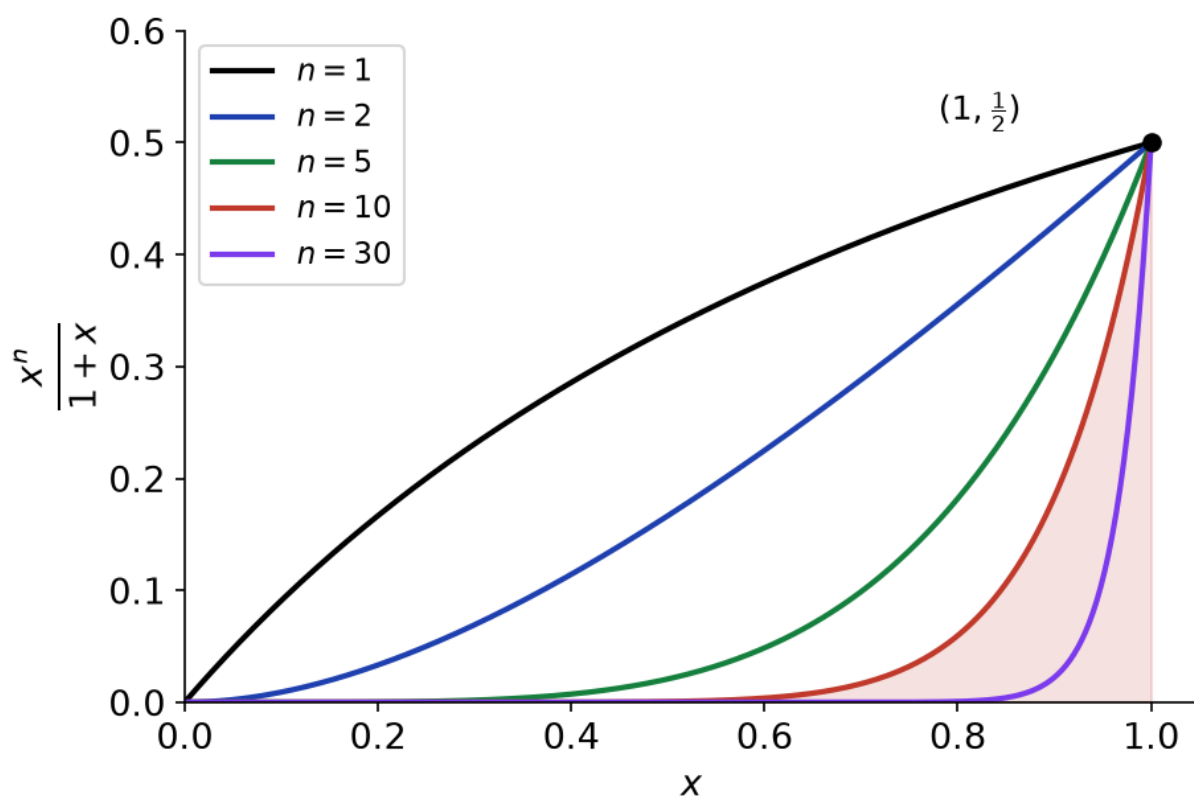


1. Soit $n \geq 1$. Montrez que l'équation $\tan x = x$ admet une unique solution x_n dans $\left]n\pi - \frac{\pi}{2}, n\pi + \frac{\pi}{2}\right[$, et que $x_n \in \left]n\pi, n\pi + \frac{\pi}{2}\right[$.
2. Montrez que $x_n \sim n\pi$.
3. Justifiez que $x_n = n\pi + \arctan(x_n)$, puis que $x_n = n\pi + \frac{\pi}{2} + o(1)$.
4. En utilisant $\arctan y + \arctan \frac{1}{y} = \frac{\pi}{2}$ pour $y > 0$, montrez que

$$x_n = n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n\pi} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Exercice 18 : Une suite d'intégrales

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx$. La figure ci-dessous montre les fonctions intégrées pour quelques valeurs de n .



1. Calculez I_0 . Montrez que (I_n) est positive, décroissante, que $I_n \leq \frac{1}{n+1}$, et que $I_n \rightarrow 0$.
2. Montrez que $I_n + I_{n+1} = \frac{1}{n+1}$ pour tout n .
3. Montrez que $\frac{1}{2(n+1)} \leq I_n \leq \frac{1}{2n}$ pour $n \geq 1$. Déduisez-en que $I_n \sim \frac{1}{2n}$.
4. Montrez que $I_n = \frac{1}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

Exercice 19 : Intégrales de Wallis et constante de Stirling

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $W_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n t \, dt$.

1. Calculez W_0 et W_1 . Montrez que $W_n > 0$ et que (W_n) est décroissante.
2. Par une intégration par parties, montrez que $(n+2)W_{n+2} = (n+1)W_n$.
3. Montrez que la suite $((n+1)W_{n+1}W_n)$ est constante égale à $\frac{\pi}{2}$.
4. Montrez que $W_{n+1} \sim W_n$, puis que $W_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.
5. Montrez que $W_{2p} = \frac{(2p)!}{4^p(p!)^2} \cdot \frac{\pi}{2}$. On admet qu'il existe $C > 0$ tel que $n! \sim C\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$.
Montrez que $C = \sqrt{2\pi}$.

Exercice 20 : Série harmonique et constante d'Euler

Pour $n \geq 1$, on pose $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$, $v_n = H_n - \ln n$ et $w_n = H_n - \ln(n+1)$. On rappelle que $\frac{x}{1+x} \leq \ln(1+x) \leq x$ pour tout $x > -1$.

1. Montrez que les suites (v_n) et (w_n) sont adjacentes. On note γ leur limite commune.
2. Déduisez-en que $H_n = \ln n + \gamma + o(1)$, et que $1 - \ln 2 \leq \gamma \leq 1$.
3. Montrez que $0 \leq H_n - \ln n - \gamma \leq \frac{1}{n}$, c'est-à-dire $H_n = \ln n + \gamma + O\left(\frac{1}{n}\right)$.
4. Calculez $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$.

Exercice 21 : Problème, itérées du sinus

Soit $u_0 \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sin(u_n)$. On admet que

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) \text{ en } 0.$$

1. Montrez que $u_n \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ pour tout n , que (u_n) est décroissante, et qu'elle converge vers 0.
2. Montrez que $\sin^2 x = x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^4)$ en 0, puis que $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2} \right) = \frac{1}{3}$.
3. Dédisez-en que $\frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_n^2} \rightarrow \frac{1}{3}$, puis que $u_n \sim \sqrt{\frac{3}{n}}$.
4. Montrez que $u_n = o\left(\frac{1}{n^{1/3}}\right)$, mais que $(n u_n)$ tend vers $+\infty$. Comparez ainsi (u_n) à $\left(\frac{1}{n}\right)$.

Le corrigé des exercices

Chaque exercice est corrigé en détail, question par question, sur la page suivante.



Pour aller plus loin en maths sup

- Le cours : [relations de comparaison, cours de maths sup](#)
- À maîtriser avant : [Limites et continuité des fonctions](#), [Suites particulières et suites récurrentes](#)
- Chapitre précédent : [Arithmétique des polynômes et fractions rationnelles](#)
- Chapitre suivant : [Développements limités et étude locale](#)

- Tester vos connaissances : [QCM de maths sup par chapitre](#)
- Le sommaire : [tous les chapitres de maths sup](#) et les [chapitres de maths spé](#)