

Relations de comparaison

Corrigé de l'exercice 1 : Limites par équivalents usuels

1. En 0 , par substitution dans les équivalents usuels, $\ln(1+3x) \sim 3x$ et $\sin(2x) \sim 2x$. Le quotient d'équivalents est permis, donc $\frac{\ln(1+3x)}{\sin(2x)} \sim \frac{3x}{2x} = \frac{3}{2}$. **La limite vaut $\frac{3}{2}$.**
2. Comme $x^2 \rightarrow 0$, on a $e^{x^2} - 1 \sim x^2$. De plus, $1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$. Ainsi, le quotient est équivalent à $\frac{x^2}{x^2/2} = 2$. **La limite vaut 2 .**
3. Posons $u = \frac{1}{x}$, qui tend vers 0 quand $x \rightarrow +\infty$. Par substitution, $1 - \cos \frac{1}{x} \sim \frac{1}{2x^2}$. Donc $x^2 \left(1 - \cos \frac{1}{x}\right) \sim \frac{1}{2}$. **La limite vaut $\frac{1}{2}$.**
4. On écrit $2^{1/n} - 1 = e^{(\ln 2)/n} - 1$. Or $\frac{\ln 2}{n} \rightarrow 0$, donc $e^{(\ln 2)/n} - 1 \sim \frac{\ln 2}{n}$. Par conséquent, $n(2^{1/n} - 1) \sim \ln 2$. **La limite vaut $\ln 2$.**
5. Avec $\alpha = \frac{1}{2}$, on a $\sqrt{1+x} - 1 = (1+x)^{1/2} - 1 \sim \frac{x}{2}$. De plus, $\tan x \sim x$. Le quotient est donc équivalent à $\frac{x/2}{x}$. **La limite vaut $\frac{1}{2}$.**

Point de méthode : chaque expression est un produit ou un quotient ; on remplace chaque facteur par son équivalent, jamais un morceau d'une somme.

Corrigé de l'exercice 2 : Croissances comparées écrites avec o

1. On forme à chaque fois le quotient.

$$1. \frac{(\ln x)^3}{\sqrt{x}} = \frac{(\ln x)^3}{x^{1/2}} \rightarrow 0 \text{ par croissances comparées, avec } \beta = 3 \text{ et } \alpha = \frac{1}{2}. \text{ Donc } (\ln x)^3 = o(\sqrt{x}).$$

$$2. \frac{x^5 e^{-x}}{1/x^2} = \frac{x^7}{e^x} \rightarrow 0 \text{ en } +\infty. \text{ Donc } x^5 e^{-x} = o(1/x^2).$$

$$3. \frac{\ln x}{1/\sqrt{x}} = \sqrt{x} \ln x \rightarrow 0 \text{ en } 0^+. \text{ Donc } \ln x = o(1/\sqrt{x}).$$

$$4. \text{ Posons } t = \frac{1}{x}, \text{ qui tend vers } +\infty \text{ quand } x \rightarrow 0^+. \text{ Alors } \frac{e^{-1/x}}{x^{10}} = \frac{t^{10}}{e^t} \rightarrow 0. \\ \text{Donc } e^{-1/x} = o(x^{10}) \text{ en } 0^+.$$

2. Comparons les fonctions deux à deux, par quotients successifs.

$$\circ \frac{f_1}{f_3} = \frac{1}{(\ln x)^4} \rightarrow 0, \text{ donc } f_1 = o(f_3).$$

$$\circ \frac{f_3}{f_2} = \frac{(\ln x)^5}{x^{1/2}} \rightarrow 0, \text{ donc } f_3 = o(f_2).$$

$$\circ \frac{f_2}{f_5} = \frac{\ln x}{x^{1/2}} \rightarrow 0, \text{ donc } f_2 = o(f_5).$$

$$\circ \text{ Enfin, } \frac{f_5}{f_4} = \frac{x^2}{e^{\sqrt{x}} \ln x}. \text{ Avec } t = \sqrt{x}, \text{ on a } \frac{x^2}{e^{\sqrt{x}}} = \frac{t^4}{e^t} \rightarrow 0, \text{ et } \frac{1}{\ln x} \rightarrow 0. \text{ Donc } f_5 = o(f_4).$$

Le classement est f_1, f_3, f_2, f_5, f_4 , soit

$$x \ln x \ll x(\ln x)^5 \ll x^{3/2} \ll \frac{x^2}{\ln x} \ll e^{\sqrt{x}}.$$

Corrigé de l'exercice 3 : Équivalents de polynômes et de fractions rationnelles

1. En $+\infty$, le numérateur est équivalent à $3x^4$ et le dénominateur à x^2 . Par quotient,

$f(x) \sim 3x^2$. En 0 , le numérateur tend vers 2 , donc il est équivalent à 2 , et le dénominateur est équivalent à $5x$. Ainsi $f(x) \sim \frac{2}{5x}$ en 0 . Par conservation de la limite : $f \rightarrow +\infty$ en $+\infty$, $f \rightarrow +\infty$ en 0^+ et $f \rightarrow -\infty$ en 0^- .

2. En 0 , le monôme non nul de plus bas degré est x , donc $g(x) \sim x$. En $+\infty$, $g(x) \sim x^3$. En 1 , la règle des monômes ne s'applique pas. On factorise : $g(x) = x(x^2 - 2x + 1) = x(x-1)^2$. Comme $x \rightarrow 1$, on obtient $g(x) \sim (x-1)^2$ en 1 .
3. La règle du monôme de plus bas degré ne vaut qu'en 0 ; en 1 , numérateur et dénominateur tendent tous deux vers 0 , et il faut les factoriser par $x - 1$. On a $x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$ et $x^3 - 1 = (x-1)(x^2 + x + 1)$. Donc, pour $x \neq 1$, $h(x) = \frac{x+1}{x^2 + x + 1}$. Par continuité, $h(x) \rightarrow \frac{2}{3}$ en 1 .

Corrigé de l'exercice 4 : Comparer des suites avec o et O

1. On étudie chaque fois le quotient.

- $\frac{n^2 + 3n}{n^2} = 1 + \frac{3}{n} \rightarrow 1$. Le quotient est borné, donc c'est un O . **C'est même un équivalent : $n^2 + 3n \sim n^2$, mais pas un o .**
- $\frac{(-1)^n n}{(-1)^n n} = (-1)^n$ est borné. En revanche, cette suite n'a pas de limite. **On a $(-1)^n n = O(n)$, sans o ni équivalent.**
- $\frac{n^2 \sin(1/n)}{n} = \frac{\sin(1/n)}{1/n} \rightarrow 1$, car $\sin u \sim u$ en 0 . **Donc $n^2 \sin \frac{1}{n} \sim n$.**
- $\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = -\frac{1}{n(n+1)}$, et son quotient par $\frac{1}{n^2}$ vaut $-\frac{n}{n+1} \rightarrow -1$. **C'est un $O(1/n^2)$, et même $-\frac{1}{n^2}$ en équivalent.**

2. On compare les suites voisines. D'abord, $\frac{(\ln n)^{100}}{\sqrt{n} \ln n} = \frac{(\ln n)^{99}}{n^{1/2}} \rightarrow 0$. Ensuite, $\frac{\sqrt{n} \ln n}{n^{10}} = \frac{\ln n}{n^{19/2}} \rightarrow 0$. Puis $n^{10} = o(1,1^n)$, car $1,1 > 1$. Enfin, $1,1^n = o(n!)$ et $n! = o(n^n)$ d'après le cours. **L'ordre est $(\ln n)^{100}$, $\sqrt{n} \ln n$, n^{10} , $1,1^n$, $n!$, n^n .**

Corrigé de l'exercice 5 : Vrai ou faux sur les règles de calcul

1. **Vrai.** En effet, $\frac{u_n^2}{v_n^2} = \left(\frac{u_n}{v_n}\right)^2 \rightarrow 1^2 = 1$. La puissance est fixe, donc la règle s'applique.
2. **Vrai, grâce à la positivité.** Posons $a_n = \frac{u_n}{v_n}$ et $b_n = \frac{w_n}{t_n}$, qui tendent vers 1. Alors $\frac{u_n + w_n}{v_n + t_n} = \frac{a_n v_n + b_n t_n}{v_n + t_n}$ est une moyenne pondérée de a_n et b_n , à poids positifs. Elle est donc comprise entre $\min(a_n, b_n)$ et $\max(a_n, b_n)$, qui tendent vers 1. Par encadrement, le quotient tend vers 1. Attention : sans hypothèse de signe, c'est faux, comme le montre l'exemple du cours avec $n^2 + n$ et $-n^2$.
3. **Faux.** Prenons $u_n = n + 1$ et $v_n = n$. Alors $u_n \sim v_n$, mais $\frac{e^{u_n}}{e^{v_n}} = e \neq 1$.
4. **Faux.** Avec $u_n = n^2 + n$ et $v_n = n^2$, on a $u_n \sim v_n$, mais $u_n - v_n = n \rightarrow +\infty$.
5. **Vrai.** C'est la transitivité : $\frac{u_n}{w_n} = \frac{u_n}{v_n} \cdot \frac{v_n}{w_n}$, produit d'une suite qui tend vers 0 et d'une suite bornée. Il tend donc vers 0.
6. **Vrai.** En effet, $\frac{u_n + v_n}{v_n} = 1 + \frac{u_n}{v_n} \rightarrow 1$.
7. **Faux.** Avec $u_n = \frac{1}{n}$ et $v_n = \frac{1}{n^2}$, on a $u_n - v_n \rightarrow 0$, mais $\frac{u_n}{v_n} = n \rightarrow +\infty$.

Point de méthode : pour réfuter une règle, on cherche un contre-exemple parmi les suites les plus simples : n , $n+1$, n^2 , $\frac{1}{n}$.

Corrigé de l'exercice 6 : Différences, factoriser avant d'utiliser les équivalents

1. La première erreur consiste à soustraire deux équivalents, ce qui est interdit. La seconde consiste à écrire « ~ 0 », ce qui signifierait que la différence est nulle à partir d'un certain rang. **Or** $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} > 0$ **pour tout** n , **donc la conclusion est fausse.**
2. On multiplie par la quantité conjuguée : $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$. Ensuite, $\sqrt{n+1} + \sqrt{n} = \sqrt{n}\left(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1\right) \sim 2\sqrt{n}$. Par quotient, $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} \sim \frac{1}{2\sqrt{n}}$.
3. On factorise dans le logarithme : $\ln(n+1) - \ln n = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$. Or $\frac{1}{n} \rightarrow 0$, donc $\ln(n+1) - \ln n \sim \frac{1}{n}$.
4. On factorise par $e^{1/(n+1)}$: $e^{1/n} - e^{1/(n+1)} = e^{1/(n+1)}(e^{\delta_n} - 1)$, avec $\delta_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)}$. D'abord, $e^{1/(n+1)} \rightarrow 1$. Ensuite, $\delta_n \rightarrow 0$, donc $e^{\delta_n} - 1 \sim \delta_n \sim \frac{1}{n^2}$. Par produit, $e^{1/n} - e^{1/(n+1)} \sim \frac{1}{n^2}$.
5. Pour $x > 0$, $\sqrt{x^2 + x} - x = x\left(\sqrt{1 + \frac{1}{x}} - 1\right)$. Par substitution, $\sqrt{1 + \frac{1}{x}} - 1 \sim \frac{1}{2x}$. Donc l'expression est équivalente à $x \cdot \frac{1}{2x} = \frac{1}{2}$. **La limite vaut** $\frac{1}{2}$.

Point de méthode : devant une différence, on la transforme en produit (quantité conjuguée, factorisation, propriétés de $\ln$ et $\exp$) avant d'utiliser les équivalents.

Corrigé de l'exercice 7 : Signe et limite par équivalents

1. En 0 , $1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$, $e^x - 1 \sim x$ et $\ln(1 + x^2) \sim x^2$. Par produit et quotient, $f(x) \sim \frac{(x^2/2) \cdot x}{x^2} = \frac{x}{2}$. Par conservation de la limite, $f(x) \rightarrow 0$. Par conservation du signe, f a le signe de $\frac{x}{2}$ au voisinage de 0 . **Ainsi** $f(x) \sim \frac{x}{2}$, $f \rightarrow 0$, $f > 0$ **à droite de** 0 **et** $f < 0$ **à gauche.**
2. On a $e^{2x} - 1 \sim 2x$ et $\sqrt{1+x} - 1 \sim \frac{x}{2}$. Donc le quotient est équivalent à $\frac{2x}{x/2} = 4$. **La limite vaut** 4 .
3. Au numérateur, $3n \ln n = o(n^2)$ et $1 = o(n^2)$, donc $n^2 - 3n \ln n + 1 = n^2 + o(n^2) \sim n^2$. Au dénominateur, $n^3 - 100n^2 \sim n^3$. Par quotient, $u_n \sim \frac{1}{n}$. **Donc** $u_n \rightarrow 0$ **et, par conservation du signe,** $u_n > 0$ **à partir**

d'un certain rang.

4. On écrit $v_n = \ln(1 + h_n)$ avec $h_n = \cos \frac{1}{n} - 1$. Comme $h_n \rightarrow 0$, on a $\ln(1 + h_n) \sim h_n$. Or $h_n \sim -\frac{1}{2n^2}$. Donc $v_n \sim -\frac{1}{2n^2}$, et $v_n < 0$ à partir d'un certain rang, avec $n^2 v_n \rightarrow -\frac{1}{2}$. En réalité, $0 < \cos \frac{1}{n} < 1$ pour tout $n \geq 1$, donc $v_n < 0$ pour tout $n \geq 1$.

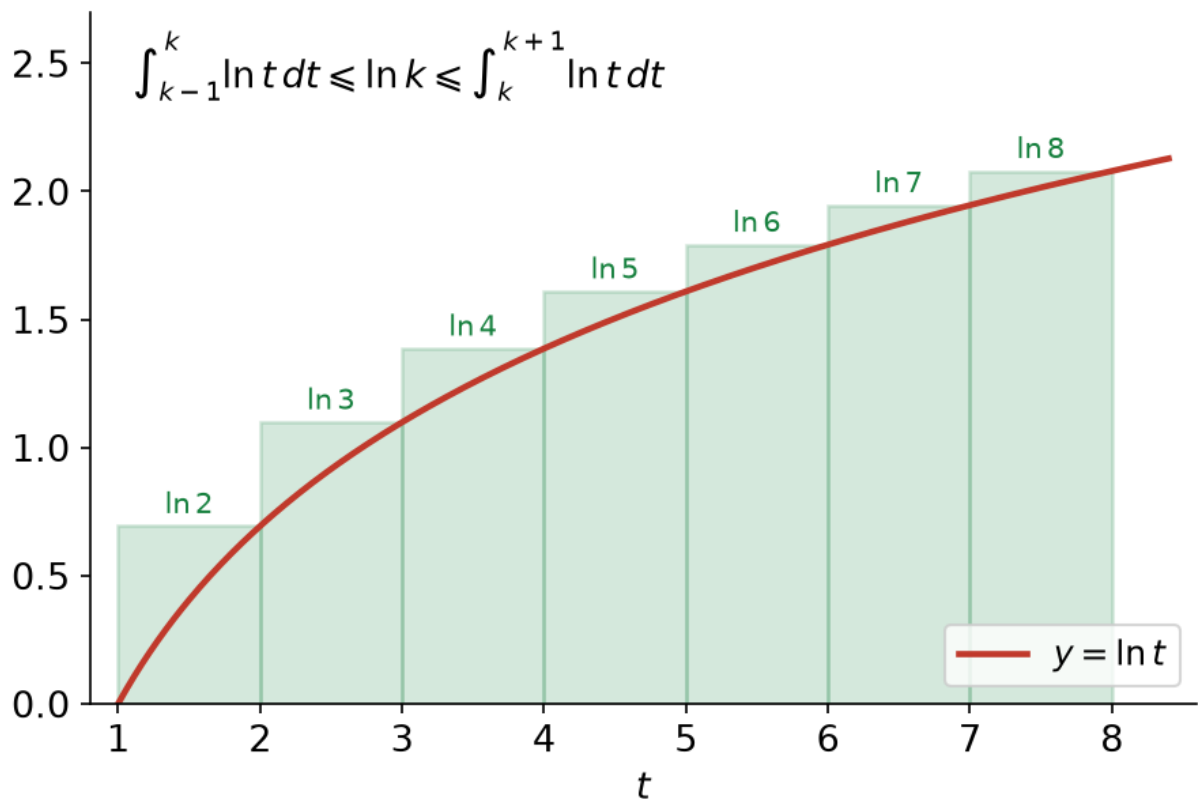
Corrigé de l'exercice 8 : Domination et symbole O

1. Pour $x > 0$, $\frac{f(x)}{x} = 2 + \sin x \in [1, 3]$. Ce quotient est borné, donc $f(x) = O(x)$. De plus, $\frac{x}{f(x)} = \frac{1}{2 + \sin x} \in \left[\frac{1}{3}, 1\right]$, donc $x = O(f(x))$. Cependant, $2 + \sin x$ n'a pas de limite en $+\infty$: il vaut 3 aux points $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ et 1 aux points $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi$. **Donc f et x se dominant mutuellement sans être équivalentes.**
2. Pour tout $x \neq 0$, $\left|\sin \frac{1}{x}\right| \leq 1$, donc $\sin \frac{1}{x} = O(1)$. En revanche, posons $x_k = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}$. Alors $x_k \rightarrow 0$ et $\sin \frac{1}{x_k} = 1$ pour tout k . **La fonction ne tend donc pas vers 0 : ce n'est pas un $o(1)$.**
3. Par hypothèse, il existe $M > 0$ et un voisinage de a sur lequel $|f| \leq M|g|$. Or $M|g| \rightarrow 0$. **Par encadrement, $f \rightarrow 0$ en a .**
4. Il existe M tel que $|u_n| \leq \frac{M}{n^2}$ à partir d'un certain rang. Donc $|n u_n| \leq \frac{M}{n} \rightarrow 0$. Ainsi $n u_n \rightarrow 0$. En revanche, l'hypothèse $u_n = O(1/n)$ ne suffit pas : avec $u_n = \frac{1}{n}$, on a $n u_n = 1$ pour tout n .

Corrigé de l'exercice 9 : Équivalent de $\ln(n!)$ par encadrement

1. Soit $k \geq 2$. Pour $t \in [k-1, k]$, la croissance de $\ln$ donne $\ln t \leq \ln k$. En intégrant sur

un intervalle de longueur 1, on obtient $\int_{k-1}^k \ln t \, dt \leq \ln k$. De même, pour $t \in [k, k+1]$, $\ln k \leq \ln t$, d'où $\ln k \leq \int_k^{k+1} \ln t \, dt$. **L'encadrement est démontré.** La figure ci-dessous montre les rectangles de hauteur $\ln k$ posés sur $[k-1, k]$, au-dessus de la courbe.



2. On somme pour k de 2 à n , en remarquant que $\ln(n!) = \sum_{k=2}^n \ln k$. À gauche, la relation

de Chasles donne $\int_1^n \ln t \, dt = [t \ln t - t]_1^n = n \ln n - n + 1$. À droite, on obtient

$\int_2^{n+1} \ln t \, dt$, qui est inférieur à $\int_1^{n+1} \ln t \, dt$ car $\ln \geq 0$ sur $[1, 2]$. Or

$\int_1^{n+1} \ln t \, dt = (n+1) \ln(n+1) - (n+1) + 1$. **Donc**
 $n \ln n - n + 1 \leq \ln(n!) \leq (n+1) \ln(n+1) - n$.

3. Divisons par $n \ln n > 0$. La borne inférieure devient $1 - \frac{1}{\ln n} + \frac{1}{n \ln n} \rightarrow 1$. Pour la borne supérieure, $\frac{(n+1) \ln(n+1)}{n \ln n} = \frac{n+1}{n} \cdot \frac{\ln(n+1)}{\ln n}$. Or $\ln(n+1) = \ln n + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$, donc $\frac{\ln(n+1)}{\ln n} \rightarrow 1$. De plus, $\frac{n}{n \ln n} \rightarrow 0$. La borne supérieure divisée par $n \ln n$ tend donc aussi vers 1. **Par encadrement, $\ln(n!) \sim n \ln n$.**

4. Non. En effet, $\frac{n!}{n^n} \leq \frac{1}{n} \rightarrow 0$, donc $n! = o(n^n)$. Pourtant, $\ln(n^n) = n \ln n \sim \ln(n!)$.

Des logarithmes équivalents ne donnent pas des suites équivalentes : on ne compose pas un équivalent par l'exponentielle.

Corrigé de l'exercice 10 : Sommes de puissances d'entiers

1. La fonction $t \rightarrow t^\alpha$ est croissante sur $[0, +\infty[$ car $\alpha > 0$. Pour $k \geq 1$, on a donc

$$\int_{k-1}^k t^\alpha dt \leq k^\alpha \leq \int_k^{k+1} t^\alpha dt. \text{ En sommant de } k = 1 \text{ à } n, \text{ on trouve}$$

$$\int_0^n t^\alpha dt \leq S_n \leq \int_1^{n+1} t^\alpha dt \leq \int_0^{n+1} t^\alpha dt.$$

Ces intégrales valent $\frac{n^{\alpha+1}}{\alpha+1}$ et $\frac{(n+1)^{\alpha+1}}{\alpha+1}$. Ensuite, $(n+1)^{\alpha+1} \sim n^{\alpha+1}$, car

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\alpha+1} \rightarrow 1. \text{ Par encadrement, } S_n \sim \frac{n^{\alpha+1}}{\alpha+1}.$$

2. Pour $\alpha = 2$, on sait que $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. Par produit d'équivalents, cette somme est équivalente à $\frac{n \cdot n \cdot 2n}{6} = \frac{n^3}{3}$. **C'est bien $\frac{n^{\alpha+1}}{\alpha+1}$ pour $\alpha = 2$.**

3. Cette fois, $t \rightarrow \frac{1}{\sqrt{t}}$ est décroissante sur $]0, +\infty[$. Pour $k \geq 1$, $\frac{1}{\sqrt{k}} \geq \int_k^{k+1} \frac{dt}{\sqrt{t}}$, et la

$$\text{somme donne } T_n \geq \int_1^{n+1} \frac{dt}{\sqrt{t}} = 2\sqrt{n+1} - 2. \text{ Pour } k \geq 2, \frac{1}{\sqrt{k}} \leq \int_{k-1}^k \frac{dt}{\sqrt{t}}. \text{ En isolant le}$$

terme $k = 1$, on obtient $T_n \leq 1 + \int_1^n \frac{dt}{\sqrt{t}} = 2\sqrt{n} - 1$. Enfin, les deux bornes divisées par $2\sqrt{n}$ tendent vers 1. **Donc** $T_n \sim 2\sqrt{n}$.

Corrigé de l'exercice 11 : Logarithme d'un équivalent

1. Au voisinage de a , on écrit $\ln f = \ln g + \ln \frac{f}{g}$. Comme $\frac{f}{g} \rightarrow 1$, on a $\ln \frac{f}{g} \rightarrow 0$ par continuité de $\ln$ en 1. Ensuite, $\ln g$ tend vers $\ln \ell$ si $\ell \in]0, +\infty[$, vers $-\infty$ si $\ell = 0$ et vers $+\infty$ si $\ell = +\infty$. Dans tous les cas, cette limite est non nulle car $\ell \neq 1$. Donc $\ln g$ ne s'annule pas au voisinage de a , et

$$\frac{\ln f}{\ln g} = 1 + \frac{\ln(f/g)}{\ln g} \rightarrow 1 + 0 = 1.$$

Ainsi $\ln f \sim \ln g$.

2. D'abord, $n^2 + n + 1 \sim n^2 \rightarrow +\infty$, donc $\ln(n^2 + n + 1) \sim \ln(n^2) = 2\ln n$. Ensuite, $\sin x \sim x \rightarrow 0$ en 0^+ , donc $\ln(\sin x) \sim \ln x$. Enfin,

$$x + \sqrt{x^2 + 1} = x \left(1 + \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} \right) \sim 2x \rightarrow +\infty. \text{ Donc}$$

$$\ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) \sim \ln(2x) = \ln 2 + \ln x \sim \ln x. \text{ Les équivalents sont } 2\ln n, \ln x \text{ et } \ln x.$$

3. Prenons $f_n = 1 + \frac{1}{n}$ et $g_n = 1 + \frac{2}{n}$, qui tendent vers 1. Leur quotient tend vers 1, donc $f_n \sim g_n$. Pourtant, $\ln f_n \sim \frac{1}{n}$ et $\ln g_n \sim \frac{2}{n}$. **Le quotient** $\frac{\ln f_n}{\ln g_n}$ **tend vers** $\frac{1}{2}$, **et non vers** 1.

Corrigé de l'exercice 12 : Limites de puissances, les pièges de la composition

1. Au voisinage de 0, $\cos x > 0$ et $(\cos x)^{1/x^2} = \exp\left(\frac{\ln(\cos x)}{x^2}\right)$. Posons $h = \cos x - 1 \rightarrow 0$. Alors $\ln(\cos x) = \ln(1 + h) \sim h \sim -\frac{x^2}{2}$. L'exposant est donc équivalent à $-\frac{1}{2}$, et il tend vers $-\frac{1}{2}$. **Par continuité de $\exp$, la limite vaut $e^{-1/2}$.**
2. Pour $x > 1$, posons $q(x) = \frac{\ln(x+1)}{\ln x} = 1 + u(x)$, avec $u(x) = \frac{\ln(1 + \frac{1}{x})}{\ln x}$. On a $u(x) \sim \frac{1}{x \ln x} \rightarrow 0$. Donc $\ln q(x) = \ln(1 + u(x)) \sim u(x) \sim \frac{1}{x \ln x}$. L'exposant $x \ln x \cdot \ln q(x)$ tend ainsi vers 1. **La limite vaut e .**
3. D'après le développement admis, $n \sin \frac{1}{n} = n \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{6n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) \right) = 1 - \frac{1}{6n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Posons $k_n = n \sin \frac{1}{n} - 1$, qui est équivalent à $-\frac{1}{6n^2}$ et tend vers 0. Alors $n^2 \ln\left(n \sin \frac{1}{n}\right) = n^2 \ln(1 + k_n) \sim n^2 k_n \sim -\frac{1}{6}$. **La limite vaut $e^{-1/6}$.**
4. Avec $u = \frac{1}{x}$, on obtient $x^2 \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = x^2 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) \right) = x - \frac{1}{2} + o(1)$. Cette quantité est bien équivalente à x . Cependant, $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x^2} e^{-x} = \exp\left(-\frac{1}{2} + o(1)\right) \rightarrow e^{-1/2}$. **La limite vaut $e^{-1/2} \neq 1$: on n'a donc pas $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x^2} \sim e^x$.** C'est l'exemple type d'une composition interdite par $\exp$.

Point de méthode : pour composer par l'exponentielle, il faut connaître l'exposant à $o(1)$ près, et non seulement à un équivalent près.

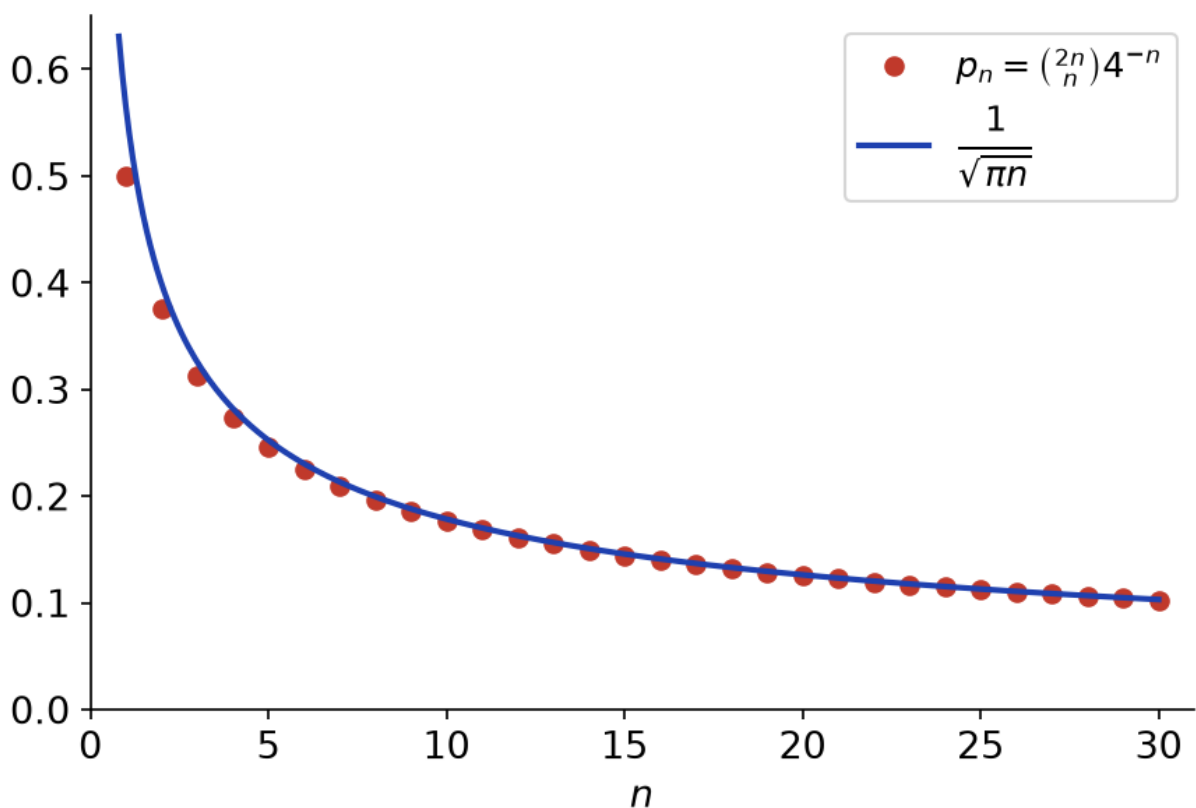
Corrigé de l'exercice 13 : Formule de Stirling et coefficients binomiaux

1. D'après la formule de Stirling, $n! \sim \sqrt{2\pi n} \frac{n^n}{e^n}$, donc $\frac{n! e^n}{n^n} \sim \sqrt{2\pi n}$. En passant à l'inverse, ce qui est permis, $\frac{n^n}{n! e^n} \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi n}}$.
2. On a $\binom{3n}{n} = \frac{(3n)!}{n! (2n)!}$. La formule de Stirling donne

$$(3n)! \sim \sqrt{6\pi n} \frac{(3n)^{3n}}{e^{3n}}, \quad n! \sim \sqrt{2\pi n} \frac{n^n}{e^n}, \quad (2n)! \sim \sqrt{4\pi n} \frac{(2n)^{2n}}{e^{2n}}.$$

Les puissances de e se simplifient, ainsi que n^{3n} . Il reste $\frac{3^{3n}}{2^{2n}} = \left(\frac{27}{4}\right)^n$ et le facteur $\frac{\sqrt{6\pi n}}{\sqrt{2\pi n}\sqrt{4\pi n}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4\pi n}} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{\pi n}}$. **Donc** $\binom{3n}{n} \sim \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{\pi n}} \left(\frac{27}{4}\right)^n$.

3. Les 4^n suites de résultats sont équiprobables, et $\binom{2n}{n}$ d'entre elles comportent exactement n piles. Donc $p_n = \frac{\binom{2n}{n}}{4^n}$. D'après le cours, $\binom{2n}{n} \sim \frac{4^n}{\sqrt{\pi n}}$. **Ainsi** $p_n \sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$, et $p_n \rightarrow 0$. La figure ci-dessous compare p_n à cet équivalent.



4. Par produit, $\sqrt{n} p_n \sim \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{\pi n}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$. **La limite vaut** $\frac{1}{\sqrt{\pi}} \approx 0,564$. Autrement dit, l'égalité parfaite entre piles et faces devient rare, mais seulement comme $1/\sqrt{n}$.

Corrigé de l'exercice 14 : Formule de Stirling et racine n-ième

de $n!$

1. La règle $f^\alpha \sim g^\alpha$ suppose un exposant α **fixe**. Ici, l'exposant $\frac{1}{n}$ dépend de n , et une telle règle est fautive en général : $1 + \frac{1}{n} \sim 1$, mais $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \rightarrow e$. Il faut donc un argument.

Écrivons $n! = \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n (1 + \varepsilon_n)$, avec $\varepsilon_n \rightarrow 0$. Alors

$$(n!)^{1/n} = \frac{n}{e} \exp\left(\frac{\ln(2\pi n)}{2n}\right) \exp\left(\frac{\ln(1 + \varepsilon_n)}{n}\right).$$

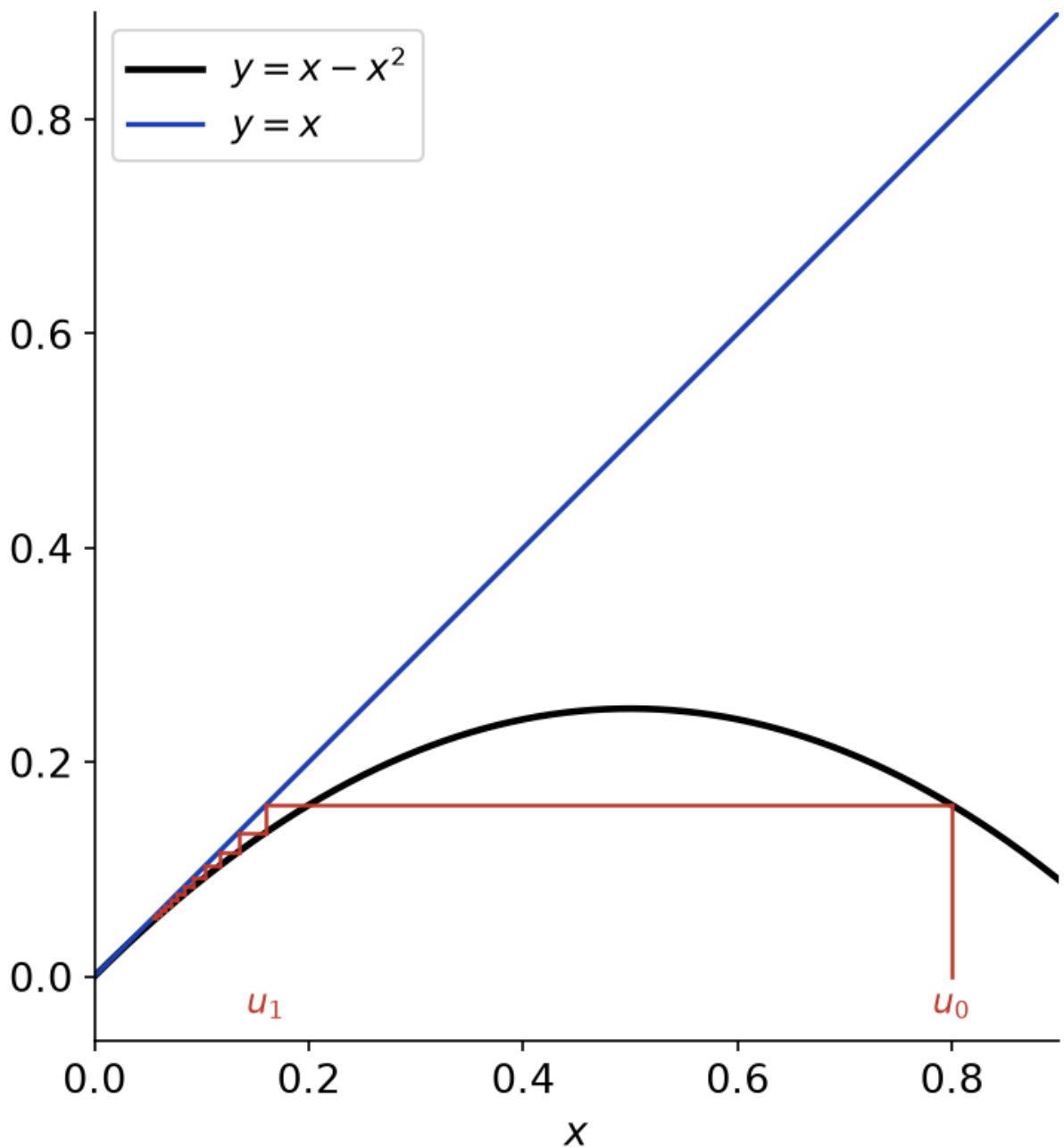
Par croissances comparées, $\frac{\ln(2\pi n)}{2n} \rightarrow 0$. De plus, $\ln(1 + \varepsilon_n) \rightarrow 0$, donc le second exposant tend vers 0. **Les deux exponentielles tendent vers 1, d'où $(n!)^{1/n} \sim \frac{n}{e}$.**

2. D'abord, $((2n)!)^{1/n} = \left((2n)!\right)^{1/(2n)}^2$. La question précédente, appliquée au rang $2n$, donne $((2n)!)^{1/(2n)} \sim \frac{2n}{e}$. En élevant au carré, $((2n)!)^{1/n} \sim \frac{4n^2}{e^2}$. Ensuite, par quotient, $\frac{((2n)!)^{1/n}}{(n!)^{1/n}} \sim \frac{4n^2/e^2}{n/e} = \frac{4n}{e}$. **La limite demandée vaut $\frac{4}{e}$.**

3. On compare les logarithmes. D'après le cours, $\ln(n!) = n \ln n - n + \frac{1}{2} \ln(2\pi n) + o(1)$. Donc $\ln(n!) - \frac{n}{2} \ln n = \frac{n}{2} \ln n - n + \frac{1}{2} \ln(2\pi n) + o(1)$. Or $n = o(n \ln n)$, donc cette différence est équivalente à $\frac{n}{2} \ln n$ et tend vers $+\infty$. Par conséquent, $\frac{n^{n/2}}{n!} = \exp\left(\frac{n}{2} \ln n - \ln(n!)\right) \rightarrow 0$. **Ainsi $n^{n/2} = o(n!)$.**

Corrigé de l'exercice 15 : Une suite récurrente qui tend vers 0

1. Posons $\varphi(x) = x - x^2 = x(1 - x)$. Pour $x \in]0, 1[$, les deux facteurs sont strictement positifs, et $\varphi(x) \leq \frac{1}{4}$, maximum atteint en $\frac{1}{2}$. Donc φ envoie $]0, 1[$ dans $]0, \frac{1}{4}] \subset]0, 1[$. Par récurrence, $u_n \in]0, 1[$ pour tout n . Ensuite, $u_{n+1} - u_n = -u_n^2 < 0$: la suite est décroissante. Elle est minorée par 0, donc elle converge vers un réel $\ell \in [0, 1]$. Par continuité de φ , $\ell = \ell - \ell^2$, donc $\ell^2 = 0$. **Ainsi $u_n \rightarrow 0$.** La figure ci-dessous montre l'escalier construit sur la parabole, qui se rapproche de l'origine.



2. Comme $u_n \neq 0$ et $1 - u_n \neq 0$, on calcule

$$\frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n} = \frac{1}{u_n(1 - u_n)} - \frac{1}{u_n} = \frac{1 - (1 - u_n)}{u_n(1 - u_n)} = \frac{1}{1 - u_n}.$$

Comme $0 < 1 - u_n < 1$, ce terme est strictement supérieur à 1. En sommant de 0 à $n - 1$, on obtient $\frac{1}{u_n} > \frac{1}{u_0} + n > n$. **Donc** $u_n < \frac{1}{n}$ **pour tout** $n \geq 1$.

3. Posons $a_n = \frac{1}{u_n}$. D'après la question 2, $a_{n+1} - a_n = \frac{1}{1 - u_n} \rightarrow 1$, car $u_n \rightarrow 0$. Le lemme de Cesàro donne $\frac{a_n}{n} \rightarrow 1$, c'est-à-dire $\frac{1}{n u_n} \rightarrow 1$. **Par passage à l'inverse,**

$$u_n \sim \frac{1}{n}.$$

Point de méthode : pour $u_{n+1} = u_n - a u_n^p + \dots$, on cherche un exposant β tel que $u_{n+1}^{-\beta} - u_n^{-\beta}$ ait une limite non nulle ; ici $p = 2$ et $\beta = 1$.

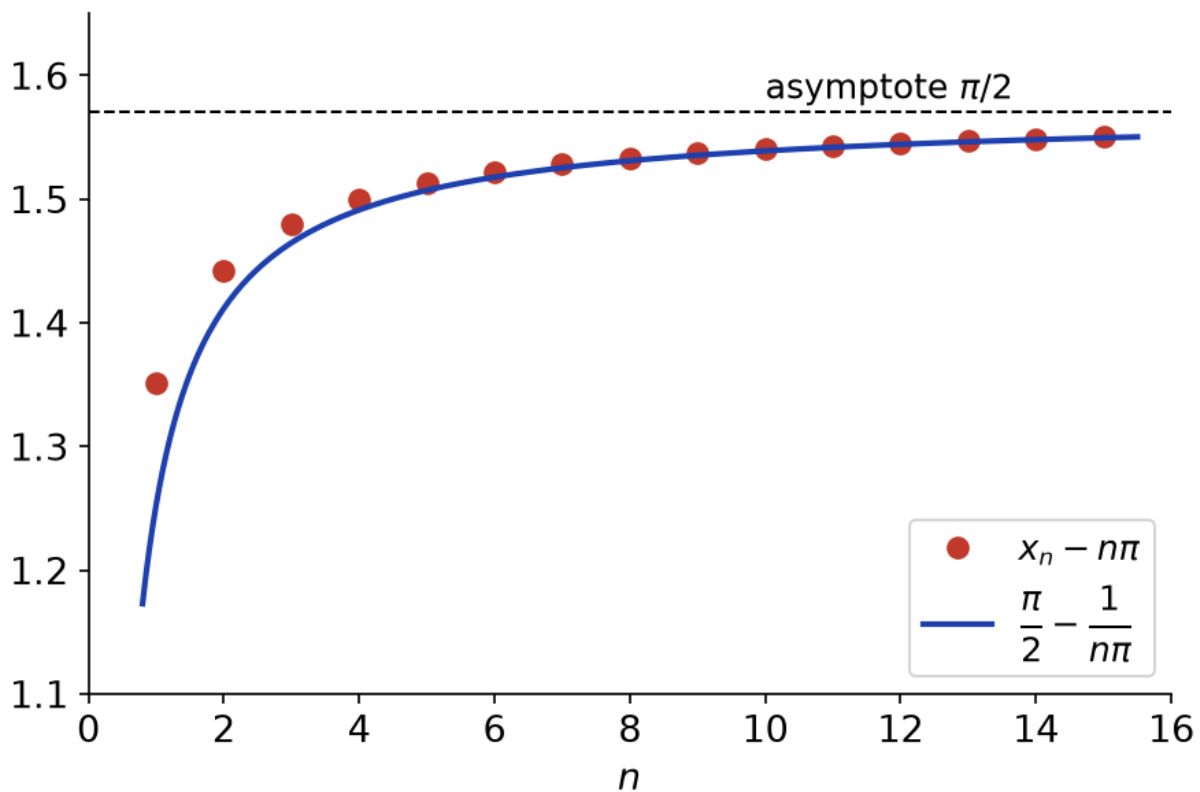
Corrigé de l'exercice 16 : Racine d'une équation à paramètre

- La fonction f_n est dérivable, avec $f'_n(x) = 5x^4 + n > 0$. Elle est donc strictement croissante et continue sur $[0, +\infty[$. De plus, $f_n(0) = -1 < 0$ et $f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n^5} > 0$. Par le théorème des valeurs intermédiaires, f_n s'annule sur $\left]0, \frac{1}{n}\right[$. Par stricte monotonie, ce zéro est unique sur $[0, +\infty[$. **Ainsi x_n existe, est unique et vérifie $0 < x_n < \frac{1}{n}$.**
- Par encadrement, $x_n \rightarrow 0$, donc $x_n^5 \rightarrow 0$. L'équation s'écrit $n x_n = 1 - x_n^5$, qui tend vers 1. **Donc $n x_n \rightarrow 1$, c'est-à-dire $x_n \sim \frac{1}{n}$.**
- On réinjecte. D'une part, $x_n = \frac{1}{n} - \frac{x_n^5}{n}$. D'autre part, $x_n^5 \sim \frac{1}{n^5}$, car la puissance 5 est fixe. Donc $x_n^5 = \frac{1}{n^5} + o\left(\frac{1}{n^5}\right)$, puis $\frac{x_n^5}{n} = \frac{1}{n^6} + o\left(\frac{1}{n^6}\right)$. **Ainsi $x_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^6} + o\left(\frac{1}{n^6}\right)$.**
- On réinjecte une nouvelle fois. On a $x_n = \frac{1}{n}(1 + h_n)$ avec $h_n = -\frac{1}{n^5} + o\left(\frac{1}{n^5}\right)$. Or $(1 + h)^5 - 1 \sim 5h$ en 0, donc $(1 + h_n)^5 = 1 + 5h_n + o(h_n) = 1 - \frac{5}{n^5} + o\left(\frac{1}{n^5}\right)$. Par conséquent, $x_n^5 = \frac{1}{n^5} - \frac{5}{n^{10}} + o\left(\frac{1}{n^{10}}\right)$. En divisant par n et en reportant dans $x_n = \frac{1}{n} - \frac{x_n^5}{n}$, on obtient $x_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^6} + \frac{5}{n^{11}} + o\left(\frac{1}{n^{11}}\right)$.

Point de méthode : chaque réinjection dans l'équation $x_n = \frac{1 - x_n^5}{n}$ fournit un terme de plus ; on vérifie à chaque étape la précision du o .

Corrigé de l'exercice 17 : Les solutions de $\tan x = x$

1. Soit $J_n =]n\pi - \frac{\pi}{2}, n\pi + \frac{\pi}{2}[$ et $g(x) = \tan x - x$ sur J_n . Alors
 $g'(x) = 1 + \tan^2 x - 1 = \tan^2 x \geq 0$, et g' ne s'annule qu'en $n\pi$. La fonction g est donc strictement croissante sur J_n . Elle tend vers $-\infty$ à gauche et vers $+\infty$ à droite de J_n . Par continuité et stricte monotonie, g réalise une bijection de J_n sur $\mathbb{R}$: elle s'annule en un unique point x_n . Enfin, $g(n\pi) = -n\pi < 0$, donc $x_n \in]n\pi, n\pi + \frac{\pi}{2}[$.
2. De $n\pi < x_n < n\pi + \frac{\pi}{2}$, on déduit $1 < \frac{x_n}{n\pi} < 1 + \frac{1}{2n}$. **Par encadrement**, $x_n \sim n\pi$.
3. Posons $y_n = x_n - n\pi \in]0, \frac{\pi}{2}[$. Par π -périodicité, $\tan y_n = \tan x_n = x_n$. Comme $y_n \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, on a $y_n = \arctan(\tan y_n) = \arctan(x_n)$. Donc $x_n = n\pi + \arctan(x_n)$. Or $x_n \rightarrow +\infty$, donc $\arctan(x_n) \rightarrow \frac{\pi}{2}$. **Ainsi**
 $x_n = n\pi + \frac{\pi}{2} + o(1)$.
4. Comme $x_n > 0$, on a $\arctan(x_n) = \frac{\pi}{2} - \arctan\frac{1}{x_n}$. Or $\frac{1}{x_n} \rightarrow 0$, donc $\arctan\frac{1}{x_n} \sim \frac{1}{x_n} \sim \frac{1}{n\pi}$, d'après la question 2. Ainsi $\arctan\frac{1}{x_n} = \frac{1}{n\pi} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.
Finalement, $x_n = n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n\pi} + o\left(\frac{1}{n}\right)$. La figure ci-dessous confirme numériquement ce développement.



Corrigé de l'exercice 18 : Une suite d'intégrales

1. D'abord, $I_0 = \int_0^1 \frac{dx}{1+x} = [\ln(1+x)]_0^1 = \ln 2$. Ensuite, l'intégrande est positive sur $[0, 1]$, donc $I_n \geq 0$. De plus, $x^{n+1} \leq x^n$ sur $[0, 1]$, donc $I_{n+1} \leq I_n$. Enfin, $1+x \geq 1$ donne $\frac{x^n}{1+x} \leq x^n$, d'où $I_n \leq \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1}$. **Par encadrement**, $I_n \rightarrow 0$.
2. Par linéarité, $I_n + I_{n+1} = \int_0^1 \frac{x^n(1+x)}{1+x} dx = \int_0^1 x^n dx$. **Donc** $I_n + I_{n+1} = \frac{1}{n+1}$.
3. Soit $n \geq 1$. Comme $I_{n+1} \leq I_n$, on a $\frac{1}{n+1} = I_n + I_{n+1} \leq 2I_n$. De même, $I_n \leq I_{n-1}$ donne $2I_n \leq I_{n-1} + I_n = \frac{1}{n}$. D'où $\frac{1}{2(n+1)} \leq I_n \leq \frac{1}{2n}$. Les deux bornes sont équivalentes à $\frac{1}{2n}$. **Par encadrement**, $I_n \sim \frac{1}{2n}$.

4. L'encadrement précédent donne $0 \leq \frac{1}{2n} - I_n \leq \frac{1}{2n} - \frac{1}{2(n+1)} = \frac{1}{2n(n+1)} \leq \frac{1}{2n^2}$. **Donc**

$$I_n = \frac{1}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Point de méthode : une relation entre I_n et I_{n+1} , combinée à la monotonie, suffit souvent à encadrer I_n par deux quantités équivalentes.

Corrigé de l'exercice 19 : Intégrales de Wallis et constante de Stirling

1. On a $W_0 = \frac{\pi}{2}$ et $W_1 = [-\cos t]_0^{\pi/2} = 1$. Sur $]0, \frac{\pi}{2}]$, $\sin^n t > 0$, et la fonction est continue, donc $W_n > 0$. Ensuite, $0 \leq \sin t \leq 1$ donne $\sin^{n+1} t \leq \sin^n t$. **Par croissance de l'intégrale, (W_n) est décroissante.**

2. On écrit $W_{n+2} = \int_0^{\pi/2} \sin^{n+1} t \cdot \sin t \, dt$. On intègre par parties avec $u = \sin^{n+1}$ et

$v = -\cos$, fonctions de classe C^1 . Le crochet $[-\cos t \sin^{n+1} t]_0^{\pi/2}$ est nul. Il reste

$$W_{n+2} = (n+1) \int_0^{\pi/2} \sin^n t \cos^2 t \, dt. \text{ Or } \cos^2 = 1 - \sin^2, \text{ donc}$$

$$W_{n+2} = (n+1)(W_n - W_{n+2}). \text{ Ainsi } (n+2)W_{n+2} = (n+1)W_n.$$

3. Posons $c_n = (n+1)W_{n+1}W_n$. Alors
 $c_{n+1} = (n+2)W_{n+2}W_{n+1} = (n+1)W_n W_{n+1} = c_n$. La suite est donc constante.
Elle vaut $c_0 = W_1 W_0 = \frac{\pi}{2}$.

4. Par décroissance, $W_{n+2} \leq W_{n+1} \leq W_n$. En divisant par $W_n > 0$, on obtient
 $\frac{n+1}{n+2} \leq \frac{W_{n+1}}{W_n} \leq 1$. Par encadrement, $W_{n+1} \sim W_n$. Ensuite,
 $\frac{\pi}{2} = (n+1)W_{n+1}W_n \sim n W_n^2$. Donc $W_n^2 \sim \frac{\pi}{2n}$, et comme $W_n > 0$, la puissance $\frac{1}{2}$ donne $W_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.

5. La relation de la question 2 donne $W_{2p} = \frac{2p-1}{2p} W_{2p-2}$. Par récurrence :

$$W_{2p} = \frac{(2p-1)(2p-3)\dots 1}{(2p)(2p-2)\dots 2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{(2p)!}{(2^p p!)^2} \cdot \frac{\pi}{2}.$$

En effet, on multiplie numérateur et dénominateur par le produit des pairs $2^p p!$. Ensuite, avec l'équivalent admis :

$$\frac{(2p)!}{4^p (p!)^2} \sim \frac{C \sqrt{2p} (2p)^{2p} e^{-2p}}{4^p C^2 p^p p^{2p} e^{-2p}} = \frac{\sqrt{2}}{C \sqrt{p}}.$$

Donc $W_{2p} \sim \frac{\pi \sqrt{2}}{2C \sqrt{p}}$. Or la question 4 donne $W_{2p} \sim \sqrt{\frac{\pi}{4p}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{p}}$. Deux équivalents d'une même suite sont équivalents entre eux, et ici leur quotient est constant. Donc $\frac{\pi \sqrt{2}}{C} = \sqrt{\pi}$. Ainsi $C = \sqrt{2\pi}$, ce qui achève la preuve de la formule de Stirling.

Corrigé de l'exercice 20 : Série harmonique et constante d'Euler

- Calculons les variations. D'une part, $v_{n+1} - v_n = \frac{1}{n+1} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$. Avec $x = \frac{1}{n}$, on a $\frac{x}{1+x} = \frac{1}{n+1}$, et l'inégalité rappelée donne $v_{n+1} - v_n \leq 0$. D'autre part, $w_{n+1} - w_n = \frac{1}{n+1} - \ln\left(1 + \frac{1}{n+1}\right) \geq 0$, par l'inégalité $\ln(1+x) \leq x$. Enfin, $v_n - w_n = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \rightarrow 0$. **Les suites (v_n) décroissante et (w_n) croissante sont adjacentes : elles convergent vers une même limite γ .**
- Comme $v_n \rightarrow \gamma$, on a $v_n = \gamma + o(1)$, c'est-à-dire $H_n = \ln n + \gamma + o(1)$. De plus, par monotonie, $w_1 \leq \gamma \leq v_1$. Or $w_1 = 1 - \ln 2$ et $v_1 = 1$. **Donc $1 - \ln 2 \leq \gamma \leq 1$.** On retrouve au passage $H_n \sim \ln n$.
- La suite (v_n) décroît vers γ , donc $v_n - \gamma \geq 0$. La suite (w_n) croît vers γ , donc $\gamma \geq w_n$. Ainsi $0 \leq v_n - \gamma \leq v_n - w_n = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{n}$. **Donc**
 $H_n = \ln n + \gamma + O\left(\frac{1}{n}\right)$.
- On a $\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = H_{2n} - H_n$. D'après la question 2, appliquée aux rangs $2n$ et n :

$$H_{2n} - H_n = \ln(2n) + \gamma - \ln n - \gamma + o(1) = \ln 2 + o(1).$$

La limite vaut $\ln 2$. Remarquez que l'équivalent $H_n \sim \ln n$ seul ne suffisait pas : il aurait fallu soustraire deux équivalents.

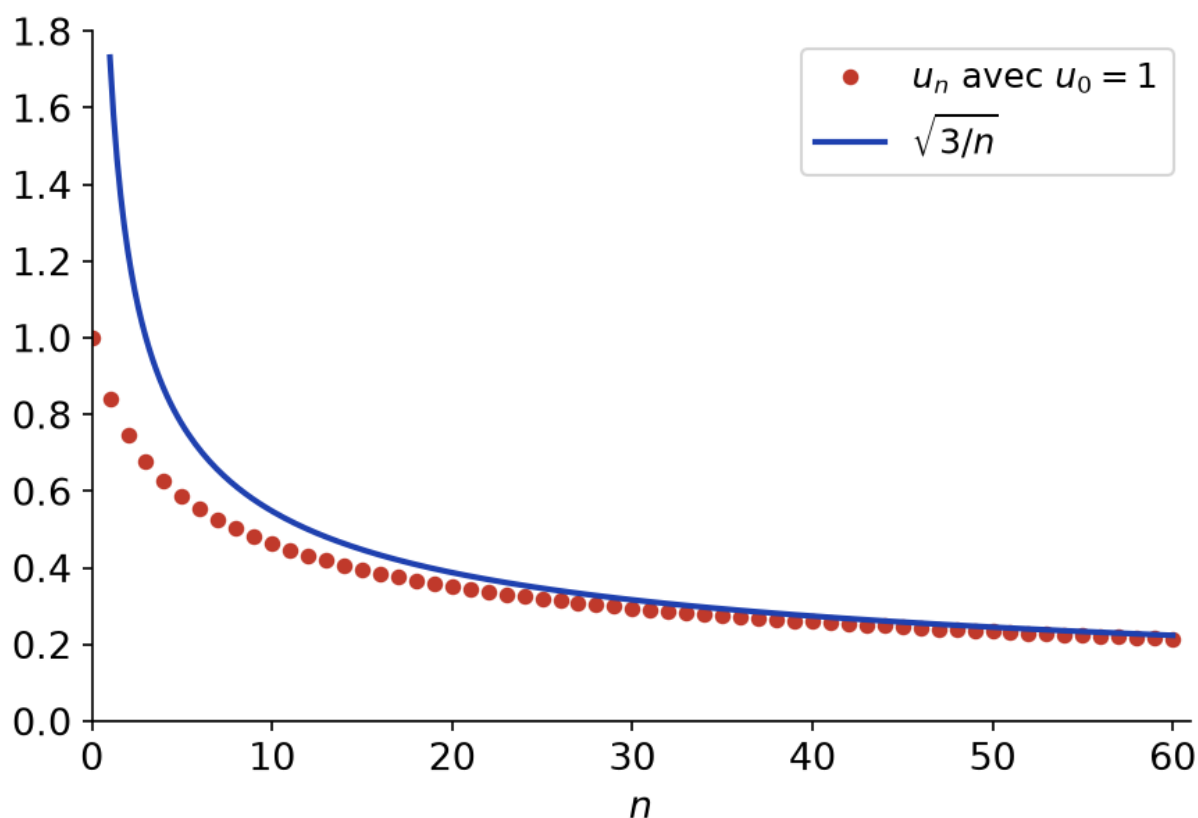
Corrigé de l'exercice 21 : Problème, itérées du sinus

1. La fonction $\sin$ envoie $]0, \frac{\pi}{2}]$ dans $]0, 1] \subset]0, \frac{\pi}{2}]$. Par récurrence, $u_n \in]0, \frac{\pi}{2}]$ pour tout n . Ensuite, on sait que $\sin x < x$ pour tout $x > 0$, donc $u_{n+1} < u_n$. La suite est décroissante et minorée par 0 : elle converge vers un réel $\ell \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Par continuité de $\sin$, $\sin \ell = \ell$, ce qui impose $\ell = 0$. **Donc (u_n) décroît vers 0 .**
2. D'après le développement admis, $\sin x = x(1 + \eta(x))$ avec $\eta(x) = -\frac{x^2}{6} + o(x^2)$. Donc $\sin^2 x = x^2(1 + 2\eta(x) + \eta(x)^2)$. Or $\eta(x)^2 = O(x^4) = o(x^2)$. Ainsi $\sin^2 x = x^2\left(1 - \frac{x^2}{3} + o(x^2)\right) = x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^4)$. Ensuite :

$$\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - \sin^2 x}{x^2 \sin^2 x}.$$

Le numérateur vaut $\frac{x^4}{3} + o(x^4) \sim \frac{x^4}{3}$, et le dénominateur est équivalent à x^4 . **Par quotient, la limite vaut $\frac{1}{3}$.**

3. Comme $u_n \rightarrow 0$ avec $u_n \neq 0$, la substitution donne $\frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_n^2} = \frac{1}{\sin^2 u_n} - \frac{1}{u_n^2} \rightarrow \frac{1}{3}$. Posons $a_n = \frac{1}{u_n^2}$. Le lemme de Césàro donne $\frac{a_n}{n} \rightarrow \frac{1}{3}$, soit $n u_n^2 \rightarrow 3$. Donc $u_n^2 \sim \frac{3}{n}$. Comme $u_n > 0$, la puissance fixe $\frac{1}{2}$ donne $u_n \sim \sqrt{\frac{3}{n}}$. La figure ci-dessous, tracée avec $u_0 = 1$, montre les points u_n qui rejoignent la courbe de $\sqrt{3/n}$.



4. D'une part, $n^{1/3} u_n \sim \sqrt{3} n^{1/3 - 1/2} = \sqrt{3} n^{-1/6} \rightarrow 0$. Donc $u_n = o(n^{-1/3})$.
 D'autre part, $n u_n \sim \sqrt{3n} \rightarrow +\infty$. Ainsi $\frac{1}{n} = o(u_n)$: **la suite tend vers 0 beaucoup plus lentement que $\frac{1}{n}$** . Ce résultat servira dans le chapitre sur les séries, par exemple pour étudier la nature de $\sum u_n$.

Point de méthode : ici $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \dots$, donc $p = 3$; l'exposant à choisir est $\beta = p - 1 = 2$, ce qui explique le passage par $\frac{1}{u_n^2}$.

[Revenir aux énoncés des exercices](#)

Pour aller plus loin en maths sup

- Le cours : [relations de comparaison, cours de maths sup](#)
- Les énoncés : [exercices de maths sup sur relations de comparaison](#)
- À maîtriser avant : [Limites et continuité des fonctions](#), [Suites particulières et suites récurrentes](#)
- Chapitre précédent : [Arithmétique des polynômes et fractions rationnelles](#)
- Chapitre suivant : [Développements limités et étude locale](#)
- Tester vos connaissances : [QCM de maths sup par chapitre](#)
- Le sommaire : [tous les chapitres de maths sup](#) et les [chapitres de maths spé](#)