

Réduction de Jordan

Corrigé de l'exercice 1 : Polynôme minimal et lemme des noyaux

1. On développe $\det(XI_3 - A)$ selon la troisième colonne, qui n'a qu'un coefficient non nul :

$$\chi_A = (X - 2) \det \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & X - 2 \end{pmatrix} = (X - 2)(X^2 - 2X + 1).$$

Donc $\chi_A = (X - 1)^2 (X - 2).$

2. On a $A - I_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Le système se réduit à $y = x$ et $x - y + z = 0$, c'est-à-dire $y = x$ et $z = 0$. Ainsi $\ker(A - I_3) = \text{Vect}((1, 1, 0))$, de dimension 1. Or la valeur propre 1 est de multiplicité 2. **Par conséquent, A n'est pas diagonalisable.**

3. Le polynôme minimal divise χ_A et admet les mêmes racines. Les seuls candidats sont donc $(X - 1)(X - 2)$ et $(X - 1)^2(X - 2)$. Cependant, le premier est scindé à racines simples : s'il annulait A , celle-ci serait diagonalisable. **Donc** $\pi_A = (X - 1)^2(X - 2).$

4. Un calcul direct donne $(A - I_3)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Ainsi F_1 est le plan d'équation

$$x - y + z = 0, \text{ de base } (1, 1, 0), (0, 1, 1). \text{ Ensuite, } A - 2I_3 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

impose $x = 0$ puis $y = 0$, d'où $F_2 = \text{Vect}(e_3)$. Enfin, e_3 ne vérifie pas $x - y + z = 0$, donc $F_1 \cap F_2 = \{0\}$. Comme $2 + 1 = 3$, **on a bien** $\mathbb{R}^3 = F_1 \oplus F_2$, conformément au lemme des noyaux.

Point de méthode : pour trouver π_A , on teste les diviseurs de χ_A ayant toutes les valeurs propres pour racines, du plus petit degré au plus grand.

Corrigé de l'exercice 2 : Projecteurs spectraux par Bézout

1. On développe : $(X - 1)^2 - X(X - 2) = X^2 - 2X + 1 - X^2 + 2X = 1$. On obtient bien 1.
2. Posons $P_2 = (A - I_3)^2$. Si $x \in F_1$, alors $P_2 x = 0$ par définition. Si $x \in F_2$, alors $Ax = 2x$, donc $P_2 x = (2 - 1)^2 x = x$. Une application linéaire est déterminée par ses restrictions à deux supplémentaires. **Donc P_2 est le projecteur sur F_2 parallèlement à F_1 , et $P_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.**
3. On obtient $P_1 = I_3 - P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. D'autre part, l'identité de Bézout évaluée en A donne $I_3 = P_2 - A(A - 2I_3)$. Ainsi $P_1 = A(2I_3 - A)$. On le vérifie : les lignes de $A(2I_3 - A)$ sont $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ et $(-1, 1, 0)$. **Donc $P_1 = A(2I_3 - A)$.**
4. La troisième ligne de P_2^2 vaut $1 \cdot (0, 0, 0) - 1 \cdot (0, 0, 0) + 1 \cdot (1, -1, 1)$, et les autres lignes sont nulles. Donc $P_2^2 = P_2$. Ensuite, $P_1 P_2 = P_2 - P_2^2 = 0$ et $P_1^2 = I_3 - 2P_2 + P_2^2 = P_1$. **Ainsi $P_1^2 = P_1$ et $P_1 P_2 = 0$.**

Corrigé de l'exercice 3 : Dunford d'une matrice d'ordre 2

1. On a $\text{tr}(B) = 4$ et $\det(B) = 3 + 1 = 4$, donc $\chi_B = X^2 - 4X + 4 = (X - 2)^2$. Si B était diagonalisable, elle serait semblable à $2I_2$, donc égale à $2I_2$. Ce n'est pas le cas. **Ainsi B n'est pas diagonalisable.**
2. Le seul sous-espace caractéristique est $\mathbb{R}^2$, et le projecteur associé est I_2 . Par conséquent, $D = 2I_2$ et $N = B - 2I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$. On vérifie que $N^2 = 0$, et D commute avec toute matrice. **Donc $B = 2I_2 + N$ est la décomposition de Dunford.**
3. Comme $2I_2$ et N commutent, la formule du binôme s'applique, et les termes en N^j avec $j \geq 2$ sont nuls :

$$B^k = 2^k I_2 + k 2^{k-1} N.$$

Ainsi $B^k = 2^{k-1} \begin{pmatrix} 2+k & k \\ -k & 2-k \end{pmatrix}$ pour tout $k \geq 0$ (pour $k = 0$, on retrouve I_2).

Corrigé de l'exercice 4 : Dunford et puissances d'une matrice d'ordre 3

1. D'après le cours, la partie diagonalisable vaut $D = \sum \lambda_i P_i$, où les P_i sont les projecteurs spectraux. Ici, $D = 1 \cdot P_1 + 2 \cdot P_2$. On trouve $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.
2. On calcule $N = A - D = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Chaque coefficient de N^2 est de la forme $(-1)a + 1 \cdot a = 0$, donc $N^2 = 0$. Ensuite, les deux premières lignes de D sont celles de I_3 , et la troisième ligne de DN vaut $(-1, 1, 0) - (-1, 1, 0) + 0 = 0$; ainsi $DN = N$. De même, $ND = N$ car les lignes $(-1, 1, 0)$ vérifient $(-1, 1, 0)D = (-1, 1, 0)$. Donc $N^2 = 0$ et $DN = ND = N$.
3. La troisième ligne de $P_2 N$ vaut $1 \cdot (-1, 1, 0) - 1 \cdot (-1, 1, 0) + 1 \cdot 0 = 0$. Ainsi $P_2 N = 0$, puis $P_1 N = N - P_2 N$. On obtient $P_2 N = 0$ et $P_1 N = N$.
4. Comme P_1 et P_2 sont des projecteurs associés à une somme directe, $D^k = P_1 + 2^k P_2$. Ensuite, par la formule du binôme avec $N^2 = 0$, on a $A^k = D^k + k D^{k-1} N$. Or $D^{k-1} N = P_1 N + 2^{k-1} P_2 N = N$. Par conséquent,

$$A^k = P_1 + 2^k P_2 + k N.$$
 Ainsi $A^k = \begin{pmatrix} 1-k & k & 0 \\ -k & 1+k & 0 \\ 2^{k-1} & 1-2^k & 2^k \end{pmatrix}$. Pour $k = 1$, on retrouve bien A .

Point de méthode : les relations $P_i P_j = 0$ et $P_i N = N P_i$ rendent les calculs de puissances presque immédiats.

Corrigé de l'exercice 5 : Un piège classique de Dunford

1. La matrice A est triangulaire, donc $\chi_A = (X-1)(X-2)$. Ce polynôme est scindé à racines simples. **Donc A est diagonalisable.**
2. Le couple $(A, 0)$ convient : A est diagonalisable, 0 est nilpotente, et elles commutent. **Par unicité, la décomposition de Dunford est $D = A$ et $N = 0$.**
3. On calcule $D_0 N_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $N_0 D_0 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Ces matrices diffèrent. **Ainsi D_0 et N_0 ne commutent pas, et la condition de commutation de Dunford n'est pas satisfaite.**
4. La matrice $\text{diag}(1, 1, 2)$ est diagonale, et $E_{12}^2 = 0$. Multiplier E_{12} à gauche par $\text{diag}(1, 1, 2)$ multiplie sa première ligne par 1. À droite, cela multiplie sa deuxième colonne par 1. Dans les deux cas, on retrouve E_{12} . **Les deux matrices commutent, donc c'est bien la décomposition de Dunford de C .** La différence vient de ce que le coefficient 1 hors diagonale relie ici deux coefficients diagonaux égaux.

Corrigé de l'exercice 6 : Premiers pas avec les nilpotents

1. On calcule successivement

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad N^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad N^4 = 0.$$

L'indice de nilpotence de N est donc 4.

2. Comme $N^4 = 0$, on a $(I_4 - N)(I_4 + N + N^2 + N^3) = I_4 - N^4 = I_4$. Donc $I_4 - N$ est inversible. En additionnant, $(I_4 - N)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 8 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, où par exemple $8 = 3 + 4 + 1$.

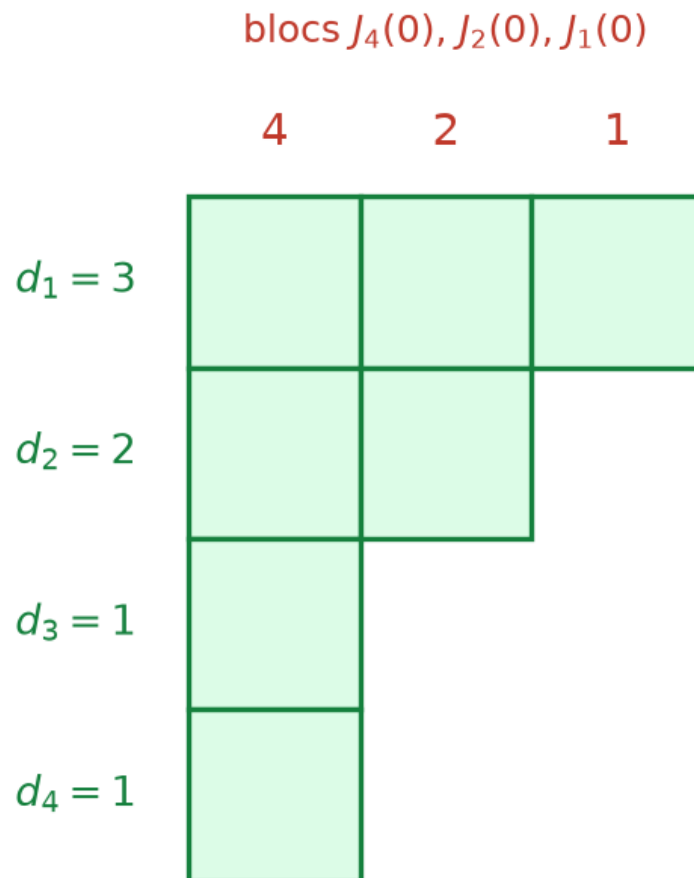
3. Comme $v^{n-1} \neq 0$, il existe x tel que $v^{n-1}(x) \neq 0$. Supposons $\sum_{k=0}^{n-1} a_k v^k(x) = 0$

avec des a_k non tous nuls, et soit j le plus petit indice tel que $a_j \neq 0$. En appliquant v^{n-1-j} , tous les termes d'indice $k > j$ s'annulent, car $v^n = 0$. Il reste $a_j \cdot v^{n-1-j}(x) = 0$, ce qui est absurde. La famille est donc libre, et elle a n vecteurs : c'est une base. Posons $e_j = v^{n-j}(x)$. Alors $v(e_1) = 0$ et $v(e_j) = e_{j-1}$ pour $j \geq 2$. **Dans cette base, la matrice de v est $J_n(0)$.**

4. Si v est nilpotent, sa seule valeur propre est 0 . S'il est de plus diagonalisable, il est semblable à la matrice diagonale dont tous les coefficients sont nuls. **Donc $v = 0$.**

Corrigé de l'exercice 7 : Noyaux itérés et tableau de Young

- La suite des noyaux atteint E pour la première fois au rang 4 . **L'indice de nilpotence de v est donc 4 .**
- On lit $d_1 = 3 - 0 = 3$, $d_2 = 5 - 3 = 2$, $d_3 = 6 - 5 = 1$ et $d_4 = 7 - 6 = 1$. Le tableau de Young a donc des lignes de longueurs $3, 2, 1, 1$, comme le montre la figure ci-dessous. **Ses colonnes ont pour hauteurs $4, 2$ et 1 .**



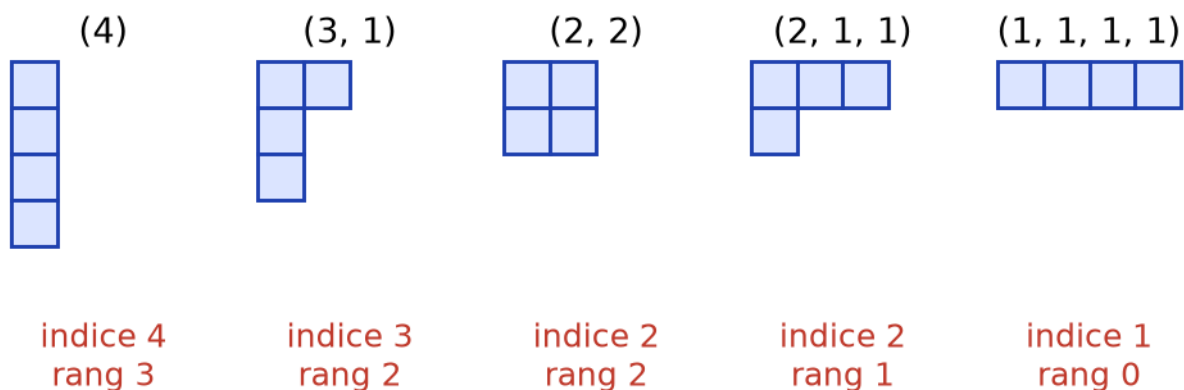
3. D'après le cours, les hauteurs des colonnes sont les tailles des blocs. **La réduite de Jordan de v est $\text{diag}(J_4(0), J_2(0), J_1(0))$.** Par le théorème du rang, $\text{rg } v^j = 7 - \dim \ker v^j$. On trouve $\text{rg } v = 4$, $\text{rg } v^2 = 2$ et $\text{rg } v^3 = 1$. Bloc par bloc, on retrouve $3 + 1 + 0 = 4$, puis $2 + 0 + 0$ et $1 + 0 + 0$.
4. On aurait $d_1 = 3$, $d_2 = 1$ et $d_3 = 2$. Or la suite (d_j) est décroissante. En effet, v induit une application injective de $\ker v^{j+1} / \ker v^j$ dans $\ker v^j / \ker v^{j-1}$, d'où $d_{j+1} \leq d_j$. Ici $d_3 > d_2$. **Un tel nilpotent n'existe donc pas.**

Corrigé de l'exercice 8 : Classes de nilpotents en dimension 4

1. Les partitions de 4 sont (4) , $(3, 1)$, $(2, 2)$, $(2, 1, 1)$ et $(1, 1, 1, 1)$. D'après le théorème

de classification, les classes de nilpotents correspondent exactement aux partitions de n . Il y a donc 5 classes de similitude de nilpotents dans $\mathcal{M}_4(\mathbb{C})$.

2. L'indice est la taille du plus grand bloc. Le rang est la somme des rangs des blocs, soit $\sum (k_i - 1) = 4 - s$, où s est le nombre de blocs. La figure ci-dessous résume les résultats. On obtient les couples (indice, rang) : $(4, 3)$, $(3, 2)$, $(2, 2)$, $(2, 1)$ et $(1, 0)$.



3. Les cinq couples obtenus sont deux à deux distincts. Par conséquent, deux nilpotents de même indice et de même rang ont la même partition. **En dimension 4, le couple (indice, rang) caractérise donc la classe.**
4. Pour $(3, 2, 2)$, l'indice vaut 3 et le rang $2 + 1 + 1 = 4$. Pour $(3, 3, 1)$, l'indice vaut 3 et le rang $2 + 2 + 0 = 4$. Le couple ne suffit donc plus. En revanche, $\text{rg } N^2$ vaut 1 dans le premier cas et 2 dans le second. **Le rang de N^2 , c'est-à-dire $\dim \ker N^2$, distingue ces deux classes.**

Corrigé de l'exercice 9 : Réduite de Jordan d'un bloc unique

1. On développe selon la dernière ligne de $XI_3 - B$:

$$\chi_B = (X - 1) \det \begin{pmatrix} X - 1 & -1 \\ 1 & X - 2 \end{pmatrix} = (X - 1)(X^2 - 2X + 1).$$

Donc $\chi_B = (X - 1)^3$.

2. On a $N = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, puis $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $N^3 = 0$. Ainsi N est nilpotente d'indice 3. **Donc** $\pi_B = (X - 1)^3 = \chi_B$.

3. On a $\ker N^2 = \{z = 0\}$. On choisit donc $v_3 = e_3 = (0, 0, 1)$, qui n'est pas dans $\ker N^2$. Ensuite, $v_2 = Nv_3 = (1, 2, 0)$ et $v_1 = Nv_2 = (-1 + 2, -1 + 2, 0) = (1, 1, 0)$. On vérifie que $Nv_1 = (0, 0, 0)$. La famille est une base d'après l'exercice 6. **Avec** $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, de déterminant 1, on a $P^{-1}BP = J_3(1)$.

4. Comme I_3 et N commutent et $N^3 = 0$, la formule du binôme donne

$$B^k = I_3 + kN + \frac{k(k-1)}{2}N^2.$$

Ainsi $B^k = \begin{pmatrix} 1-k & k & \frac{k(k+1)}{2} \\ -k & 1+k & \frac{k+3}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. En effet, $k + \frac{k(k-1)}{2} = \frac{k(k+1)}{2}$ et $2k + \frac{k(k-1)}{2} = \frac{k(k+3)}{2}$.

Corrigé de l'exercice 10 : Réduite de Jordan en dimension 4

1. La première colonne de $C - XI_4$ n'a qu'un coefficient non nul, $1 - X$. On développe ensuite le mineur restant selon sa dernière ligne, réduite au coefficient $-1 - X$, puis on calcule un déterminant triangulaire d'ordre 2. On obtient $\det(C - XI_4) = (1 - X)^3(-1 - X)$. **Donc** $\chi_C = (X - 1)^3(X + 1)$.

2. On a $C - I_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$. Les équations $y + t = 0$ et $t = 0$ donnent $\ker(C - I_4) = \text{Vect}(e_1, e_3)$. Ensuite, $(C - I_4)^2$ a toutes ses colonnes nulles sauf la dernière, égale à $(-2, 0, -2, 4)$. **Ainsi** $\ker(C - I_4)^2 = \text{Vect}(e_1, e_2, e_3)$. Enfin, pour $C + I_4$, on trouve $y = 0$, $2x + t = 0$ et $2z + t = 0$. **Donc** $\ker(C + I_4) = \text{Vect}((1, 0, 1, -2))$.

3. Le sous-espace caractéristique de 1 est de dimension 3, et il est déjà atteint par $\ker(C - I_4)^2$. L'exposant de $X - 1$ dans π_C vaut donc 2. **Ainsi**

$\pi_C = (X - 1)^2(X + 1)$. Pour la valeur propre -1 , il y a $\dim \ker(C - I_4) = 2$ blocs, de tailles totales 3 , le plus grand étant de taille 2 . **Donc** $J = \text{diag}(J_2(1), J_1(1), J_1(-1))$.

4. On prend $w_2 = e_2$, qui est dans $\ker(C - I_4)^2$ mais pas dans $\ker(C - I_4)$. Puis $w_1 = (C - I_4)e_2 = (1, 0, 1, 0)$. On complète avec $w_3 = e_1$, indépendant de w_1 dans $\ker(C - I_4)$, et $w_4 = (1, 0, 1, -2)$. On vérifie que $Cw_4 = (-1, 0, -1, 2) = -w_4$.

Avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$, on a $P^{-1}CP = J$.

Point de méthode : on commence toujours une chaîne par le haut, avec un vecteur du plus grand noyau itéré qui n'est pas dans le précédent.

Corrigé de l'exercice 11 : Semblables ou non : nilpotents d'ordre 4

- Les trois matrices sont strictement triangulaires supérieures, donc $\chi = X^4$ pour chacune. On vérifie ensuite que $M_1^2 = M_2^2 = M_3^2 = 0$, alors qu'aucune n'est nulle. **Ainsi** $\pi = X^2$ **pour les trois**. Enfin, $\text{rg } M_1 = 2$, $\text{rg } M_2 = 1$ **et** $\text{rg } M_3 = 2$.
- Deux matrices semblables ont le même rang, donc M_2 n'est semblable à aucune des deux autres. Ensuite, un nilpotent d'indice 2 et de rang 2 en dimension 4 a pour partition $(2, 2)$ d'après l'exercice 8. **Donc** M_1 **et** M_3 **sont semblables, et** M_2 **est seule dans sa classe**. Pour la matrice de passage, on a $M_3 e_3 = e_1$, $M_3 e_4 = e_2$ et $M_3 e_1 = M_3 e_2 = 0$. Dans la base (e_1, e_3, e_2, e_4) , la matrice de M_3 est donc M_1 . Avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, on a $P^{-1}M_3P = M_1$.
- Soit λ une valeur propre de multiplicité $m \leq 3$ dans χ , et k l'exposant de $X - \lambda$ dans π . Les blocs associés forment une partition de m de plus grande part k . Pour $m = 1$, seule (1) est possible. Pour $m = 2$, $k = 1$ donne $(1, 1)$ et $k = 2$ donne (2) . Pour $m = 3$, $k = 1, 2, 3$ donnent respectivement $(1, 1, 1)$, $(2, 1)$ et (3) . Dans tous les cas, la partition est déterminée par m et k . **Donc** χ **et** π **déterminent la réduite de Jordan, et les deux matrices sont semblables**.

Corrigé de l'exercice 12 : Une matrice est semblable à sa transposée

- On a $(W^2)_{ij} = \sum_l w_{il} w_{lj} = w_{i, k+1-i} w_{k+1-i, j}$. Ce terme vaut 1 si $j = i$ et 0 sinon, donc $W^2 = I_k$. De même, $(WMW)_{ij} = \sum_{a,b} w_{ia} m_{ab} w_{bj}$. Seul le terme $a = k+1-i$, $b = k+1-j$ subsiste. **Ainsi** $(WMW)_{ij} = m_{k+1-i, k+1-j}$.
- Posons $a = k+1-i$ et $b = k+1-j$. Le coefficient $(J_k(\lambda))_{ab}$ vaut λ si $a = b$, c'est-à-dire $i = j$. Il vaut 1 si $b = a+1$, c'est-à-dire $i = j+1$. Les 1 se retrouvent donc juste sous la diagonale. **Par conséquent**, $WJ_k(\lambda)W = J_k(\lambda)^\top$.
- Écrivons $A = PJP^{-1}$ avec $J = \text{diag}(J_{k_1}(\lambda_1), \dots, J_{k_s}(\lambda_s))$. Posons $W' = \text{diag}(W_{k_1}, \dots, W_{k_s})$. Alors $W'JW' = J^\top$ bloc par bloc, et $W'^2 = I_n$. Ensuite,

$$A^\top = (P^{-1})^\top J^\top P^\top = (P^{-1})^\top W' J W' P^\top = Q J Q^{-1},$$
 avec $Q = (P^\top)^{-1} W'$. Comme $J = P^{-1} A P$, $A^\top = (Q P^{-1}) A (Q P^{-1})^{-1}$ **est semblable à** A .
- Si A est réelle, A et $A^\top$ sont deux matrices réelles semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. D'après le cours, leurs invariants de similitude coïncident, et ces invariants ne dépendent pas du corps. **Donc** A **et** $A^\top$ **sont semblables dans** $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Corrigé de l'exercice 13 : Invariants de similitude et classes

- Pour la valeur propre 2, les blocs sont de tailles 3 et 1 ; pour -1, un seul bloc de taille 2. Le dernier invariant regroupe les plus grands blocs : $P_2 = (X-2)^3(X+1)^2$. Il reste le bloc $J_1(2)$, d'où $P_1 = X-2$. **Les invariants de** M **sont** $P_1 = X-2$ **et** $P_2 = (X-2)^3(X+1)^2$. On vérifie que $P_1 P_2 = (X-2)^4(X+1)^2 = \chi_M$.
- Les invariants doivent vérifier $P_1 \mid P_2$. Or $(X-1)^2$ ne divise pas $(X-1)(X-2)$. **Cette suite n'est donc pas une suite d'invariants de similitude.**
- La valeur propre 2 est simple, donc elle donne un bloc $J_1(2)$. Pour la valeur propre 1, les

blocs forment une partition de 3. Il y a donc **trois classes** :

- partition (3) : réduite $\text{diag}(J_3(1), J_1(2))$, un seul invariant $(X-1)^3(X-2)$;
- partition (2, 1) : réduite $\text{diag}(J_2(1), J_1(1), J_1(2))$, invariants $X-1$ et $(X-1)^2(X-2)$;
- partition (1, 1, 1) : réduite $\text{diag}(1, 1, 1, 2)$, invariants $X-1$, $X-1$ et $(X-1)(X-2)$.

4. Une matrice est cyclique si et seulement si $\pi = \chi$, c'est-à-dire si elle n'a qu'un invariant de similitude. **Seule la classe de $\text{diag}(J_3(1), J_1(2))$ est formée de matrices cycliques.**

Corrigé de l'exercice 14 : Décider la similitude

1. Les trois matrices sont triangulaires, de polynôme caractéristique $(X-1)^3$. On calcule les rangs : $\text{rg}(A - I_3) = 1$, $\text{rg}(B - I_3) = 1$ et $\text{rg}(C - I_3) = 2$. Ainsi A et B ont deux blocs, de tailles 2 et 1, tandis que C n'en a qu'un, de taille 3. **Donc A et B sont semblables, mais C n'est semblable à aucune des deux.** Concrètement, dans la base (e_1, e_3, e_2) , on a $Be_1 = e_1$, $Be_3 = e_1 + e_3$ et $Be_2 = e_2$: la matrice obtenue est A .

2. Les deux matrices sont triangulaires, de polynôme caractéristique $(X-2)^2(X-3)$. Ensuite, $S_1 - 2I_3$ et $S_2 - 2I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ sont toutes deux de rang 2. Pour la valeur propre 2, il y a donc un seul bloc, de taille 2, dans les deux cas. **Les deux matrices ont pour réduite $\text{diag}(J_2(2), J_1(3))$: elles sont semblables.**

3. On a $\chi_{R_1} = X^2 + 1$ et $\chi_{R_2} = X^2 - 0 \cdot X + (-1 + 2) = X^2 + 1$. Dans $\mathbb{C}$, ce polynôme a deux racines simples $\pm i$, donc les deux matrices sont semblables à $\text{diag}(i, -i)$. Elles sont donc semblables sur $\mathbb{C}$, et par conséquent sur $\mathbb{R}$ d'après le cours. Pour une matrice explicite, on prend $f_1 = e_1$ et $f_2 = R_2 e_1 = (1, 1)$. Comme $R_2^2 = -I_2$, on a $R_2 f_1 = f_2$ et $R_2 f_2 = -f_1$. Avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, on obtient $P^{-1}R_2P = R_1$. On vérifie : $R_2P = PR_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Corrigé de l'exercice 15 : Exponentielle de blocs de Jordan

1. On écrit $tJ_3(\lambda) = \lambda t I_3 + tJ_3(0)$. Ces deux matrices commutent, et $J_3(0)^3 = 0$, avec $J_3(0)^2 = E_{13}$. Par conséquent, $\exp(tJ_3(\lambda)) = e^{\lambda t} (I_3 + tJ_3(0) + \frac{t^2}{2} J_3(0)^2)$. Ainsi $\exp(tJ_3(\lambda)) = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} 1 & t & t^2/2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2. On calcule $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $N^3 = 0$. Donc $\exp(N) = I_3 + N + \frac{1}{2}N^2$, avec pour coefficient $(1, 3)$ la somme $2 + \frac{3}{2}$. On obtient $\exp(N) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 7/2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

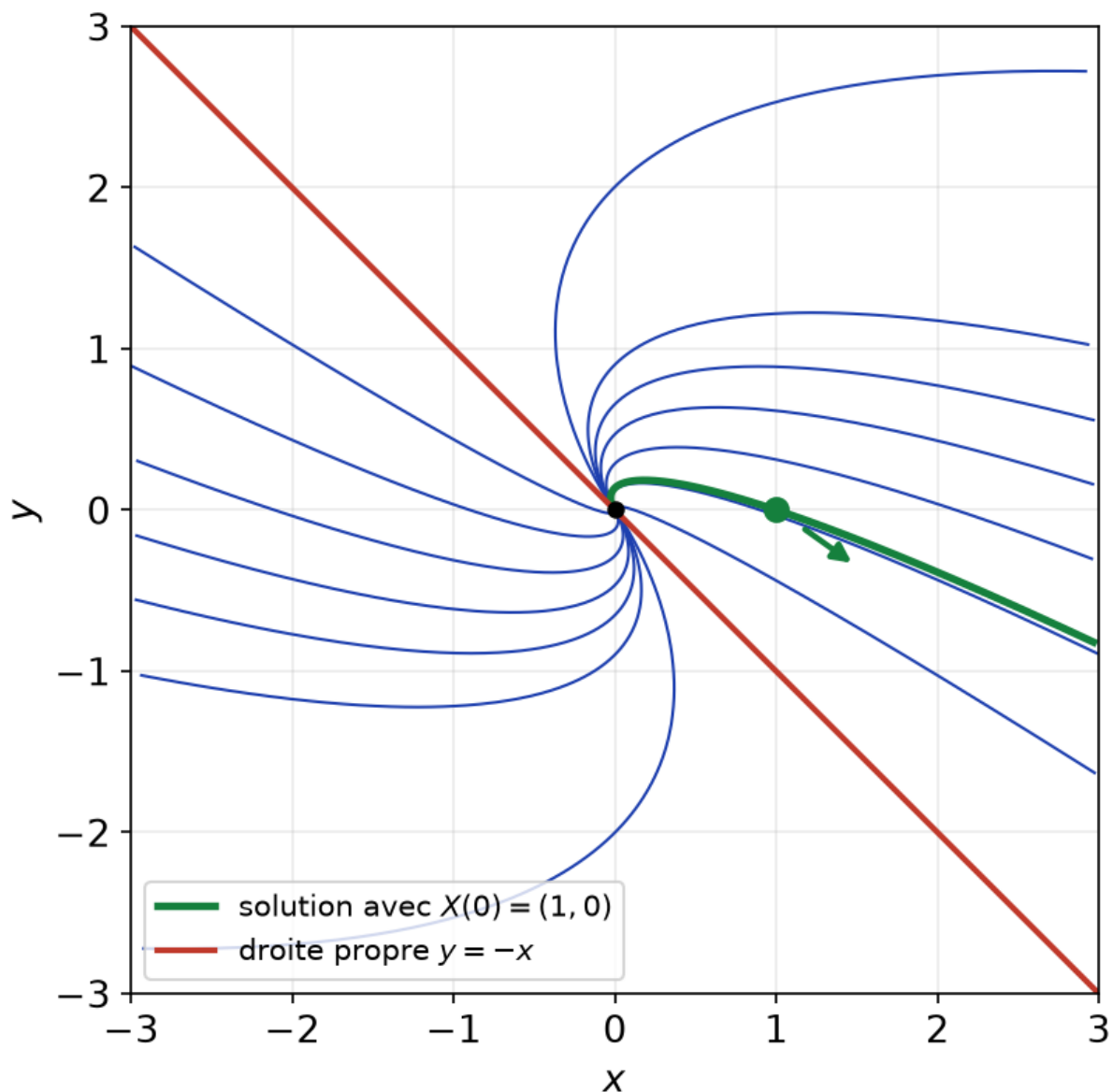
3. On a $K^2 = -I_2$. Ainsi $K^{2p} = (-1)^p I_2$ et $K^{2p+1} = (-1)^p K$. En séparant les termes pairs et impairs de la série,

$$\exp(\theta K) = \left(\sum_{p \geq 0} \frac{(-1)^p \theta^{2p}}{(2p)!} \right) I_2 + \left(\sum_{p \geq 0} \frac{(-1)^p \theta^{2p+1}}{(2p+1)!} \right) K.$$

Donc $\exp(\theta K) = (\cos \theta \quad -\sin \theta \quad \sin \theta \quad \cos \theta)$: c'est la rotation d'angle θ .

Corrigé de l'exercice 16 : Systèmes différentiels et exponentielle

1. D'après l'exercice 3, $tB = 2tI_2 + tN$ avec $N^2 = 0$, et ces deux matrices commutent. Donc $\exp(tB) = e^{2t} (I_2 + tN)$. Ainsi $\exp(tB) = e^{2t} \begin{pmatrix} 1+t & t \\ -t & 1-t \end{pmatrix}$.
2. Le système s'écrit $X' = BX$. Sa solution vaut $X(t) = \exp(tB)X(0)$, c'est-à-dire la première colonne de $\exp(tB)$. Donc $x(t) = (1+t)e^{2t}$ et $y(t) = -te^{2t}$. On vérifie : $x'(t) = (3+2t)e^{2t} = 3x + y$ et $y'(t) = -(1+2t)e^{2t} = -x + y$. Par croissances comparées, $te^{2t} \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow -\infty$. La solution tend donc vers l'origine. La figure ci-dessous montre cette trajectoire parmi d'autres : toutes sortent de l'origine tangentiellement à la droite propre $y = -x$.



3. D'après l'exercice 4, $A = D + N$ avec $\exp(tD) = e^t P_1 + e^{2t} P_2$ et $\exp(tN) = I_3 + tN$. Comme $P_1 N = N$ et $P_2 N = 0$, on obtient $\exp(tA) = e^t P_1 + e^{2t} P_2 + te^t N$. Ainsi

$$\exp(tA) = \begin{pmatrix} (1-t)e^t & te^t & 0 \\ -te^t & (1+t)e^t & 0 \\ e^{2t} - e^t, e^t - e^{2t} & e^{2t} & 0 \end{pmatrix}.$$

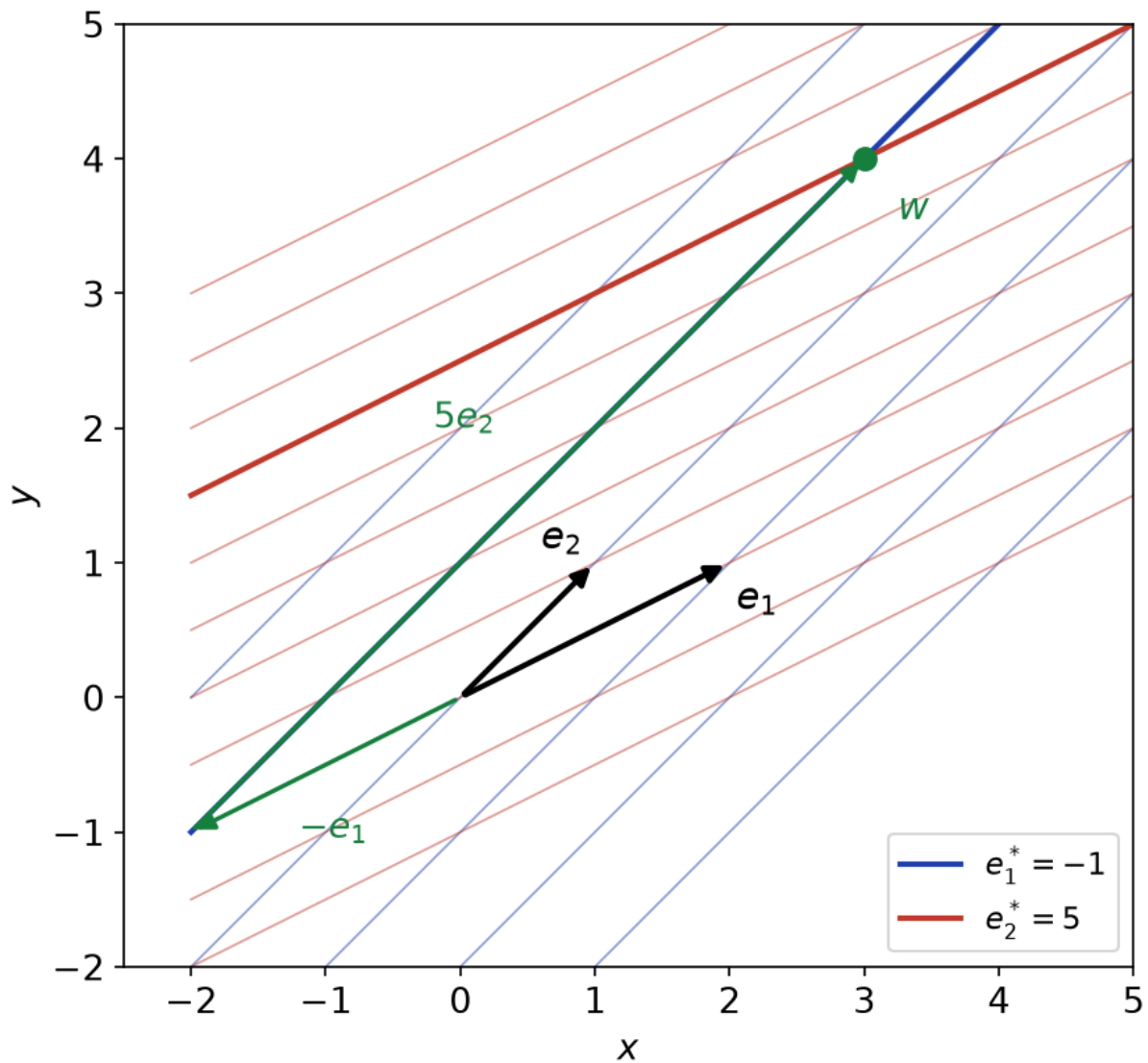
4. La solution cherchée est la première colonne de $\exp(tA)$. Donc $X(t) = \begin{pmatrix} (1-t)e^t, \\ -te^t, \\ e^{2t} - e^t \end{pmatrix}$. En $t = 0$, on retrouve bien $(1, 0, 0)$.

Corrigé de l'exercice 17 : Exponentielle et commutation

- Comme $A^2 = B^2 = 0$, on a $\exp(A) = I_2 + A$ et $\exp(B) = I_2 + B$. Ensuite, par un produit direct, $\exp(A)\exp(B) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $\exp(B)\exp(A) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
- On a $A + B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, donc $(A + B)^2 = I_2$. En séparant les puissances paires et impaires, $\exp(A + B) = \cosh(1) I_2 + \sinh(1)(A + B)$. Ainsi $\exp(A + B) = \begin{pmatrix} \cosh 1 & \sinh 1 \\ \sinh 1 & \cosh 1 \end{pmatrix}$, avec $\cosh 1 \approx 1,54$. Cette matrice diffère des deux produits. On en conclut que la formule $\exp(A + B) = \exp(A)\exp(B)$ est fausse sans commutation ; d'ailleurs $AB \neq BA$ ici.
- Toute matrice complexe est trigonalisable : $M = PTP^{-1}$ avec T triangulaire supérieure, de diagonale $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Ensuite, T^k est triangulaire de diagonale λ_i^k . Par passage à la limite, $\exp(T)$ est triangulaire de diagonale e^{λ_i} . Comme $\exp(M) = P\exp(T)P^{-1}$, on obtient $\det \exp(M) = \prod e^{\lambda_i} = e^{\sum \lambda_i}$. Donc $\det \exp(M) = e^{\text{tr}(M)}$.

Corrigé de l'exercice 18 : Base duale dans le plan et l'espace

- La matrice $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ a pour déterminant 1, donc (e_1, e_2) est une base. D'après le cours, les lignes de $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ donnent la base duale. Ainsi $e_1^*(x, y) = x - y$ et $e_2^*(x, y) = -x + 2y$. On vérifie : $e_1^*(e_1) = 1$, $e_1^*(e_2) = 0$, $e_2^*(e_1) = 0$ et $e_2^*(e_2) = 1$.
- Les coordonnées de w sont $e_1^*(w) = 3 - 4 = -1$ et $e_2^*(w) = -3 + 8 = 5$. Donc $w = -e_1 + 5e_2$. La figure ci-dessous le confirme : w est à l'intersection de la droite $e_1^* = -1$ et de la droite $e_2^* = 5$.



3. La matrice $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ a pour déterminant 2, et

$$Q^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Donc $u_1^* = \frac{1}{2}(x - y + z)$, $u_2^* = \frac{1}{2}(x + y - z)$ **et** $u_3^* = \frac{1}{2}(-x + y + z)$. On vérifie par exemple que $u_1^*(u_1) = 1$, $u_1^*(u_2) = 0$ et $u_1^*(u_3) = 0$.

4. Pour $(2, 3, 5)$, on trouve $u_1^* = 2$, $u_2^* = 0$ et $u_3^* = 3$. **Ainsi** $(2, 3, 5) = 2u_1 + 3u_3$. Ensuite, le plan $\text{Vect}(u_1, u_2)$ est le noyau de u_3^* . **Il a pour équation** $-x + y + z = 0$.

Corrigé de l'exercice 19 : Base duale et interpolation de Lagrange

- Comme $\dim E^* = \dim E = 3$, il suffit de montrer que la famille est libre. Supposons $a_0\varphi_0 + a_1\varphi_1 + a_2\varphi_2 = 0$. En l'appliquant à $(X-1)(X-2)$, qui s'annule en 1 et 2, on obtient $2a_0 = 0$. De même, $X(X-2)$ donne $-a_1 = 0$, et $X(X-1)$ donne $2a_2 = 0$. **La famille est donc une base de E^* .**
- On cherche L_j tel que $L_j(i) = \delta_{ij}$. Le polynôme L_j s'annule aux deux autres points, donc il est proportionnel à leur produit. **On obtient** $L_0 = \frac{(X-1)(X-2)}{2}$,
 $L_1 = -X(X-2)$ et $L_2 = \frac{X(X-1)}{2}$.
- Pour toute forme ψ , on a $\psi = \sum \psi(L_i)\varphi_i$, car les deux membres coïncident sur la base (L_i) . Calculons : $\int_0^2 \frac{(x-1)(x-2)}{2} dx = \frac{1}{2}(\frac{8}{3} - 6 + 4) = \frac{1}{3}$. Ensuite,
 $\int_0^2 -x(x-2) dx = -(\frac{8}{3} - 4) = \frac{4}{3}$. Enfin, $\int_0^2 \frac{x(x-1)}{2} dx = \frac{1}{2}(\frac{8}{3} - 2) = \frac{1}{3}$. Par conséquent, $\int_0^2 P(x) dx = \frac{1}{3}(P(0) + 4P(1) + P(2))$ pour tout $P \in \mathbb{R}_2[X]$: c'est la formule de Simpson, exacte en degré 2.
- Le sous-espace $F = \ker \varphi_1$ est un hyperplan, donc $\dim F^\perp = 3 - 2 = 1$. Or φ_1 s'annule sur F par définition. **Donc $F^\perp = \text{Vect}(\varphi_1)$.**

Corrigé de l'exercice 20 : Transposée, orthogonal et rang

- Une forme φ est dans $\ker u^\top$ si et seulement si $\varphi \circ u = 0$, c'est-à-dire si φ s'annule sur $\text{Im } u$. Ainsi $\ker u^\top = (\text{Im } u)^\perp$, de dimension $n - \text{rg } u$. Par le théorème du rang appliqué à $u^\top$, **on obtient** $\text{rg } u^\top = n - (n - \text{rg } u) = \text{rg } u$.
- Supposons F stable par u . Soient $\varphi \in F^\perp$ et $x \in F$. Alors $u^\top(\varphi)(x) = \varphi(u(x)) = 0$, car $u(x) \in F$. Donc $F^\perp$ est stable par $u^\top$.

Réciproquement, supposons $F^\perp$ stable et soit $x \in F$ tel que $y = u(x) \notin F$. En complétant une base de F par y , puis en une base de E , la forme coordonnée associée à y est dans $F^\perp$ et vaut 1 en y . Pour cette forme φ , on a $u^\top(\varphi)(x) = \varphi(y) = 1$, donc $u^\top(\varphi) \notin F^\perp$. C'est absurde. **Ainsi F est stable par u si et seulement si $F^\perp$ est stable par $u^\top$.**

3. Si $H = \ker \varphi$, alors $H^\perp = \text{Vect}(\varphi)$, car c'est une droite qui contient φ . Une droite est stable si et seulement si elle est engendrée par un vecteur propre. **Donc H est stable par u si et seulement si φ est vecteur propre de $u^\top$.**
4. Une forme $\varphi(x, y, z) = ax + by + cz$ a pour image $\varphi \circ u$, de coefficients $(a, b, c)A$. On cherche donc les vecteurs propres de $A^\top = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Pour la valeur propre 1, on trouve $c = 0$ et $a + b = 0$, d'où $(1, -1, 0)$. Pour la valeur propre 2, on trouve $a = c$ et $b = -a$, d'où $(1, -1, 1)$. Chaque sous-espace propre est une droite, car $\text{rg}(A^\top - \lambda I_3) = \text{rg}(A - \lambda I_3) = 2$. **Les plans stables sont donc exactement $x - y = 0$ et $x - y + z = 0$.** Le second est F_1 ; le premier est $\text{Vect}((1, 1, 0), e_3)$, somme des deux droites propres de A .

Corrigé de l'exercice 21 : Racines carrées de matrices

1. Supposons $R^2 = N$. Alors $R^6 = N^3 = 0$, donc R est nilpotente. D'après le cours, son indice est au plus 3, d'où $R^3 = 0$. Mais alors $N^2 = R^4 = R^3 R = 0$. Or $N^2 = E_{13} \neq 0$. **C'est absurde : $J_3(0)$ n'a pas de racine carrée.**
2. Comme $N^3 = 0$, on a $(I_3 + aN + bN^2)^2 = I_3 + 2aN + (a^2 + 2b)N^2$. Il faut $2a = 1$ et $a^2 + 2b = 0$. **Donc $a = \frac{1}{2}$ et $b = -\frac{1}{8}$** : la matrice $R = I_3 + \frac{1}{2}N - \frac{1}{8}N^2$ vérifie $R^2 = I_3 + N = J_3(1)$.
3. Écrivons $J_k(\lambda) = \lambda(I_k + M)$ avec $M = \frac{1}{\lambda}J_k(0)$, nilpotente d'indice k . Soit $\mu \in \mathbb{C}$ tel que $\mu^2 = \lambda$. Le développement en série entière $\sqrt{1+x} = \sum_{j \geq 0} c_j x^j$ vérifie $(\sum_{j=0}^{k-1} c_j x^j)^2 = 1+x$ sur $] -1, 1[$. Par unicité des coefficients, le polynôme $T = \sum_{j=0}^{k-1} c_j X^j$ vérifie $T^2 \equiv 1 + X$ modulo X^k . Comme $M^k = 0$, on en déduit $T(M)^2 = I_k + M$. **Ainsi $R = \mu T(M)$ vérifie $R^2 = J_k(\lambda)$, et R est un**

polynôme en $J_k(\lambda)$, puisque $M = \frac{1}{\lambda}(J_k(\lambda) - \lambda I_k)$.

4. Soit $A \in GL_n(\mathbb{C})$. On écrit $A = P \operatorname{diag}(J_{k_1}(\lambda_1), \dots, J_{k_s}(\lambda_s)) P^{-1}$. Toutes les valeurs propres sont non nulles, car A est inversible. La question précédente fournit des R_i tels que $R_i^2 = J_{k_i}(\lambda_i)$. Alors $R = P \operatorname{diag}(R_1, \dots, R_s) P^{-1}$ vérifie $R^2 = A$.

Corrigé de l'exercice 22 : Commutant d'un nilpotent cyclique

1. L'identité commute avec v . Si w_1 et w_2 commutent avec v , alors $w_1 + \alpha w_2$ aussi, et $w_1 w_2 v = w_1 v w_2 = v w_1 w_2$. Donc $\mathcal{C}(v)$ est une sous-algèbre. Enfin, tout polynôme en v commute avec v , d'où $\mathbb{K}[v] \subset \mathcal{C}(v)$.
2. Posons $Q = \sum_{k=0}^{n-1} c_k X^k$, de sorte que $w(x) = Q(v)(x)$. Pour $0 \leq j \leq n-1$, comme w commute avec v^j , on a $w(v^j(x)) = v^j(w(x)) = v^j Q(v)(x) = Q(v)(v^j(x))$. Ainsi w et $Q(v)$ coïncident sur la base $\mathcal{B}$. Donc $w = Q(v) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k v^k$.
3. La question 2 donne $\mathcal{C}(v) \subset \mathbb{K}[v]$, d'où l'égalité. Ensuite, $\pi_v = X^n$, donc $(\operatorname{id}, v, \dots, v^{n-1})$ est une base de $\mathbb{K}[v]$. Ainsi $\mathcal{C}(v) = \mathbb{K}[v]$ et $\dim \mathcal{C}(v) = n$.
4. Les matrices qui commutent avec $J = J_3(0)$ sont les $aI_3 + bJ + cJ^2$. Ce sont exactement les matrices $\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$, avec $a, b, c \in \mathbb{K}$.

Point de méthode : dès qu'un endomorphisme est cyclique, un vecteur cyclique suffit à déterminer entièrement tout endomorphisme qui commute avec lui.

Corrigé de l'exercice 23 : Matrices semblables à leur double

1. Deux matrices semblables ont le même spectre. De plus, les valeurs propres de $2A$ sont les 2λ , pour λ valeur propre de A . Si $\lambda \in \operatorname{Sp}(A)$, alors $2\lambda \in \operatorname{Sp}(2A) = \operatorname{Sp}(A)$. Par

réurrence, $2^j \lambda \in \text{Sp}(A)$ pour tout j . Or le spectre est fini ; si $\lambda \neq 0$, les $2^j \lambda$ seraient deux à deux distincts. Donc $\text{Sp}(A) = \{0\}$ et $\chi_A = X^n$. **Par le théorème de Cayley-Hamilton, $A^n = 0$: A est nilpotente.**

- On a $(\Delta^{-1} J_k(0) \Delta)_{ij} = 2^{-(i-1)} (J_k(0))_{ij} 2^{j-1}$. Ce coefficient n'est non nul que pour $j = i + 1$, où il vaut $2^{-(i-1)} \cdot 2^i = 2$. **Ainsi $\Delta^{-1} J_k(0) \Delta = 2 J_k(0)$.**
- Si A est nilpotente, on écrit $A = P J P^{-1}$ avec $J = \text{diag}(J_{k_1}(0), \dots, J_{k_s}(0))$. En posant $\Delta' = \text{diag}(\Delta_{k_1}, \dots, \Delta_{k_s})$, on obtient $\Delta'^{-1} J \Delta' = 2J$. Par conséquent, $2A = P \Delta'^{-1} J \Delta' P^{-1}$. **Donc $2A$ est semblable à J , puis à A .**
- Le même calcul avec $\Delta_\mu = \text{diag}(1, \mu, \dots, \mu^{k-1})$ donne $\Delta_\mu^{-1} J_k(0) \Delta_\mu = \mu J_k(0)$. **Toute matrice nilpotente est donc semblable à μA pour tout $\mu \neq 0$.**

Corrigé de l'exercice 24 : Problème : exponentielle diagonalisable

- Les matrices D et N commutent, donc $\exp(A) = \exp(D + N) = \exp(D) \exp(N)$. Ensuite, si $D = Q \Lambda Q^{-1}$ avec Λ diagonale, on a $\exp(D) = Q \exp(\Lambda) Q^{-1}$, et $\exp(\Lambda)$ est diagonale. **Donc $\exp(D)$ est diagonalisable.**
- Comme $N^n = 0$, on a $\exp(N) - I_n = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{N^k}{k!} = N \sum_{k=0}^{n-2} \frac{N^k}{(k+1)!}$. Le terme d'indice $k = n-1$ de S donne $N^n = 0$, donc on peut l'ajouter : $\exp(N) - I_n = NS$. Ensuite, $S = I_n + NT$ avec T polynôme en N . La matrice NT est nilpotente, car N et T commutent. **Donc S est inversible (son inverse est $\sum_j (-NT)^j$) et commute avec N .**
- Posons $D' = \exp(D)$ et $N' = \exp(D)(\exp(N) - I_n)$. Alors $\exp(A) = D' + N'$, et D' est diagonalisable. Ensuite, $\exp(D)$ est limite de polynômes en D , donc un polynôme en D , puisque $\mathbb{C}[D]$ est un sous-espace fermé. Il commute donc avec N , avec S et avec N' . Enfin, $N'^n = \exp(nD) N^n S^n = 0$. **Par unicité de la décomposition de Dunford, celle de $\exp(A)$ est $D' + N'$.**
- La matrice $\exp(A)$ est diagonalisable si et seulement si sa partie nilpotente $N' = \exp(D)NS$ est nulle. Comme $\exp(D)$ et S sont inversibles, cela équivaut à $N = 0$, c'est-à-dire à $A = D$. **Donc $\exp(A)$ est diagonalisable si et seulement si**

A l'est. Au passage, $\exp(N) - I_n = NS$ est nul si et seulement si $N = 0$:
 $\exp(N) = I_n \Leftrightarrow N = 0$.

5. On a $A = 2\pi K$, où K est la matrice de l'exercice 15. Ainsi $\exp(A)$ est la rotation d'angle 2π . **Donc** $\exp(A) = I_2$, qui est diagonale. Cependant, $\chi_A = X^2 + 4\pi^2$ n'a pas de racine réelle, donc A n'est pas diagonalisable sur $\mathbb{R}$. **L'équivalence devient fausse avec « diagonalisable sur $\mathbb{R}$ »** ; elle reste vraie pour la diagonalisabilité sur $\mathbb{C}$, puisque A a deux valeurs propres distinctes $\pm 2i\pi$.

Point de méthode : l'unicité de la décomposition de Dunford est l'outil clé : on exhibe un couple qui convient, puis on lit la partie nilpotente.

[Revenir aux énoncés des exercices](#)

Pour aller plus loin en L3

- Le cours : [réduction de Jordan, cours de maths en L3](#)
- Les énoncés : [exercices de maths en L3 sur réduction de Jordan](#)
- Chapitre précédent : [Corps, extensions et corps finis](#)
- Chapitre suivant : [Calcul différentiel dans les espaces normés](#)
- Tester vos connaissances : [QCM de maths en L3 par chapitre](#)
- Le sommaire : [tous les chapitres de maths de L3](#) et la [licence de maths de L1 à L3](#)