

Récurrance et dénombrement

I. L'ensemble des entiers naturels et le bon ordre

Vous manipulez les entiers naturels depuis l'école. En licence, on isole cependant les propriétés de $\mathbb{N}$ qui fondent tous les raisonnements de ce chapitre. Nous admettons l'existence de $\mathbb{N}$, muni de son addition, de sa multiplication et de son ordre usuel $\leq$. Ensuite, nous retenons trois propriétés fondamentales.

Propriété :

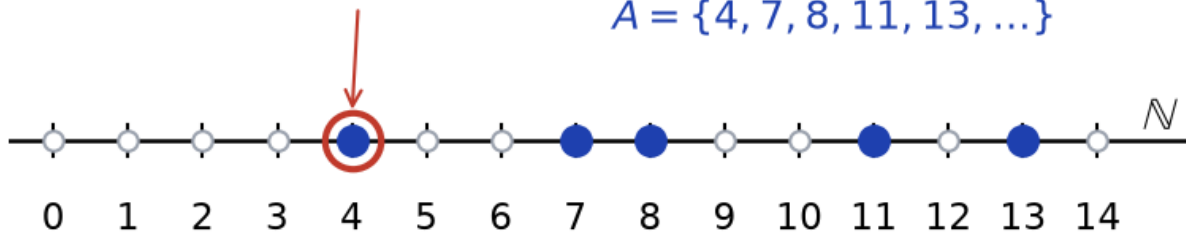
L'ensemble $\mathbb{N}$ vérifie les trois propriétés suivantes.

- Toute partie non vide de $\mathbb{N}$ possède un plus petit élément : c'est la **propriété du bon ordre**.
- Toute partie non vide et majorée de $\mathbb{N}$ possède un plus grand élément.
- L'ensemble $\mathbb{N}$ n'est pas majoré.

La propriété du bon ordre est l'axiome central. En effet, elle ne vaut ni dans $\mathbb{Z}$ ni dans $\mathbb{R}_+$: la partie $]0, 1]$ de $\mathbb{R}_+$ n'a pas de plus petit élément. Comme le montre la figure ci-dessous, une partie A de $\mathbb{N}$ peut être infinie, mais elle possède toujours un premier élément.

plus petit élément : $\min A = 4$

$$A = \{4, 7, 8, 11, 13, \dots\}$$



Démonstration :

Montrons la deuxième propriété à partir du bon ordre. Soit A une partie non vide de $\mathbb{N}$ majorée par un entier M . L'ensemble B des majorants de A dans $\mathbb{N}$ contient M , donc il est non vide. Par le bon ordre, B admet un plus petit élément b . Si $b = 0$, alors $A = \{0\}$ et le résultat est clair. Sinon, $b-1$ n'est pas un majorant de A : il existe donc $a \in A$ avec $a > b-1$, c'est-à-dire $a \geq b$. Comme $a \leq b$, on obtient $a = b$. Ainsi b appartient à A et le majore : c'est son plus grand élément.

Exemple :

Il n'existe pas de suite (u_n) d'entiers naturels strictement décroissante. En effet, l'ensemble $\{u_n, n \in \mathbb{N}\}$ est une partie non vide de $\mathbb{N}$. Il a donc un plus petit élément u_p . Or $u_{p+1} < u_p$, ce qui contredit la minimalité. Ce principe s'appelle la **descente infinie**.

II. Le raisonnement par récurrence

1. Récurrence simple

Le raisonnement par récurrence n'est pas un axiome supplémentaire. Au contraire, il découle directement du bon ordre, comme le montre la démonstration suivante.

Théorème :

Soit $n_0 \in \mathbb{N}$ et $\mathcal{P}(n)$ une propriété définie pour $n \geq n_0$. On suppose :

- (initialisation) $\mathcal{P}(n_0)$ est vraie ;
- (hérédité) pour tout $n \geq n_0$, $\mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$.

Alors $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier $n \geq n_0$.

Démonstration :

Raisonnons par l'absurde. Supposons que l'ensemble $F = \{n \geq n_0 : \text{athcal} \mathcal{P}(n) \text{ faussse}\}$ soit non vide. Par le bon ordre, il possède un plus petit élément m . D'abord, $m \neq n_0$ car $\mathcal{P}(n_0)$ est vraie. Donc $m - 1 \geq n_0$, et $m - 1 \notin F$ par minimalité de m . Ainsi $\mathcal{P}(m-1)$ est vraie. Par hérédité, $\mathcal{P}(m)$ est vraie, ce qui contredit $m \in F$. Finalement, F est vide.

Méthode :

Pour rédiger une récurrence correctement :

- énoncez la propriété $\mathcal{P}(n)$ avec précision, en fixant n ;
- vérifiez l'initialisation par un calcul explicite ;

- pour l'hérédité, fixez un entier $n \geq n_0$, supposez $\mathcal{P}(n)$, puis démontrez $\mathcal{P}(n+1)$;
- concluez en citant le principe de récurrence.

N'écrivez jamais « supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie pour tout n » : c'est justement ce qu'il faut démontrer.

Exemple :

Montrons que $2^n \geq n+1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Pour $n = 0$, on a $2^0 = 1 \geq 1$. Soit ensuite $n \in \mathbb{N}$ tel que $2^n \geq n+1$. Alors $2^{n+1} = 2 \cdot 2^n \geq 2n + 2 \geq n + 2$. La propriété est donc héréditaire. Par récurrence, elle est vraie pour tout n .

Attention :

Les deux étapes sont indispensables. Par exemple, la propriété « 9 divise $10^n + 1$ » est héréditaire, car $10^{n+1} + 1 = 10(10^n + 1) - 9$. Pourtant, elle n'est jamais vraie : $10^n + 1$ a pour reste 2 dans la division par 9.

2. Récurrence double et récurrence forte

Certaines suites sont définies à partir des deux termes précédents. Dans ce cas, l'hérédité doit s'appuyer sur deux rangs. D'autres énoncés demandent même tous les rangs antérieurs.

Théorème :

(Récurrence double) Si $\mathcal{P}(n_0)$ et $\mathcal{P}(n_0+1)$ sont vraies et si, pour tout $n \geq n_0$, $(\mathcal{P}(n) \text{ et } \mathcal{P}(n+1)) \Rightarrow \mathcal{P}(n+2)$, alors $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \geq n_0$.

(Récurrence forte) Si $\mathcal{P}(n_0)$ est vraie et si, pour tout $n \geq n_0$, la validité de $\mathcal{P}(n_0), \dots, \mathcal{P}(n)$ entraîne celle de $\mathcal{P}(n+1)$, alors $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \geq n_0$.

Démonstration :

Les deux énoncés se ramènent à une récurrence simple. Pour la récurrence forte, posons $\mathcal{Q}(n)$: « $\mathcal{P}(k)$ est vraie pour tout $k \in [[n_0, n]]$ ». D'abord, $\mathcal{Q}(n_0)$ équivaut à $\mathcal{P}(n_0)$. Ensuite, si $\mathcal{Q}(n)$ est vraie, l'hypothèse donne $\mathcal{P}(n+1)$, donc $\mathcal{Q}(n+1)$. Ainsi $\mathcal{Q}(n)$ est vraie pour tout n , et a fortiori $\mathcal{P}(n)$. Pour la récurrence double, on applique le même argument à $\mathcal{Q}(n)$: « $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1)$ ».

Exemple :

Tout entier $n \geq 2$ est un produit de nombres premiers. En effet, 2 est premier. Soit $n \geq 2$ tel que tous les entiers de $[[2, n]]$ soient des produits de nombres premiers. Si $n+1$ est premier, c'est terminé. Sinon, $n+1 = ab$ avec $2 \leq a, b \leq n$. Par hypothèse de récurrence forte, a et b sont des produits de nombres premiers, donc $n+1$ aussi.

III. Symboles somme et produit

1. Définitions et règles de calcul

Notation :

Soit $m \leq n$ deux entiers et $a_m, \dots, a_n$ des nombres réels ou complexes. On note

$$\sum_{k=m}^n a_k = a_m + a_{m+1} + \dots + a_n \text{ et } \prod_{k=m}^n a_k = a_m \times a_{m+1} \times \dots \times a_n.$$

Si $m > n$, la somme vide vaut 0 et le produit vide vaut 1. L'indice k est muet : on peut le renommer sans rien changer.

Rigoureusement, ces symboles se définissent par récurrence : $\sum_{k=m}^{n+1} a_k = \sum_{k=m}^n a_k + a_{n+1}$. Par conséquent, toutes leurs propriétés se démontrent par récurrence sur le nombre de termes.

Propriété :

Pour des nombres a_k, b_k et des scalaires λ, μ :

- linéarité : $\sum_{k=m}^n (\lambda a_k + \mu b_k) = \lambda \sum_{k=m}^n a_k + \mu \sum_{k=m}^n b_k$;
- relation de Chasles : $\sum_{k=m}^n a_k = \sum_{k=m}^p a_k + \sum_{k=p+1}^n a_k$ pour $m \leq p < n$;
- somme d'une constante : $\sum_{k=m}^n c = (n - m + 1) c$;
- produit : $\prod_{k=m}^n (a_k b_k) = \prod_{k=m}^n a_k \prod_{k=m}^n b_k$ et $\prod_{k=m}^n \lambda = \lambda^{n-m+1}$.

Attention :

En général, $\sum a_k b_k \neq \sum a_k \sum b_k$ et $\prod (a_k + b_k) \neq \prod a_k + \prod b_k$. De même,

$$\prod_{k=1}^n (\lambda a_k) = \lambda^n \prod_{k=1}^n a_k, \text{ et non } \lambda \prod a_k.$$

2. Changements d'indice

Un changement d'indice est une bijection entre deux ensembles d'indices. En pratique, deux changements suffisent presque toujours : la translation $j = k + p$ et le retournement $j = n - k$.

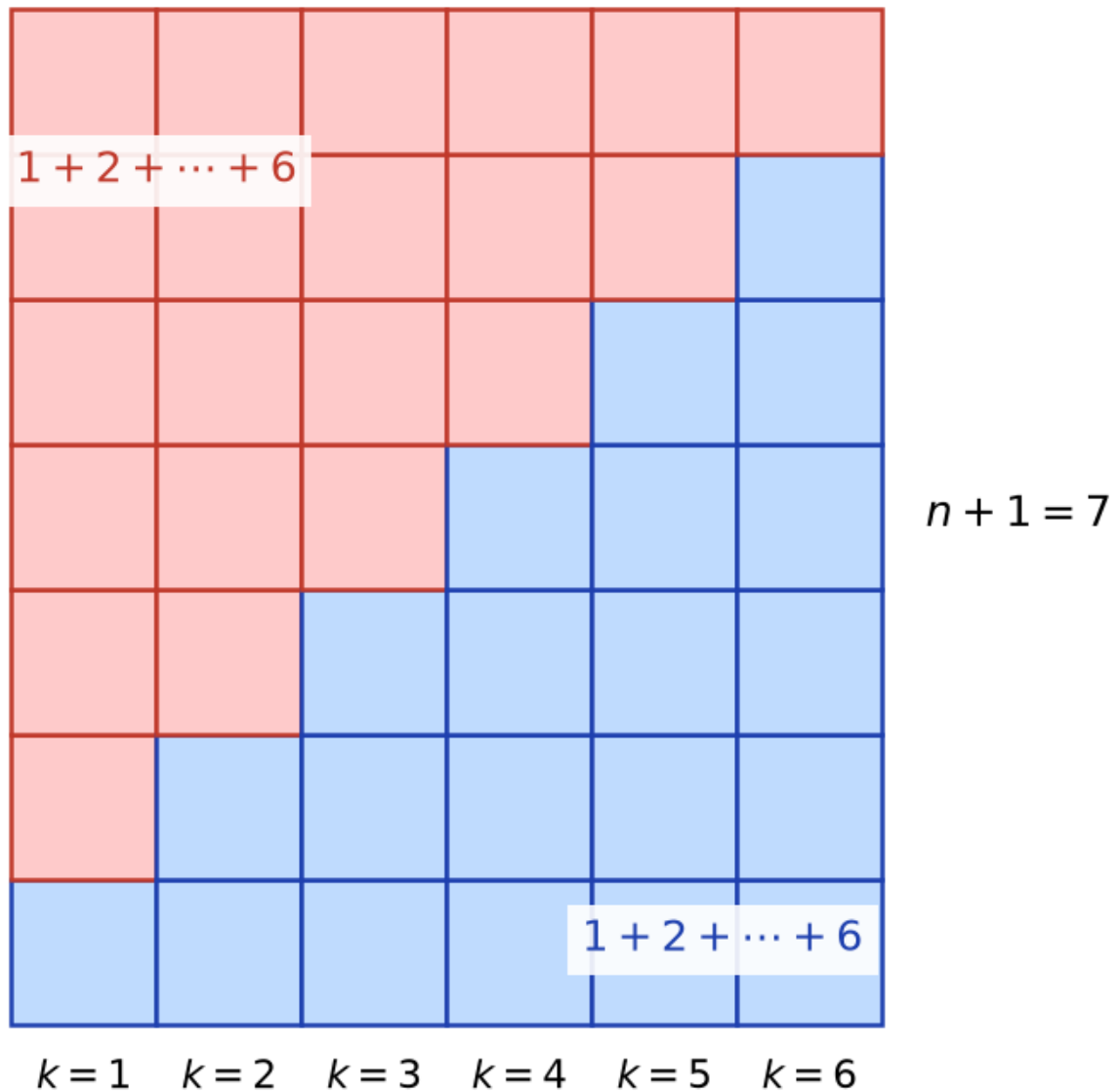
Propriété :

$$\sum_{k=m}^n a_{k+p} = \sum_{j=m+p}^{n+p} a_j \text{ et } \sum_{k=0}^n a_{n-k} = \sum_{j=0}^n a_j.$$

Exemple :

Calculons $S_n = \sum_{k=0}^n k$ par retournement. On a aussi $S_n = \sum_{k=0}^n (n - k)$. En additionnant,
 $2S_n = \sum_{k=0}^n n = n(n+1)$. Donc $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$. La figure ci-dessous traduit ce calcul : deux escaliers identiques forment un rectangle de $n \times (n+1)$ cases.

$n = 6$ colonnes



3. Sommes doubles

Une somme indexée par un ensemble fini de couples peut se calculer en sommant d'abord sur une variable, puis sur l'autre. Ainsi, pour une somme rectangulaire,

$\sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{i,j} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{i,j} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n a_{i,j}$. Pour une somme triangulaire, il faut en revanche adapter les bornes :

$$\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} a_{i,j} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^j a_{i,j} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=i}^n a_{i,j}.$$

IV. Sommes télescopiques et sommes usuelles

Proposition :

Pour tous nombres $u_m, \dots, u_{n+1}$, on a $\sum_{k=m}^n (u_{k+1} - u_k) = u_{n+1} - u_m$. De même, si les u_k sont non nuls, $\prod_{k=m}^n \frac{u_{k+1}}{u_k} = \frac{u_{n+1}}{u_m}$.

Démonstration :

Par linéarité et translation d'indice, $\sum_{k=m}^n u_{k+1} - \sum_{k=m}^n u_k = \sum_{j=m+1}^{n+1} u_j - \sum_{k=m}^n u_k$. Les termes d'indice $m+1$ à n se simplifient. Il reste donc $u_{n+1} - u_m$. Le cas du produit est identique.

Méthode :

Pour calculer une somme par télescopage, cherchez à écrire le terme général sous la forme $u_{k+1} - u_k$. Les outils usuels sont la décomposition en éléments simples, par exemple $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$, et les identités du type $k \cdot k! = (k+1)! - k!$.

Exemple :

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}.$$

Théorème :

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout nombre complexe $q \neq 1$:

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}, \quad \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \quad \sum_{k=0}^n q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

Plus généralement, $a^{n+1} - b^{n+1} = (a - b) \sum_{k=0}^n a^k b^{n-k}.$

Démonstration :

Pour la somme géométrique, $(1 - q) \sum_{k=0}^n q^k = \sum_{k=0}^n (q^k - q^{k+1}) = 1 - q^{n+1}$ par télescopage. Pour les carrés, on télescope $(k+1)^3 - k^3 = 3k^2 + 3k + 1$ de $k = 1$ à n . On obtient $(n+1)^3 - 1 = 3 \sum k^2 + \frac{3n(n+1)}{2} + n$. Il reste ensuite à isoler $\sum k^2$ et à factoriser par $n+1$.

V. Ensembles finis : les bases du dénombrement

1. Cardinal d'un ensemble fini

Dénombrer, c'est compter les éléments d'un ensemble sans les énumérer. Le cadre rigoureux repose sur les bijections. On note $[[1, n]] = \{1, 2, \dots, n\}$, avec $[[1, 0]] = \emptyset$.

Lemme :

S'il existe une injection de $[[1, n]]$ dans $[[1, p]]$, alors $n \leq p$. En particulier, s'il existe une bijection entre ces deux ensembles, alors $n = p$.

Démonstration :

On raisonne par récurrence sur n . Le cas $n = 0$ est clair. Supposons le résultat vrai au rang n , et soit f injective de $[[1, n+1]]$ dans $[[1, p]]$. Alors $p \geq 1$. Soit τ la transposition de $[[1, p]]$ qui échange $f(n+1)$ et p . L'application $\tau \circ f$ est injective et envoie $n+1$ sur p . Sa restriction à $[[1, n]]$ est donc une injection dans $[[1, p-1]]$. Par hypothèse de récurrence, $n \leq p-1$, donc $n+1 \leq p$.

Définition :

Un ensemble E est **fini** s'il existe $n \in \mathbb{N}$ et une bijection de $[[1, n]]$ sur E . D'après le lemme, cet entier n est unique : c'est le **cardinal** de E , noté $|E|$, $\text{Card } E$ ou $\# E$.

Propriété :

Soit E et F deux ensembles finis.

- Toute partie A de E est finie et $|A| \leq |E|$, avec égalité si et seulement si $A = E$.
- Il existe une bijection de E sur F si et seulement si $|E| = |F|$.
- Si $|E| = |F|$, une application de E dans F est injective si et seulement si elle est surjective, si et seulement si elle est bijective.

Le deuxième point est le principe de base du dénombrement par bijection. Pour compter les éléments d'un ensemble, on le met en bijection avec un ensemble plus simple.

2. Cardinal d'une union, d'un produit, de l'ensemble des parties

Théorème :

Soit A , B deux parties finies d'un ensemble E , et F un ensemble fini.

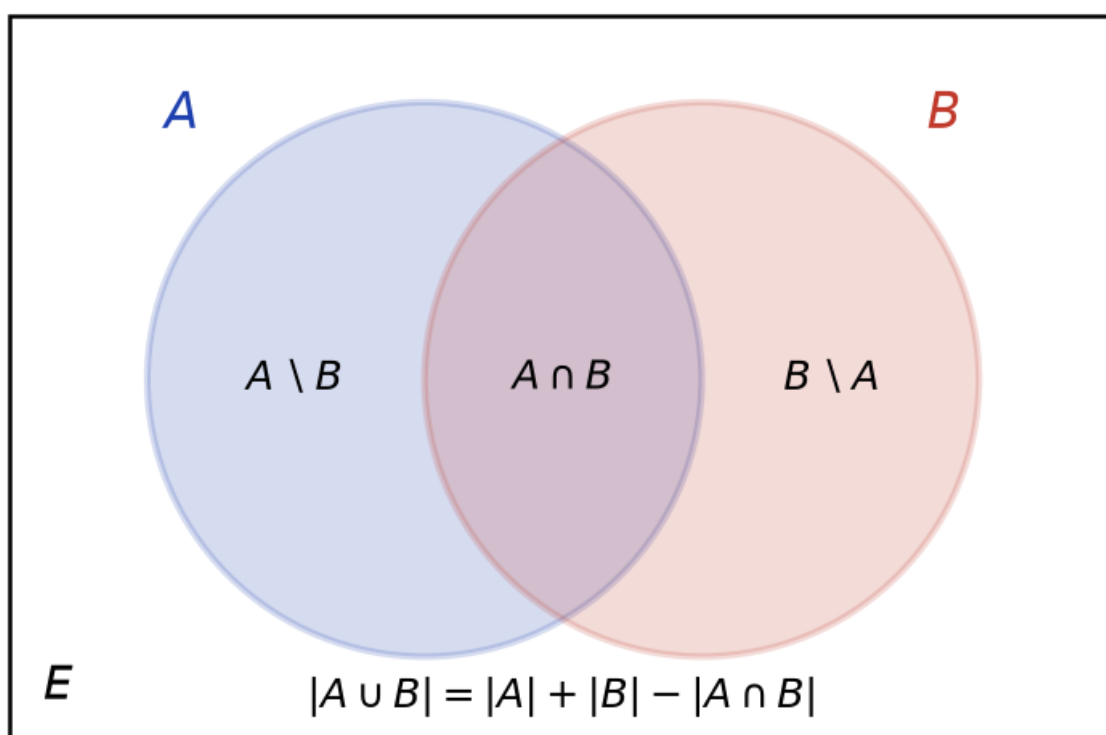
- Si $A \cap B = \emptyset$, alors $|A \cup B| = |A| + |B|$.
- Dans tous les cas, $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$, et $|E \setminus A| = |E| - |A|$ si E est fini.
- $|A \times F| = |A| \times |F|$.
- $|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|}$.

Démonstration :

Si $a = |A|$ et $b = |B|$ avec $A \cap B = \emptyset$, on recolle une bijection $\varphi : [1, a] \rightarrow A$ et une bijection $\psi : [1, b] \rightarrow B$. L'application qui envoie $k \leq a$ sur $\varphi(k)$ et $k > a$ sur $\psi(k - a)$ est une bijection de $[1, a+b]$ sur $A \cup B$. Ensuite, $A \cup B$ est la réunion disjointe

de A et de $B \setminus A$, et B celle de $A \cap B$ et de $B \setminus A$. On en déduit la formule générale. Pour le produit, $A \times F$ est la réunion disjointe des $\{x\} \times F$, qui ont chacun $|F|$ éléments. Enfin, l'application $X \rightarrow 1_X$ est une bijection de $\mathcal{P}(A)$ sur l'ensemble des applications de A dans $\{0, 1\}$, qui en compte $2^{|A|}$ d'après la partie suivante.

La formule de l'union se comprend bien sur un diagramme de Venn. Comme le montre la figure ci-dessous, la somme $|A| + |B|$ compte deux fois les éléments de $A \cap B$.



Remarque :

Pour trois parties, la même idée donne la **formule du crible** :

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|.$$

VI. Listes, arrangements et permutations

Définition :

Soit E un ensemble à n éléments et $p \in \mathbb{N}$. Une **p -liste** de E est un élément de E^p , c'est-à-dire une suite ordonnée $(x_1, \dots, x_p)$. Un **arrangement** est une p -liste d'éléments deux à deux distincts. Une **permutation** de E est une bijection de E sur lui-même.

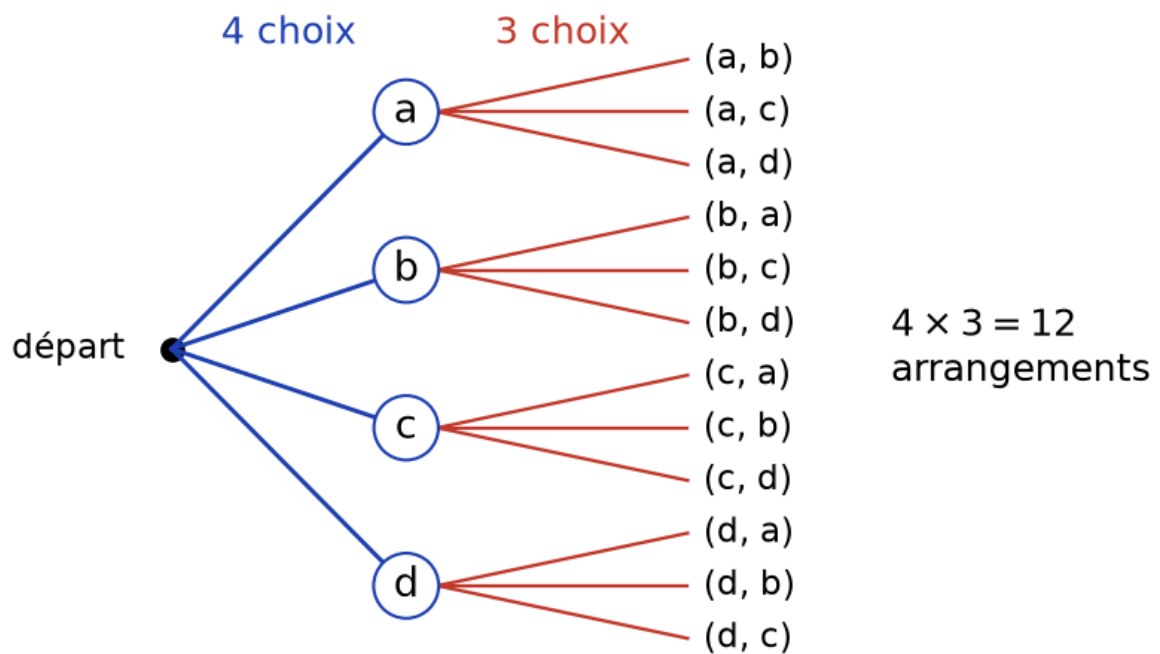
Théorème :

- Le nombre de p -listes de E vaut n^p . Ainsi, il y a $|F|^{|E|}$ applications de E dans F .
- Pour $p \leq n$, le nombre d'arrangements de p éléments de E vaut $A_n^p = n(n-1) \dots (n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!}$. Si $p > n$, il vaut 0 .
- Le nombre de permutations de E vaut $n!$.

Démonstration :

Le premier point découle de $|E^p| = |E|^p$, obtenu par récurrence sur p grâce au cardinal d'un produit. Pour les arrangements, raisonnons par récurrence sur p . On regroupe les arrangements de longueur $p+1$ selon leurs p premiers termes. Chaque arrangement de longueur p se prolonge de $n-p$ façons exactement. D'où $A_n^{p+1} = (n-p) A_n^p$. Enfin, une application de E dans E correspond à la liste de ses images. Elle est bijective si et seulement si elle est injective, c'est-à-dire si cette liste est un arrangement de n éléments.

En pratique, on visualise ces choix successifs par un arbre. Par exemple, la figure ci-dessous énumère les arrangements de 2 lettres prises dans $\{a, b, c, d\}$.



Exemple :

Un code de carte bancaire comporte 4 chiffres. Il y a donc $10^4 = 10\,000$ codes possibles. Parmi eux, $A_{10}^4 = 10 \times 9 \times 8 \times 7 = 5\,040$ ont leurs chiffres deux à deux distincts.

VII. Combinaisons, formule de Pascal et binôme de Newton

1. Combinaisons et coefficients binomiaux

Définition :

Soit E un ensemble à n éléments et $k \in \mathbb{N}$. Une **combinaison** de k éléments de E est une partie de E à k éléments. Leur nombre est noté $\binom{n}{k}$, lu « k parmi n ».

Théorème :

Pour $0 \leq k \leq n$, on a $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$. Pour $k > n$, $\binom{n}{k} = 0$.

Démonstration :

Considérons l'application qui associe à un arrangement $(x_1, \dots, x_k)$ la partie $\{x_1, \dots, x_k\}$. Elle est surjective sur l'ensemble des combinaisons. De plus, chaque partie à k éléments est l'image d'exactly $k!$ arrangements, un par ordre possible. Par le principe des bergers, $A_n^k = k! \binom{n}{k}$. On divise alors par $k!$.

Propriété :

Pour $1 \leq k \leq n$:

- symétrie : $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$;
- formule du capitaine : $k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}$;
- somme : $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$.

La symétrie se démontre par bijection : le passage au complémentaire $X \rightarrow E \setminus X$ échange les parties à k éléments et les parties à $n-k$ éléments. De même, la somme compte les parties de E rangées selon leur cardinal.

2. Formule de Pascal

Théorème :

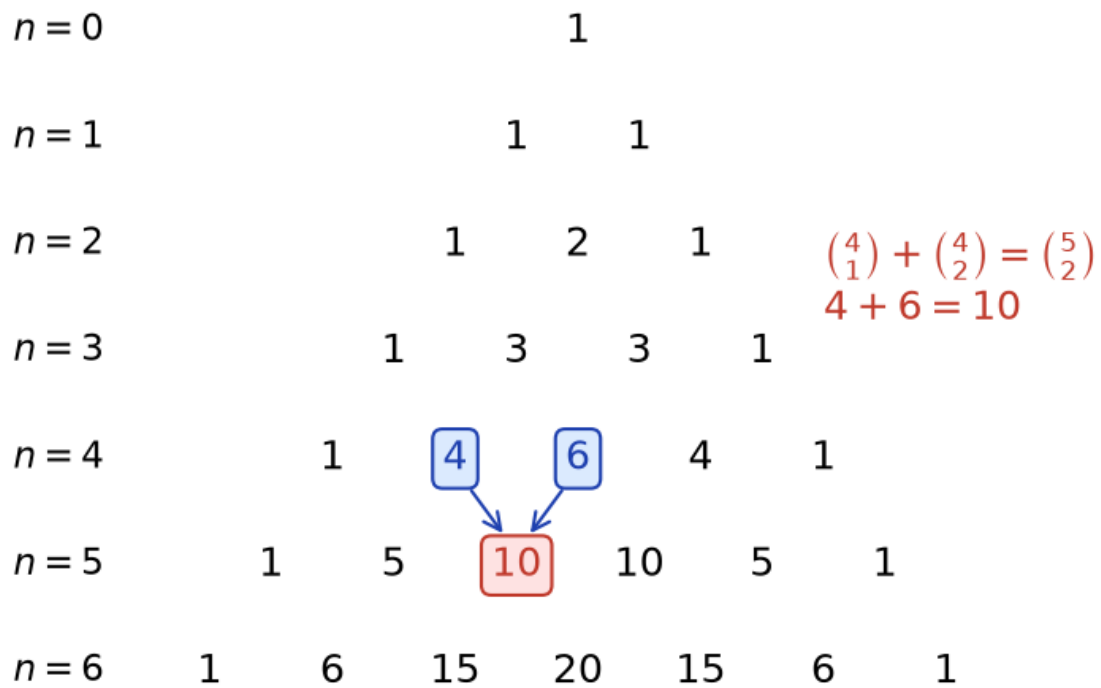
(**Formule de Pascal**) Pour tous entiers $n \geq 1$ et $1 \leq k \leq n$,

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}.$$

Démonstration :

Fixons un élément a de E , avec $|E| = n$. Les parties à k éléments de E se répartissent en deux classes disjointes. D'une part, celles qui contiennent a : elles correspondent, en retirant a , aux parties à $k-1$ éléments de $E \setminus \{a\}$. D'autre part, celles qui ne contiennent pas a : ce sont les parties à k éléments de $E \setminus \{a\}$. On additionne les deux cardinaux.

Cette formule permet de construire le **triangle de Pascal** ligne par ligne. Comme le montre la figure ci-dessous, chaque coefficient est la somme des deux coefficients placés au-dessus de lui.



Méthode :

Pour démontrer une identité combinatoire, deux voies sont possibles.

- Par le calcul : on utilise la formule factorielle, la formule de Pascal ou une récurrence.
- Par double comptage : on compte un même ensemble de deux façons, ou l'on construit une bijection entre deux ensembles.

Par exemple, pour $k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}$, on compte les comités de k personnes munis d'un président. On choisit soit le comité puis le président, soit le président puis les $k-1$ autres membres.

3. Formule du binôme de Newton

Théorème :

Pour tous nombres complexes a , b et tout $n \in \mathbb{N}$,

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Démonstration :

Procédons par récurrence sur n . Pour $n = 0$, les deux membres valent 1. Supposons la formule vraie au rang n . Alors

$(a+b)^{n+1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k}$. Dans la première somme, on pose $j = k + 1$. Ensuite, on regroupe les termes en $a^j b^{n+1-j}$:

$$(a+b)^{n+1} = b^{n+1} + \sum_{j=1}^n \left[\binom{n}{j-1} + \binom{n}{j} \right] a^j b^{n+1-j} + a^{n+1}.$$

La formule de Pascal donne alors le rang $n+1$.

Exemple :

Avec $a = b = 1$, on retrouve $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$. Avec $a = -1$ et $b = 1$, on obtient

$\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} = 0$ pour $n \geq 1$. Autrement dit, une partie d'un ensemble non vide a autant de chances d'avoir un cardinal pair qu'impair.

Remarque :

La formule reste vraie dans tout anneau, à condition que a et b commutent. Vous la retrouverez donc avec les matrices, sous l'hypothèse $AB = BA$.

Ce qu'il faut retenir

- Toute partie non vide de $\mathbb{N}$ a un plus petit élément : ce bon ordre fonde la récurrence et la descente infinie.
- Une récurrence comporte une initialisation, une hérédité rédigée à n fixé et une conclusion.
- La récurrence double sert pour les suites d'ordre deux, la récurrence forte quand l'hérédité utilise tous les rangs antérieurs.
- Les changements d'indice usuels sont la translation $j = k + p$ et le retournement $j = n - k$.
- Une somme télescopique vérifie $\sum_{k=m}^n (u_{k+1} - u_k) = u_{n+1} - u_m$.
- Les sommes usuelles : $\frac{n(n+1)}{2}$, $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ et $\frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$.
- Le cardinal se définit par bijection ; $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$, $|A \times B| = |A||B|$ et $|\mathcal{P}(E)| = 2^{|E|}$.
- On compte n^p listes, $\frac{n!}{(n-p)!}$ arrangements, $n!$ permutations et $\binom{n}{k}$ combinaisons.
- La formule de Pascal donne le binôme de Newton par récurrence.

- Une identité combinatoire se prouve par le calcul ou par double comptage.

Questions fréquentes sur récurrence et dénombrement

Quand faut-il utiliser une récurrence forte plutôt qu'une récurrence simple ?

On utilise une récurrence forte quand, pour démontrer la propriété au rang $n+1$, on a besoin d'un rang antérieur qui n'est pas forcément n . C'est le cas pour la décomposition en facteurs premiers ou pour l'écriture binaire, où l'on s'appuie sur $n/2$. La récurrence forte n'est pas plus puissante en théorie : elle se ramène à une récurrence simple sur la propriété « vraie jusqu'au rang n ».

Comment savoir s'il faut compter des listes, des arrangements ou des combinaisons ?

Posez-vous deux questions : l'ordre compte-t-il, et les répétitions sont-elles permises ? Si l'ordre compte avec répétitions, on compte des listes, soit n^p . Si l'ordre compte sans répétition, on compte des arrangements, soit $\frac{n!}{(n-p)!}$. Si l'ordre ne compte pas et sans répétition, on compte des combinaisons, soit $\binom{n}{p}$.

Qu'est-ce qu'une démonstration par double comptage ?

On compte un même ensemble fini de deux manières différentes, puis on égale les deux résultats. Par exemple, compter les comités de k personnes munis d'un président donne

$k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}$. Une variante consiste à construire une bijection entre deux ensembles pour montrer qu'ils ont le même cardinal.

Pourquoi la récurrence découle-t-elle du bon ordre ?

Si une propriété héréditaire et initialisée était fausse pour un entier, l'ensemble des contre-exemples serait une partie non vide de $\mathbb{N}$. Il aurait donc un plus petit élément m , différent du rang initial. La propriété serait alors vraie au rang $m-1$, donc au rang m par hérédité, ce qui est contradictoire.

Pour aller plus loin en L1

- Les énoncés : [exercices de maths en L1 sur récurrence et dénombrement](#)
- Les solutions : [corrigé des exercices sur récurrence et dénombrement](#)
- À maîtriser avant : [Logique, raisonnement et ensembles](#), [Applications et relations binaires](#)
- Chapitre précédent : [Applications et relations binaires](#)
- Chapitre suivant : [Nombres complexes et trigonométrie](#)
- Le sommaire : [tous les chapitres de maths de L1](#) et la [licence de maths de L1 à L3](#)