

Raisonnement par récurrence

Exercice 1 :

Soit (U_n) la suite définie par

$$\begin{cases} U_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N} \quad U_{n+1} = \sqrt{U_n + 2} \end{cases}$$

Démontrer par récurrence que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, U_n \leq 2}$$

soit la propriété de récurrence : $P(n) = \{ \text{Pour } n \in \mathbb{N}, U_n \leq 2 \}$

Initialisation : $P(0)$

$$U_0 = 2 \leq 2 \text{ donc } P(0) \text{ vraie.}$$

Supposons qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $P(n)$ soit vraie, Montrons $P(n+1)$ reste vraie.

$$0 \leq U_n \leq 2 \Leftrightarrow 0 \leq U_n + 2 \leq 4 \Leftrightarrow \sqrt{U_n + 2} \leq \sqrt{4} \Leftrightarrow U_{n+1} \leq 2$$

donc $P(n+1)$ reste vraie

$$(P(0); \forall n \in \mathbb{N}, P(n) \Rightarrow P(n+1))$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, U_n \leq 2$$

Exercice 2 :

Soit (U_n) la suite définie par

$$\begin{cases} U_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = 2U_n - 3 \end{cases}$$

Démontrer par récurrence que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, U_n = 3 - 2^n}$$

soit la propriété de récurrence : $P(n) = \{ \text{Pour } n \in \mathbb{N}, U_n = 3 - 2^n \}$

Initialisation : $P(0)$

$$U_0 = 2 = 3 - 2^0 \text{ donc } P(0) \text{ vraie.}$$

Supposons qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $P(n)$ soit vraie, Montrons $P(n+1)$ reste vraie.

$$U_n =$$

donc $P(n+1)$ reste vraie

$$(P(0); \forall n \in \mathbb{N}, P(n) \Rightarrow P(n+1))$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, U_n = 3 - 2^n$$

Exercice 3 :

On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, S_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \sum_{k=1}^n k^2.$$

a. Calculer S_1, S_2, S_3, S_4 .

$$S_1 =$$

b. Exprimer S_{n+1} en fonction de S_n .

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, S_{n+1} = S_n + (n+1)^2$$

c. Démontrer par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

soit la propriété de récurrence :

$$P(n) = \left\{ \text{Pour } n \in \mathbb{N}^*, S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right\}$$

Initialisation : $P(1)$

$$S_1 = 1 = \frac{1(1+1)(2 \times 1 + 1)}{6} \text{ donc } P(1) \text{ vraie.}$$

Supposons qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $P(n)$ soit vraie, Montrons $P(n+1)$ reste vraie.

$$\begin{aligned}
S_{n+1} &= S_n + (n+1)^2 \Leftrightarrow S_{n+1} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \\
&\Leftrightarrow S_{n+1} = \frac{n(n+1)(2n+1) + 6(n+1)^2}{6} \\
&\Leftrightarrow S_{n+1} = \frac{(n+1)[n(2n+1) + 6(n+1)]}{6} \\
&\Leftrightarrow S_{n+1} = \frac{(n+1)(2n^2 + 7n + 6)}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2(n+1)+3)}{6}
\end{aligned}$$

donc $P(n+1)$ reste vraie

$$(P(0); \forall n \in \mathbb{N}^*, P(n) \Rightarrow P(n+1))$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*, S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Exercice 4 :

1. Le résultat est vrai pour $n = 1$ car :

$$x^{1+1} - y^{1+1} = x^2 - y^2 = (x+y)(x-y)$$

Et on sait que $x+y = x+y$ et $x-y = x-y$.

Supposons maintenant que le résultat soit vrai pour un certain entier naturel n . On a :

$$\begin{aligned}
x^{n+2} - y^{n+2} &= x(x^{n+1}) - y(y^{n+1}) \\
&= x(x^n x - y^n y) - y(y^n y - x^n x) && \text{par la formule obtenue pour } n=1 \\
&= x^{n+1}(x - y) + y(x^n - y^n) \\
&= y(x^n - y^n) + (x - y)x^{n+1}
\end{aligned}$$

Donc, le résultat est bien vrai pour tout entier naturel n .

2. Quand $k = n$, on a :

$$x^k y^{n-k} = x^n y^{n-n} = x^n$$

3. L'hypothèse est vraie pour $n = 1$ car :

$$x^1 - y^1 = x - y = (x - y) \sum_{k=0}^0 x^k y^{1-k}$$

Supposons maintenant que le résultat soit vrai pour un certain entier naturel n . On a :

$$x^{n+1} - y^{n+1} = y(x^n - y^n) + (x - y)x^{n+1} \text{ par la formule obtenue pour la question 1,}$$

et donc :

$$x^{n+1} - y^{n+1} = y(x-y) \sum_{k=0}^{n-1} x^k y^{n-k} + (x-y)x^{n+1} = (x-y) \left(\sum_{k=0}^{n-1} x^k y^{n-k} + x^n \right)$$

Donc, le résultat est vrai pour tout entier naturel n .

Exercice 5 :

1. Soient a et x deux nombres tels que $a \in \mathbb{Q}$ et $x \notin \mathbb{Q}$.

On suppose par l'absurde que $a+x \in \mathbb{Q}$.

Alors il existe deux entiers relatifs p et q avec $q \neq 0$ tels que $a+x = \frac{p}{q}$.

On peut réarranger cette équation pour obtenir $x = \frac{p}{q} - a$, qui est donc un nombre rationnel puisque p , q et a sont des nombres rationnels, ce qui contredit l'hypothèse que $x \notin \mathbb{Q}$.

Donc, $a+x \notin \mathbb{Q}$.

2. Soient a et x deux nombres tels que $a \in \mathbb{Q}^*$ et $x \notin \mathbb{Q}$.

On suppose par l'absurde que $a \times x \in \mathbb{Q}$.

Alors il existe deux entiers relatifs p et q avec $q \neq 0$ tels que $a \times x = \frac{p}{q}$.

On peut réarranger cette équation pour obtenir $x = \frac{p}{aq}$, qui est donc un nombre rationnel puisque p , q et a sont des nombres rationnels, ce qui contredit l'hypothèse que $x \notin \mathbb{Q}$.

Donc, $a \times x \notin \mathbb{Q}$.

Exercice 6 :

Pour $n = 0$, on a :

$$\sum_{k=0}^0 x^k = x^0 = 1$$

et

$$\frac{1-x^{0+1}}{1-x} = \frac{1-x}{1-x} = 1$$

Donc la formule est vraie pour $n = 0$.

Supposons maintenant que la formule soit vraie pour un certain entier naturel n quelconque. Nous allons démontrer qu'elle est vraie pour $n+1$. On a :

$$\sum_{k=0}^{n+1} x^k = \sum_{k=0}^n x^k + x^{n+1}$$

Par hypothèse de récurrence, on a :

$$\sum_{k=0}^n x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$$

Ainsi,

$$\sum_{k=0}^{n+1} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} + x^{n+1}$$

En factorisant par $(1-x)$, on a :

$$\sum_{k=0}^{n+1} x^k = \frac{1-x^{n+1}+x^{n+1}(1-x)}{1-x}$$

Et donc :

$$\sum_{k=0}^{n+1} x^k = \frac{1-x^{n+2}}{1-x}$$

Donc la formule est vraie pour tout entier naturel n .

Exercice 7 :

Pour $n = 1$, on a :

$$\sum_{k=1}^1 (-1)^k k = (-1)^1 \times 1 \times 1 = -1$$

et

$$\frac{(-1)^1(2 \times 1+1)-1}{4} = -1$$

La formule est donc vraie pour $n = 1$.

Supposons maintenant que la formule soit vraie pour un certain entier naturel n quelconque. Nous allons démontrer qu'elle est vraie pour $n+1$. On a :

$$\sum_{k=1}^{n+1} (-1)^k k = \sum_{k=1}^n (-1)^k k + (-1)^{n+1} (n+1)$$

Par hypothèse de récurrence, on a :

$$\sum_{k=1}^n (-1)^k k = \frac{(-1)^n (2n+1) - 1}{4}$$

Donc,

$$\sum_{k=1}^{n+1} (-1)^k k = \frac{(-1)^n (2n+1) - 1}{4} + (-1)^{n+1} (n+1)$$

En factorisant par 4, on a :

$$\sum_{k=1}^{n+1} (-1)^k k = \frac{(-1)^n (2n+1) - 1 - 4(-1)^{n+1} (n+1)}{4}$$

En simplifiant, on obtient :

$$\sum_{k=1}^{n+1} (-1)^k k = \frac{(-1)^{n+1} (2(n+1)+1) - 1}{4}$$

Donc la formule est vraie pour tout entier naturel n.

Exercice 8 :

Pour n = 0, on a :

$$(1+x)^0 = 1 \geq 1+0 \cdot x = 1$$

Donc la formule est vraie pour n = 0.

Supposons maintenant que la formule soit vraie pour un certain entier naturel n quelconque. Nous allons démontrer qu'elle est vraie pour n+1.

On a :

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)^n \times (1+x)$$

Par hypothèse de récurrence, on a :

$$(1+x)^n \geq 1 + nx$$

Donc,

$$(1+x)^{n+1} \geq (1+nx)(1+x)$$

En développant le membre de droite, on obtient :

$$(1+x)^{n+1} \geq 1 + (n+1)x + nx^2$$

Comme x est positif, nx^2 est positif ou nul. On peut donc écrire :

$$(1+x)^{n+1} \geq 1 + (n+1)x$$

La formule est donc vraie pour tout entier naturel n .

Remarque : cette inégalité est appelée inégalité de Bernoulli.

Exercice 9 :

1. La contraposée de la proposition précédente est :

Si l'entier n est impair, alors n^2-1 est divisible par 8.

2. Supposons que n soit impair, c'est-à-dire $n = 2k+1$ pour un certain entier naturel k .

Alors :

$$n^2-1 = (2k+1)^2-1 = 4k^2 + 4k + 1 - 1 = 4(k^2+k)$$

Donc n^2-1 est divisible par 4.

Pour montrer qu'il est divisible par 8, il suffit de remarquer que k^2+k est pair pour tout entier k .

En effet, pour k pair, on a k^2 pair et k pair donc k^2+k pair.

Pour k impair, on a k^2 impair et k impair donc k^2+k pair.

Donc k^2+k est pair dans tous les cas et n^2-1 est divisible par 8.

Donc la contraposée est vraie.

3. On peut en déduire que si n^2-1 n'est pas divisible par 8, alors n est pair.

En effet, si n était impair, alors d'après la contraposée, n^2-1 serait divisible par 8, ce qui est contraire à l'hypothèse de départ.

Donc si $n^2 - 1$ n'est pas divisible par 8, alors n est pair.

Exercice 10 :

1. Nous allons utiliser une démonstration par récurrence.

Vérifions la propriété pour $n = 1$:

$$\sum_{k=1}^1 k^3 = 1^3 = 1 \times \frac{1^2 \times (1+1)^2}{4} = \frac{1 \times 4}{4} = 1$$

La propriété est vérifiée au rang 1.

Supposons maintenant que la propriété soit vraie pour un certain entier naturel k, c'est-à-dire :

$$\sum_{i=1}^k i^3 = \frac{k^2 (k+1)^2}{4}$$

Prouvons que la propriété est vraie pour $k+1$:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{k+1} i^3 \\ &= \sum_{i=1}^k i^3 + (k+1)^3 \\ &= \frac{k^2 (k+1)^2}{4} + (k+1)^3 \\ &= \frac{(k+1)^2}{4} (k^2 + 4k + 4) \\ &= \frac{(k+1)^2 (k+2)^2}{4} \end{aligned}$$

Donc la propriété est vraie pour tout entier naturel n.

2. En utilisant la formule obtenue à la question 1, on peut calculer :

$$\begin{aligned} A &= 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + 10^3 \\ &= \sum_{k=1}^{10} k^3 \\ &= \frac{10^2 \times 11^2}{4} \\ &= 3025 \end{aligned}$$

Donc A vaut 3025.

Multiples :

Pour tout entier n , on a :

$$n^3 - n = n(n^2 - 1) = n(n-1)(n+1)$$

Un produit de trois entiers consécutifs est toujours divisible par 3, car il contient un multiple de 3.

Par conséquent, $n(n-1)(n+1)$ est toujours divisible par 3, et donc $n^3 - n$ est un multiple de 3 pour tout entier n .

Exercice 11 :

1. Nous allons utiliser la formule du binôme de Newton pour développer $(n+1)^5$:

$$(n+1)^5 = 1n^5 + 5n^4 + 10n^3 + 10n^2 + 5n + 1$$

On peut ordonner les termes en partant du terme de plus haut degré (n^5) et en descendant jusqu'au terme constant (1), ce qui donne :

$$(n+1)^5 = n^5 + 5n^4 + 10n^3 + 10n^2 + 5n + 1$$

2. Posons $m = n+1$. Alors on a :

$$m^5 - m = (n+1)^5 - (n+1) = (n+1)(n^4 + 5n^3 + 10n^2 + 10n + 4)$$

Nous allons montrer que $n^4 + 5n^3 + 10n^2 + 10n + 4$ est un multiple de 5 pour tout entier n .

Remarquons que si n est divisible par 5, alors $n^4 + 5n^3 + 10n^2 + 10n + 4$ est clairement un multiple de 5 (car le dernier chiffre de n^4 est 1).

Sinon, n n'est pas divisible par 5, donc son reste dans la division par 5 est 1, 2, 3 ou 4.

Nous allons distinguer ces 4 cas :

- Si n a pour reste 1 dans la division par 5, alors n^4 a pour reste 1 dans la division par 5, et de même pour $5n^3$, $10n^2$ et $10n$.

Donc $n^4 + 5n^3 + 10n^2 + 10n + 4$ a pour reste 0 dans la division par 5.

- Si n a pour reste 2 dans la division par 5, alors n^4 a pour reste 1 dans la division par 5, et de même pour $5n^3$, $10n^2$ et $10n$.

Donc $n^4 + 5n^3 + 10n^2 + 10n + 4$ a pour reste 0 dans la division par 5.

- Si n a pour reste 3 dans la division par 5, alors n^4 a pour reste 1 dans la division par 5, et de même pour $5n^3$ et $10n$.

On remarque que $10n^2$ a pour reste 0 dans la division par 5 car il se termine par 00, et que 4 a pour reste -1 dans la division par 5.

Donc $n^4 + 5n^3 + 10n^2 + 10n + 4$ a pour reste 0 dans la division par 5.

- Si n a pour reste 4 dans la division par 5, alors n^4 a pour reste 1 dans la division par 5, et de même pour $5n^3$ et $10n$.

On remarque que $10n^2$ a pour reste 0 dans la division par 5 car il se termine par 00, et que 4 a pour reste -1 dans la division par 5.

Donc $n^4 + 5n^3 + 10n^2 + 10n + 4$ a pour reste 0 dans la division par 5.

Dans tous les cas, $n^4 + 5n^3 + 10n^2 + 10n + 4$ est un multiple de 5.

Donc $m^5 - m$ est divisible par 5 pour tout entier m , et donc $n^5 - n$ est un multiple de 5 pour tout entier n .

Exercice 12 :

Nous allons procéder par récurrence.

Vérifions la propriété pour $n = 1$:

$$\sum_{k=1}^1 k^3 = 1^3 = 1$$
$$\left(\sum_{k=1}^1 k\right)^2 = 1^2 = 1$$

La propriété est vérifiée au rang 1.

Supposons maintenant que la propriété soit vraie pour un certain entier naturel k , c'est-à-dire :

$$\sum_{i=1}^k i^3 = \left(\sum_{i=1}^k i\right)^2$$

Prouvons que la propriété est vraie pour $k+1$:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{k+1} i^3 &= \sum_{i=1}^k i^3 + (k+1)^3 \\
&= \left(\sum_{i=1}^k i \right)^2 + (k+1)^3 \\
&= \left(\frac{k(k+1)}{2} \right)^2 + (k+1)^3 \\
&= \frac{(k+1)^2(k^2+4k+4)}{4} \\
&= \left(\frac{(k+1)(k+2)}{2} \right)^2
\end{aligned}$$

Donc la propriété est vraie pour tout entier naturel n .