# Produit scalaire

**Exercice n° 1**:

Soient $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ deux vecteurs et $k \in \mathbb{Z}$ .

Calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ dans les conditions suivantes :

a. AB=3 , AC=5 et $(\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}) = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$ .

b. AB=1 , AC=4 et $(\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}) = -\frac{8\pi}{3} + 2k\pi$ .

c. AB=4 , AC=7 et $(\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}) = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi$ .

d. AB=2 , AC=2 et $(\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}) = -\frac{5\pi}{3} + 2k\pi$ .

**Exercice n° 2 :**

Calculer $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB}$ ; $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{BA}$ ; $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AC}$ ; sachant que :

a. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = -3$

b. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 2$

**Exercice n° 3 :**

MNPQ est un losange de centre O tel que MP=8 et NQ=6.

Calculer les produits scalaires suivants :

a. $\overrightarrow{MO}.\overrightarrow{MN}$ ; $\overrightarrow{PQ}.\overrightarrow{NQ}$ ; $\overrightarrow{PM}.\overrightarrow{NP}$ ; .

b. $\overrightarrow{MQ}.\overrightarrow{NP}$ ; $\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{PQ}$ ; $\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{NM}$ ;

**Exercice n° 4 :**

Soit ABCD un carré et I un point de [AB].

On note H le projeté orthogonal de A sur [ID].

En exprimant de deux manières différentes $\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{ID}$, démontrer que :

$\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{ID} = AI^2$

**Exercice n° 5 :**

Soit ABC un triangle équilatéral de côté 1.

Soit H le projeté orthogonal de A sur (BC).

Calculer $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH}$ en utilisant les projections orthogonales .

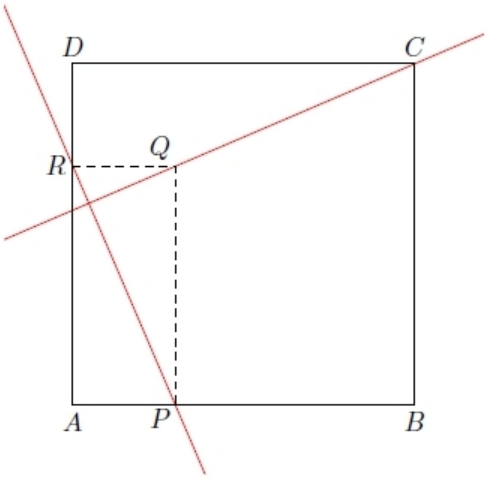
**Exercice 6 - Produit scalaire dans un carré**

Soit un carré ABCD. On construit un rectangle APQR tel que :

- P et R sont sur les côtés [AB] et [AD] du carré ;
- AP = DR.

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

Le problème a pour objet de montrer que les droites (CQ) et (PR) sont perpendiculaires.1. Justifier que : $\overrightarrow{CQ}.\overrightarrow{PR}=\overrightarrow{CQ}.(\overrightarrow{AR}-\overrightarrow{AP})$ .2. En déduire que les droites (CQ) et (PR) sont perpendiculaires.




## Exercice 7 - Propriétés algébriques

On a $|\vec{u}|=2$ et $|\vec{v}|=3$ et $\vec{u}\ .\ \vec{v}$ = -1.

1) Calculez $(\vec{u}+\vec{v})^2$ et $\left|(\vec{u}-\vec{v})^2\right|$.

2) Calculer ( $\vec{u}$ + $\vec{v}$ ) . (2 $\vec{u}$ -3 $\vec{v}$ ).

## Exercice 8 - Produit scalaire et point quelconque

Soit A et B deux points distincts du plan et I le milieu du segment [AB].

Démontrer que quelque soit le point M du plan, on a l'égalité :

$MA^2-MB^2=(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}).\overrightarrow{BA}=2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{BA}$ .

## Exercice 9 - Les vecteurs dans le plan

Soit le parallélogramme ABCD tel que :

E est le milieu de [AD]

$\overrightarrow{AF}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$

K est le dernier sommet du parallélogramme EAFK

M le milieu de [BE]

$\overrightarrow{AG}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{GB}=2\overrightarrow{GF}$

$\overrightarrow{GC}=2\overrightarrow{GK}$

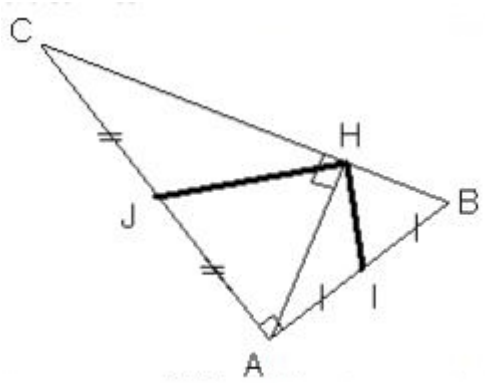
Montrer que vecteur $\overrightarrow{GK}=2\overrightarrow{GM}$ .

<**Exercice 10 - Projeté orthogonal**

ABC est un triangle rectangle en A .

H est le projeté orthogonal de A sur (BC) .

I et J sont les milieux respectifs de [AB] et [AC] .




Démontrer que (HI) et (HJ) sont perpendiculaires .

## Exercice 11 - Calculs de produits scalaires dans un parallélogramme

ABCD est un parallélogramme avec AB = 4, AD = 5 et AC = 7.

1.Calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$ .

2. En déduire BD.

## Exercice 12 - Calculs de produits scalaires dans un carrés

MNPQ est un carré avec MN = 6. I est le centre du carré.y

Calculer les produits scalaires suivants :

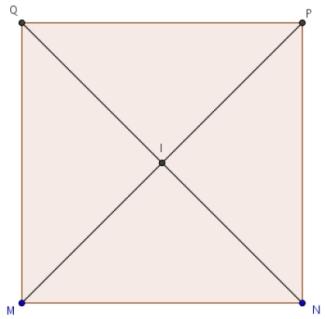
1. $\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{QP}$

2. $\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{PN}$.

3. $\overrightarrow{IN}.\overrightarrow{IP}$

4. $\overrightarrow{QI}.\overrightarrow{NI}$.

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

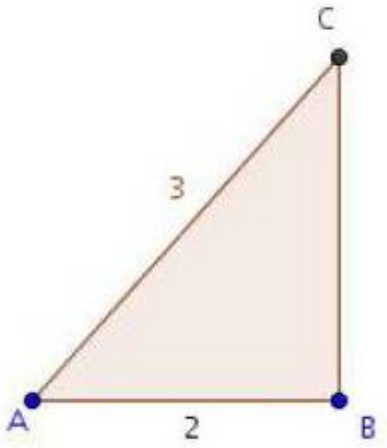



## Exercice 13 - Déterminer si le triangle est rectangle

ABC est un triangle dans lequel AB = 2 et AC = 3.

De plus $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 4$

Ce triangle est-il rectangle ? Si oui, préciser en quel sommet.

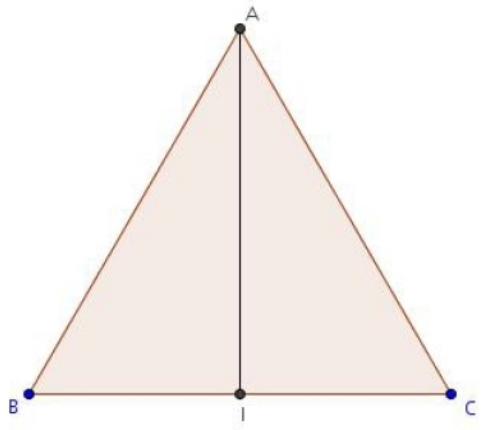



## Exercice 14 - Triangle équilatéral

ABC est un triangle équilatéral de côté 5 cm. I est le milieu de [BC].

Calculer les produits scalaires suivants :

1. $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$ .
2. $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CI}$.
3. $(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}).\overrightarrow{AI}$.




## Exercice 15 - Coordonnées du barycentre

Dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$
on considère les points suivants : A (2 ; 1), B (7 ; 2) et C (3 ; 4).

*Toutes les questions suivantes sont indépendantes et sans rapport.*

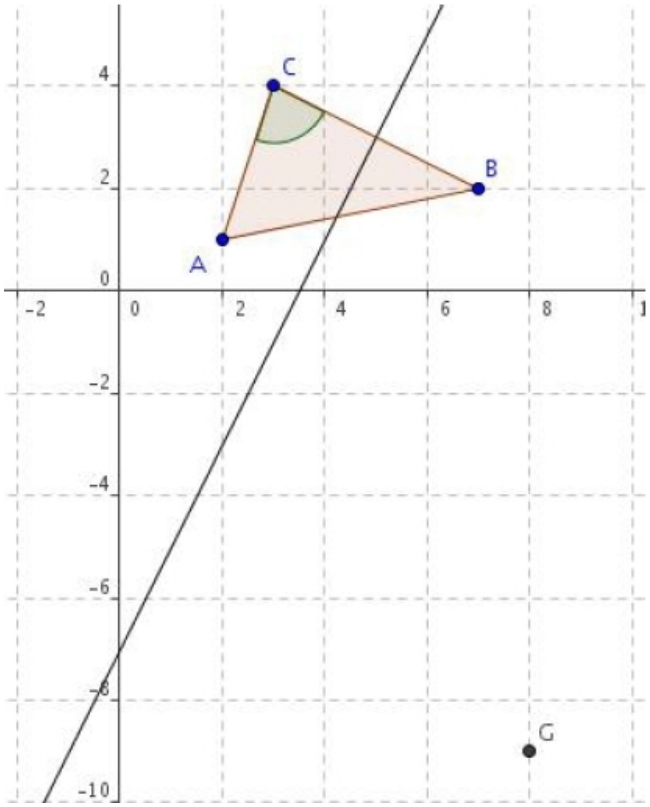
1. Calculer les coordonnées du barycentre G de (A ; 3), (B ; 2) et (C ; - 4).

2. Déterminer une équation cartésienne de la médiatrice de [BC].

3. Calculer $\overrightarrow{CB}.\overrightarrow{CA}$ .

4. L'angle $\widehat{C}$ est-il droit ?

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.




## Exercice 16 - Cosinus

Soit ABC un triangle.

Calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ et $BC$ dans chacun des cas suivants :

1. AB= 6cm ; AC= 5 cm et $\widehat{BAC}=60^\circ$ .
2. AB= 7 cm ; AC=4cm et $\widehat{BAC}=120^\circ$ .

## Exercice 17 - Vecteurs orthogonaux

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs de même norme .

Démontrer que les vecteurs $\vec{u}+\vec{v}$ et $\vec{u}-\vec{v}$ sont orthogonaux .

## Exercice 18 - Triangle équilatéral

ABC est un triangle équilatéral de côté $a$ .

H est le projeté orthogonal de A sur (BC) et O le centre du cercle circonscrit à ABC.

Exprimer en fonction de $a$ , les produits scalaires suivants :

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ ; $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{CB}$ ; $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH}$ ; $\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC}$ ; $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}$ .

## Exercice 19 - Calculs avec produits scalaires

Sachant que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont tels que $|\vec{u}|=3$ , $|\vec{v}|=7$ et $\vec{u}.\vec{v}=13$ .

Calculer les produits scalaires suivants :

1. $\vec{u}.(\vec{u}+3\vec{v})$ .
2. $(\vec{u}-2\vec{v})^2$ .

## Exercice 20 - Condition sur des points

A quelle condition sur les points A, B et C a-t-on :

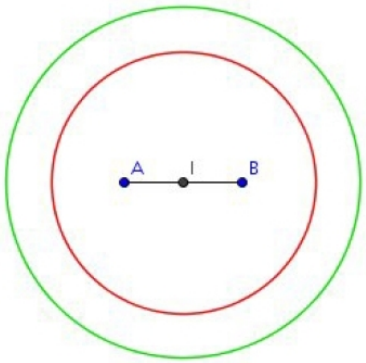
$$(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AB})^2=(AB+AC)^2$$

## Exercice 21 - Déterminer un ensemble de points du plan

On considère un segment [AB] tel que AB = 1 dm.

Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que :

1. $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=1.$
2. $MA^2+MB^2=5.$




## Exercice 22 - Trouver un ensemble de points

[AB] est un segment de milieu I et AB = 2 cm.

1. Montrer que pour tout point M du plan :

$$MA^2-MB^2=2\overrightarrow{IM}.\overrightarrow{AB}$$

2. Trouver et représenter l'ensemble des points M du plan tels que : $MA^2-MB^2=14.$

## Exercice 23 - Les égalités vectorielles du parallélogramme

Démontrer que :

1. $|\vec{u}+\vec{v}|^2-|\vec{u}-\vec{v}|^2=4\vec{u}.\vec{v}$ .
2. $|\vec{u}+\vec{v}|^2+|\vec{u}-\vec{v}|^2=2(|\vec{u}|^2+|\vec{v}|^2)$ .
3. Quel est le lien avec le losange, le parallélogramme ?
4. Démontrer que :

$$(\vec{u}+\vec{v}).(\vec{u}-\vec{v})=|\vec{u}|^2-|\vec{v}|^2$$

5. En déduire qu'un parallélogramme a ses diagonales perpendiculaires si et seulement si ses côtés sont

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

égaux.

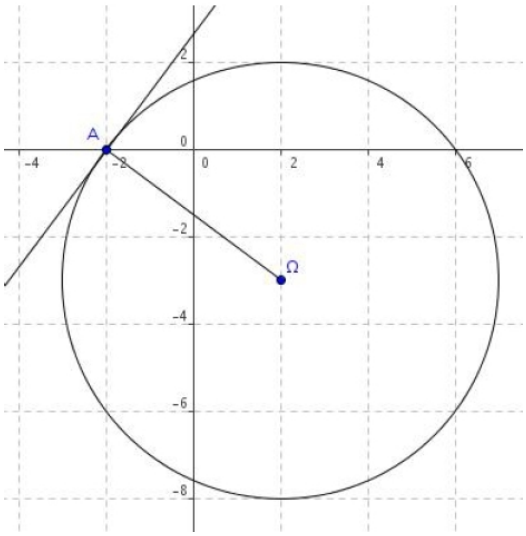
## Exercice 24 - Equation d'un cercle et de la tangente

Dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$ , on donne un point $\Omega(2;-3)$ .

1. Déterminer l'équation du cercle (C) de centre $\Omega$ et de rayon R = 5.

2. Démontrer que le point A( - 2 ; 0) est un point du cercle (C).

3. Déterminer une équation cartésienne de la tangente en A au cercle (C).




## Exercice 25 - Médiatrice et hauteur d'un triangle

MNPQ est un carré avec MN = 6. I est le centre du carré.

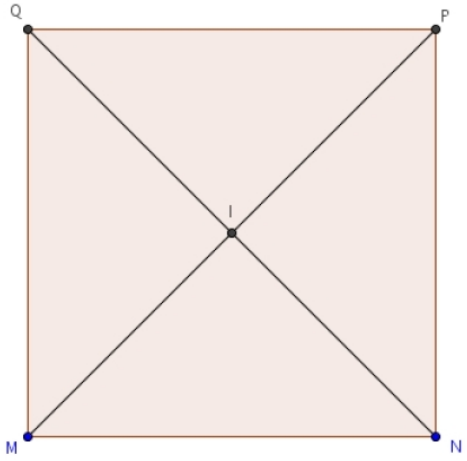
Calculer les produits scalaires suivants :

1. $\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{QP}$

2. $\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{PN}$

3. $\overrightarrow{IN}.\overrightarrow{IP}$

4. $\overrightarrow{QI}.\overrightarrow{NI}$




## Exercice 26 - Distance d'un point à un cercle

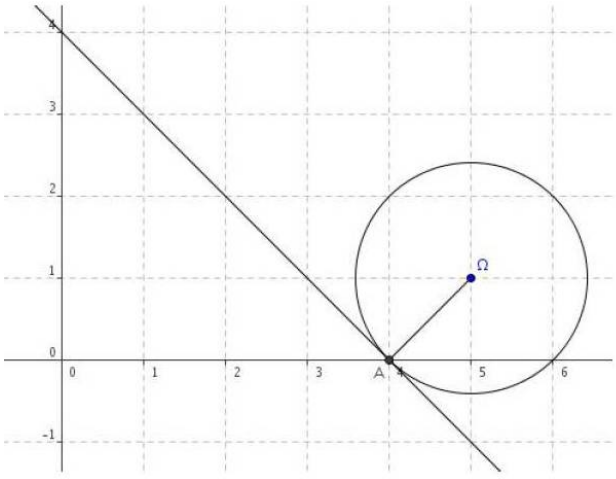
On se place dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$ .

1. Déterminer l'équation du cercle de centre $\Omega(5;1)$ tangent à la droite (D) d'équation : $x+y-4=0.$

Indication :

on rappelle que la distance entre un point $A(\alpha;\beta)$ et une droite (D) d'équation ax + by + c = 0 est donnée par la formule :

$$d(A,D)=\frac{|a\alpha+b\beta+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$




## Exercice 27 - Produit scalaire et cercle

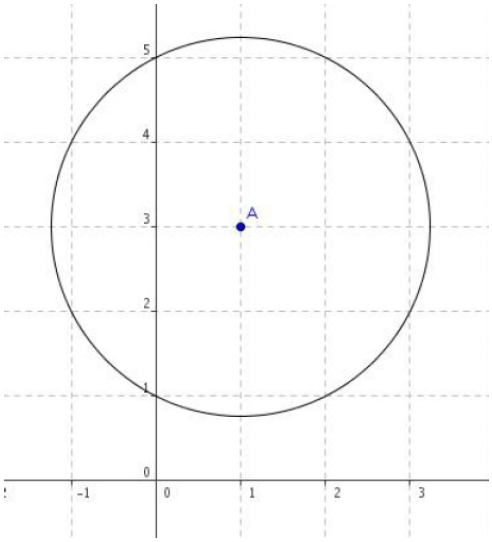
On se place dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

Examiner si les équations suivantes sont des équations de cercle et, le cas échéant, préciser le centre et le rayon du cercle.

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

1. $x^2+y^2-2x-6y+5=0.$

2. $x^2+y^2-x-3y+3=0.$




## Exercice 28 - Produit scalaire dans un triangle

ABC est un triangle et I est le milieu de [BC].
On donne : BC = 4, AI = 3 et $(\overrightarrow{IA},\overrightarrow{IB})=\frac{\pi}{3}$ .

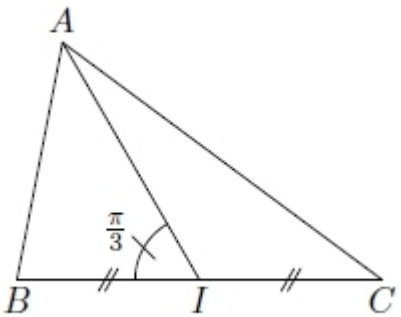
Calculer :

1. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}.$

2. $AB^2+AC^2.$

3. $AB^2-AC^2.$

4. $AB \text{ et } AC.$



Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.