

Produit scalaire

Exercice 1 :

Calculer la distance du point M(5; 2; -3) au plan d'équation $x + 4y + 8z = -2$.

La distance du point M au plan est donné par :

$$d = \frac{|x_M + 4y_M + 8z_M + 2|}{\sqrt{1^2 + 4^2 + 8^2}}$$

$$d = \frac{|5 + 4 \times 2 + 8 \times (-3) + 2|}{81}$$

$$d = \frac{|5 + 8 - 24 + 2|}{81}$$

$$d = \frac{|-9|}{81}$$

$$d = \frac{9}{81}$$

$$d =$$

Exercice 2 :

Soient A(1; -1; 1), B(0; 2; -1) et C(-1; 1; 0).

Montrer que A, B et C forment un plan puis déterminer x afin que $\vec{u}(x; 3; 4)$ soit normal à (ABC).

$$\overrightarrow{AB}(-1; 3; -2) \text{ et } \overrightarrow{AC}(-2; 2; -1)$$

Ces deux vecteurs ne sont **pas colinéaires** donc les points A, B et C forment un plan.

Un vecteur normal est

$$\overrightarrow{AC} \vee \overrightarrow{AC}(1;3;4)$$

il faut qu'il soit colinéaire à $\vec{u}$, pour cela il suffit de prendre $\mathbf{x} = \mathbf{1}$.

Exercice 3 :

Les plans $P: 2x - y + z + 9 = 0$ et $Q: x + y - z - 7 = 0$ sont-ils orthogonaux ?

Si les plans sont orthogonaux alors les vecteurs normaux sont orthogonaux.

$\vec{u}(2;-1;1)$ est un vecteur normal à (P).

$\vec{v}(1;1;-1)$ est un vecteur normal à (Q).

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 2 \times 1 - 1 \times 1 + 1 \times (-1) = 2 - 1 - 1 = 0$$

Conclusion :

Le produit scalaire est nul donc ces deux plans sont orthogonaux.

Exercice 4 :

Déterminer une équation cartésienne du plan P passant par A(-2; 1; 3) et orthogonal à (BC) où B(1; -2; 2) et C(4; 1; -1).

$\overrightarrow{BC}(3;3;-3)$ est un vecteur normal au plan (P).

Une équation cartésienne au plan (P) est du type :

$$3x + 3y - 3z + d = 0$$

or le point A appartient au plan (P) donc :

$$3 \times (-2) + 3 \times 1 - 3 \times 3 + d = 0$$

$$-12 + d = 0$$

$$d = 12$$

Conclusion : une équation cartésienne de (P) est $3x + 3y - 3z + 12 = 0$

Exercice 5 :

Déterminer une équation cartésienne du plan contenant A(2; -1; 1) et orthogonal au

vecteur $\vec{n}(3; -4; 2)$

L'équation cartésienne est du type $ax+by+cz+d=0$ avec $\vec{n}$ un vecteur normal

donc nous avons déjà :

$$3x-4y+2z+d=0$$

or A appartient à ce plan donc :

$$3 \times 2 - 4 \times (-1) + 2 \times 1 + d = 0$$

$$6 + 4 + 2 + d = 0$$

$$d =$$

Conclusion : l'équation cartésienne de ce plan est $3x-4y+2z-12=0$

Exercice 6 :

Le vecteur $\vec{n}(6; -2; 4)$ est-il normal au plan d'équation $-3x + y - 3z = 1$?

un vecteur normal au plan est $\vec{u}(-3;1;-3)$ or $\vec{u}$ et $\vec{n}$ ne sont pas colinéaires

donc $\vec{n}$ n'est pas un vecteur normal du plan.

Exercice 7 :

Déterminer un vecteur normal au plan d'équation $31x + 37y + 41z + 43 = 0$.

D'après le cours un vecteur normal au plan est $\vec{u}(31;37;41)$.

Exercice 8 :

On se place dans un repère orthonormal.

Soient A(-1; 1; 2), B(0; 1; 0) et C(2; 0; 3).

Calculer une mesure approchée de l'angle $\widehat{BAC}$.

$$\overrightarrow{AB}(1;0;-2) \text{ et } \overrightarrow{AC}(3;-1;1) \text{ et } AB = \sqrt{1^2+0^2+(-2)^2} = \sqrt{5}$$

$$\text{et } AC = \sqrt{3^2+(-1)^2+1^2} = \sqrt{11}$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 1 \times 3 + 0 \times (-1) + (-2) \times 1 =$$

$$\cos(\widehat{BAC}) = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{AB \times AC} = \frac{1}{\sqrt{5} \times \sqrt{11}} = \frac{1}{\sqrt{55}}$$

$$\widehat{BAC} \simeq 82^\circ$$

Exercice 9 :

Soit ABCDEFGH un cube d'arête a.

Calculer :

$$1. \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AF}$$

$$2. \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AG}$$

$$3. \overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{HC}$$

$$\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AF} = a \times a \times \cos \frac{\pi}{4} = \frac{a^2 \sqrt{2}}{2}$$

Exercice 10 :

Soit ABCD un tétraèdre régulier d'arête a.

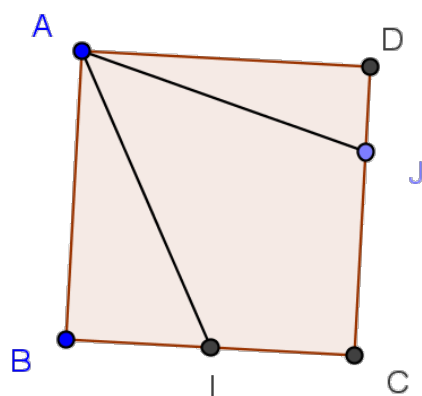
Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

$$a^2 \times \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

Exercice 11 :

ABCD est un carré de coté 8 unités.

Les points I et J sont définis pas $\overrightarrow{BI} = \frac{1}{2} \overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{DJ} = \frac{1}{3} \overrightarrow{DC}$.



1. Exprimer le produit scalaire $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AJ}$ de deux façons différentes .

$$\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AJ} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BI}) \cdot (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DJ})$$

$$\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DJ} + \overrightarrow{BI} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BI} \cdot \overrightarrow{DJ}$$

$$\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AJ} = 0 + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DJ} + \overrightarrow{BI} \cdot \overrightarrow{AD} + 0$$

$$\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AJ} = AB \times DJ + BI \times AD$$

$$\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AJ} = 8 \times \frac{8}{3} + 4 \times 8$$

$$\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AJ} = \frac{64}{3} + 32$$

$$\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AJ} = \frac{64 + 96}{3}$$

$$\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AJ} = \frac{160}{3}$$

2. Déterminer $\cos(\widehat{IAJ})$, puis la mesure de cet angle en radians .

$$\cos(\widehat{IAJ}) = \frac{\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AJ}}{AI \cdot AJ} = \frac{\frac{160}{3}}{AI \cdot AJ}$$

En utilisant le théorème de Pythagore :

$$AI = \sqrt{8^2 + 4^2} = \sqrt{80} \text{ et } AJ = \sqrt{8^2 + \left(\frac{8}{3}\right)^2} = \sqrt{64 + \frac{64}{9}} = \sqrt{\frac{640}{9}} = \frac{8\sqrt{10}}{3}$$

$$\cos(\widehat{IAJ}) = \frac{\frac{160}{3}}{AI \cdot AJ} = \frac{\frac{160}{3}}{\sqrt{80} \times \frac{8\sqrt{10}}{3}}$$

$$\cos(\widehat{IAJ}) = \frac{\frac{160}{3}}{AI \cdot AJ} = \frac{160}{8\sqrt{800}}$$

$$\cos(\widehat{IAJ}) = \frac{\frac{160}{3}}{AI \cdot AJ} = \frac{160}{80\sqrt{8}}$$

$$\cos(\widehat{IAJ}) = \frac{\frac{160}{3}}{AI \cdot AJ} = \frac{2}{\sqrt{8}}$$

$$\cos(\widehat{IAJ}) = \frac{\frac{160}{3}}{AI \cdot AJ} = \frac{2\sqrt{8}}{8}$$

$$\cos(\widehat{IAJ}) = \frac{2\sqrt{2}}{4}$$

$$\cos(\widehat{IAJ}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Conclusion :

$$\widehat{IAJ} = 45^\circ$$

Exercice 12 :

On utilise la relation de Chasles : pour tout point P , $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{PB}$.

On a :

$$\begin{aligned} (\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) \cdot (\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) &= \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MA} - 4\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} \\ &\quad + 2\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MA} + 8\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} \\ &\quad + \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MC} \\ &= 2(\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MA}) + 12\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MB} \\ &= 2(\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MA}) + 12 \cdot \frac{l^2}{3} \\ &= 2(\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MA}) + 4l^2. \end{aligned}$$

On pose $x = \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MA}$. Alors l'équation devient $2x + 4l^2 = 4l^2$ soit :
 $x = 0$.

L'ensemble des points M tels que cette équation est vérifiée est donc l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MA} = 0$.

On note O le centre du triangle équilatéral ABC . Alors pour tout point M du plan, on peut écrire :

$$[\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OM}]$$

Si M est à l'intérieur du triangle ABC , alors les produits scalaires sont positifs et on ne peut pas avoir $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MA} = 0$.

Si M est sur le cercle circonscrit à ABC , on a $\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = \vec{0}$ et en multipliant cette relation scalaire par $\vec{OM}$, on obtient $\vec{OA} \cdot \vec{OM} + \vec{OB} \cdot \vec{OM} + \vec{OC} \cdot \vec{OM} = 0$,

donc on peut avoir $\vec{MA} \cdot \vec{MB} + \vec{MB} \cdot \vec{MC} + \vec{MC} \cdot \vec{MA} = -l^2$.

Finalement, l'ensemble des points M tels que $(\vec{MA} + 2\vec{MB} + \vec{MC}) \cdot (\vec{MA} - 2\vec{MB} + \vec{MC}) = 2l^2$ est précisément le cercle circonscrit à ABC ,

c'est-à-dire l'ensemble des points à distance l du centre O .

