

Produit scalaire

Exercice 1 :

a. $AB=3$, $AC=5$ et $(\vec{AB}, \vec{AC}) = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$.

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = AB \times AC \times \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) = 15 \times \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

b. $AB=1$, $AC=4$ et $(\vec{AB}, \vec{AC}) = -\frac{8\pi}{3} + 2k\pi$.

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = AB \times AC \times \cos\left(\frac{8\pi}{6}\right) = 4 \times \frac{-1}{2} = -2.$$

c. $AB=4$, $AC=7$ et $(\vec{AB}, \vec{AC}) = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi$.

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = AB \times AC \times \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = 28 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 14\sqrt{2}.$$

d. $AB=2$, $AC=2$ et $(\vec{AB}, \vec{AC}) = -\frac{5\pi}{3} + 2k\pi$.

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = AB \times AC \times \cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) = 4 \times \frac{-1}{2} = -2.$$

Exercice 2 :

Calculer $\vec{AC} \cdot \vec{AB}$; $\vec{CA} \cdot \vec{BA}$; $\vec{BA} \cdot \vec{AC}$; sachant que :

a. $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = -3$
 $\vec{AC} \cdot \vec{AB} = \vec{AB} \cdot \vec{AC} = -3$; $\vec{CA} \cdot \vec{BA} = \vec{AB} \cdot \vec{AC} = -3$;
 $\vec{BA} \cdot \vec{AC} = -\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 3$;

Exercice 3 :

a. On a les vecteurs suivants :

$$\vec{MO} = \vec{MN} + \vec{NO}$$

$$\vec{PQ} = \vec{MN} + \vec{NQ}$$

$$\vec{PM} = \vec{PN} + \vec{NM}$$

On peut alors calculer les produits scalaires demandés :

$$\begin{aligned}
& \overrightarrow{MO} \cdot \overrightarrow{MN} \\
&= (\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NO}) \cdot \overrightarrow{MN} \\
&= \overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NO} \cdot \overrightarrow{MN} \\
&= MN^2 \\
&= \left(\frac{1}{2}PQ\right)^2 \\
&= 16
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{NQ} = (\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NQ}) \cdot \overrightarrow{NQ} \\
&= \overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{NQ} + \overrightarrow{NQ} \cdot \overrightarrow{NQ} \\
&= NQ^2 \\
&= 6^2 \\
&= 36
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \overrightarrow{PM} \cdot \overrightarrow{NP} \\
&= (\overrightarrow{PN} + \overrightarrow{NM}) \cdot \overrightarrow{NP} \\
&= \overrightarrow{PN} \cdot \overrightarrow{NP} + \overrightarrow{NM} \cdot \overrightarrow{NP} \\
&= NP^2 \\
&= \left(\frac{1}{2}MQ\right)^2 \\
&= 25
\end{aligned}$$

b. On peut calculer les produits scalaires demandés en utilisant les expressions vectorielles suivantes :

$$\begin{aligned}
& \overrightarrow{MQ} = \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NQ} \quad \overrightarrow{OM} = -\overrightarrow{MO} \\
& \overrightarrow{NM} = -\overrightarrow{MN} \\
& \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MP} - \overrightarrow{PN} \\
& \overrightarrow{PQ} = -\overrightarrow{QP} \\
&= -(\overrightarrow{MQ} - \overrightarrow{MP}) \\
&= -\overrightarrow{MQ} + \overrightarrow{MP} \quad \overrightarrow{NP} \\
&= -\overrightarrow{PN}
\end{aligned}$$

Ainsi, on a :

$$\begin{aligned}
& \overrightarrow{MQ} \cdot \overrightarrow{NP} \\
&= (\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NQ}) \cdot \overrightarrow{NP} \\
&= \overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{NP} + \overrightarrow{NQ} \cdot \overrightarrow{NP} \\
&= -NP^2 \\
&= -\left(\frac{1}{2}MQ\right)^2 = -25
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{PQ} \\
&= (\overrightarrow{MP} - \overrightarrow{PN}) \cdot (-\overrightarrow{MQ} + \overrightarrow{MP}) \\
&= -\overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{MQ} + \overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{MP} - \overrightarrow{PN} \cdot \overrightarrow{MQ} + \overrightarrow{PN} \cdot \overrightarrow{MP} \\
&= -MP^2 + PQ^2 \\
&= -4 \\
& \overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{NM} \\
&= -\overrightarrow{MO} \cdot \overrightarrow{MN} \\
&= -\overrightarrow{MO} \cdot \overrightarrow{MP} + \overrightarrow{MO} \cdot \overrightarrow{PN} \\
&= -MP^2 + AO^2 \\
&= -64 + 25 \\
&= -39
\end{aligned}$$

où l'on a utilisé les relations trigonométriques dans le triangle rectangle MPO (où PO est l'hypoténuse) pour exprimer MO et MP en fonction de AO et PQ.

Exercice 4 :

Soit ABCD un carré et I un point de [AB].

On note H le projeté orthogonal de A sur [ID].



$$\overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{AD} = 0 \quad \text{car (IA) perpendiculaire à (AD).}$$

Exercice 5 :

Soit ABC un triangle équilatéral de côté 1.

Soit H le projeté orthogonal de A sur (BC).

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC} &= 1 \times 1 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \\
\text{et } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH} &= 1 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}.
\end{aligned}$$

Exercice 6 :

Le problème a pour objet de montrer que les droites (CQ) et (PR) sont perpendiculaires.

$$1. \text{ Justifier que : } \overrightarrow{CQ} \cdot \overrightarrow{PR} = \overrightarrow{CQ} \cdot (\overrightarrow{AR} - \overrightarrow{AP}) .$$

$$\overrightarrow{CQ} \cdot \overrightarrow{PR} = \overrightarrow{CQ} \cdot (\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AR}) \quad (\text{d'après la relation de Chasles})$$

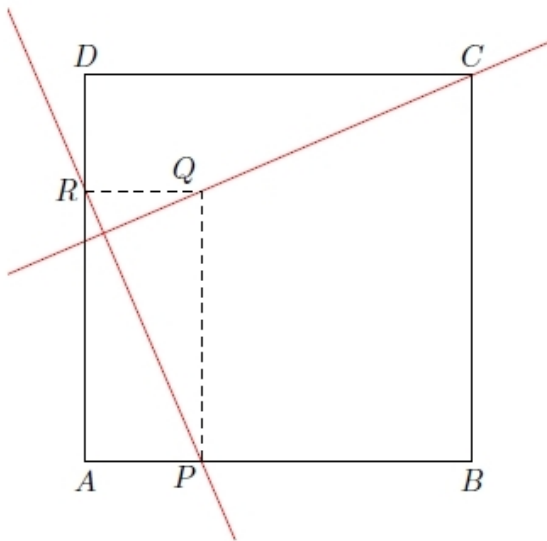
$$\overrightarrow{CQ} \cdot \overrightarrow{PR} = \overrightarrow{CQ} \cdot (-\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AR})$$

$$\overrightarrow{CQ} \cdot \overrightarrow{PR} = \overrightarrow{CQ} \cdot (\overrightarrow{AR} - \overrightarrow{AP})$$

2. En déduire que les droites (CQ) et (PR) sont perpendiculaires.

Indication :

Montrer que $\square$



Exercice 7 :

On a $|\vec{u}| = 2$ et $|\vec{v}| = 3$ et $\vec{u} \cdot \vec{v} = -1$

1) Calculez $(\vec{u} + \vec{v})^2$ et $|\vec{u} - \vec{v}|^2$

$$(\vec{u} + \vec{v})^2 = |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} = 4 + 9 - 2 = 11$$

2) Calculez $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (2\vec{u} - 3\vec{v})$

$$(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (2\vec{u} - 3\vec{v}) = 2\vec{u} \cdot \vec{u} - 3\vec{u} \cdot \vec{v} + 2\vec{v} \cdot \vec{u} - 3\vec{v} \cdot \vec{v}$$

$$= 2 \times 4 - 3 \times (-1) + 2 \times (-1) - 3 \times 3^2$$

$$= 8 + 3 - 2 - 27$$

$$= -18$$

Exercice 8 :

Démontrer que quelque soit le point M du plan, on a l'égalité :

$$MA^2 - MB^2 = (\vec{MA} + \vec{MB}) \cdot \vec{BA} = 2\vec{MI} \cdot \vec{BA}$$

$$MA^2 - MB^2 = (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}) \cdot (\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB})$$

$$MA^2 - MB^2 = (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}) \cdot (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{BM})$$

$$MA^2 - MB^2 = (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}) \cdot (\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{MA})$$

$$MA^2 - MB^2 = (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}) \cdot \overrightarrow{BA}$$

$$MA^2 - MB^2 = (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}) \cdot \overrightarrow{BA}$$

$$MA^2 - MB^2 = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}) \cdot \overrightarrow{BA}$$

$$MA^2 - MB^2 = (2\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}) \cdot \overrightarrow{BA}$$

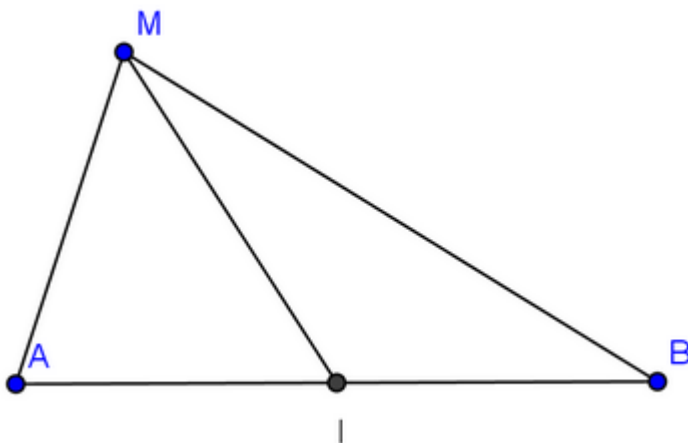
or I est le milieu de [AB] donc $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$

$$MA^2 - MB^2 = (2\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}) \cdot \overrightarrow{BA}$$

$$MA^2 - MB^2 = (2\overrightarrow{MI} + \vec{0}) \cdot \overrightarrow{BA}$$

$$MA^2 - MB^2 = (2\overrightarrow{MI}) \cdot \overrightarrow{BA}$$

$$MA^2 - MB^2 = 2\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{BA}$$



Exercice 9 :

Commençons par noter que $\overrightarrow{AF} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ implique que $\overrightarrow{FB} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$.

Puisque E est le milieu de [AD], alors $\overrightarrow{GC} = 2\overrightarrow{GK}$ implique que $\overrightarrow{GK} = \overrightarrow{GC} - \overrightarrow{GE} = \overrightarrow{GC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{GA}$.

Et puisque $A, F, K \in (EK)$ (car ils sont également sur $\square$), alors

$$\overrightarrow{GK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{EK} - \frac{1}{2}\overrightarrow{GA} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{EK} - \overrightarrow{GA}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{EA}.$$

Soit L le point d'intersection de (MK) et (AC).

Puisque les diagonales de ABCD se coupent en leur milieu, alors L est également le milieu de [AC].

Donc $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{LG} = \overrightarrow{MC}$ (la somme des deux vecteurs étant égale à $\overrightarrow{MC}$ car M est le milieu de [BE]).

On peut développer $\overrightarrow{MA}$ comme suit : $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BA}$.

Or $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{FA} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AF} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$, et donc $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$.

On peut donc écrire : $\overrightarrow{MB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{LG} = \overrightarrow{MC}$.

Puisque $\overrightarrow{GB} = 2\overrightarrow{GF}$, alors $\overrightarrow{GF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{GB} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AB})$, donc $\overrightarrow{GA} = 2\overrightarrow{GF} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{FB}$, donc $\overrightarrow{GA} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$.

Essayons maintenant de développer $\overrightarrow{LG}$.

On peut exprimer $\overrightarrow{LC}$ comme suit :

$$\overrightarrow{LC} = \overrightarrow{LA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{LA} + \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{LA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{GK} \text{ (en utilisant les relations données).}$$

Et donc $\overrightarrow{LG} = \overrightarrow{LC} - \overrightarrow{GC} - \overrightarrow{GL}$, où $\overrightarrow{GL} = \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{BL}$.

Or $\overrightarrow{GB} = 2\overrightarrow{GF}$, et

$$\overrightarrow{BL} = \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{CL} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} - 2\overrightarrow{AL} = 2\overrightarrow{AG} + 2\overrightarrow{GA} - 2\overrightarrow{AL} = \frac{4}{3}\overrightarrow{GA} - 2\overrightarrow{AL}.$$

Donc $\overrightarrow{GL} = 2\overrightarrow{GF} + \frac{4}{3}\overrightarrow{GA} - 2\overrightarrow{AL}$.

On peut maintenant réécrire l'équation $\overrightarrow{MB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{LG} = \overrightarrow{MC}$ en remplaçant $\overrightarrow{LG}$.

Après quelques simplifications, on obtient :

$$\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{AL} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{GF} + \frac{4}{3}\overrightarrow{GA} = \overrightarrow{MC}$$

Or $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$, donc $\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MA} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$.

Et $\overrightarrow{AL} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{CL} = \overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{LC} = \overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}(\overrightarrow{LA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{GK})$

(en utilisant le fait que L est le milieu de [AC]).

Donc $\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{AL} = \overrightarrow{MA} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{LA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{GK})$.

On peut réécrire $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{AC}$ en utilisant les vecteurs suivants :

$$\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{EM} \text{ et } \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{EC} - \overrightarrow{EA}.$$

En substituant cette expression dans l'équation précédente, on obtient :

$$\overrightarrow{EM} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{LA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{GK}) = \overrightarrow{MC} - 2\overrightarrow{GF} - \frac{4}{3}\overrightarrow{GA}$$

Or $\overrightarrow{GK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{EA}$, donc $\overrightarrow{LA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{GK} = \frac{1}{2}(2\overrightarrow{LA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{EA}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{LB} + \overrightarrow{AM})$, et donc $\boxed{\times}$.

Donc l'équation ci-dessus peut être réécrite :

$$\overrightarrow{EM} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{LG} = \overrightarrow{MC} - 2\overrightarrow{GF} - \frac{4}{3}\overrightarrow{GA}$$

Rappelons que $\overrightarrow{FB} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$, donc en utilisant les relations données on a $\overrightarrow{GF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{FB}$, donc $\overrightarrow{GF} = \frac{1}{6}\overrightarrow{AB}$.

De plus, $\overrightarrow{GA} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$, donc $\overrightarrow{LG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{EA} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{EF}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}) = \frac{5}{6}\overrightarrow{AB}$.

On peut maintenant réécrire l'équation précédente en remplaçant $\overrightarrow{EM}, \overrightarrow{LG}, \overrightarrow{GF}$ et $\overrightarrow{GA}$ par leurs expressions respectives.

On obtient finalement :

$$\overrightarrow{EB} + \overrightarrow{BM} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{5}{6}\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{MC} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$$

Or $\overrightarrow{EB} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{EM}$, donc on peut réécrire l'équation comme suit :

$$\overrightarrow{EM} - \frac{11}{6}\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{MC} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$$

En d'autres termes,

$$\overrightarrow{EC} + \overrightarrow{CM} - \overrightarrow{EM} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{5}{6}\overrightarrow{AB} = 0$$

Mais $\overrightarrow{EC} + \overrightarrow{CM} = \overrightarrow{EM}$ (car M est le milieu de [BE]), donc on a :



Soit, finalement,

$$\overrightarrow{EM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{GM}$$

Et donc $\overrightarrow{GK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{EA} = 2\overrightarrow{GM}$, comme demandé.

Exercice 10 :

On sait que $(IH) \perp (BC)$, puisque H est le projeté orthogonal de A sur BC.

Soit K le point d'intersection de (HI) et (AJ).

Nous allons montrer que K est le milieu de [HI], ce qui implique que (HI) est bien perpendiculaire à (AJ) (car les médianes d'un triangle sont concourantes et se coupent en leur point commun).

Puisque I est le milieu de [AB], alors $\overrightarrow{IA} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$, et donc $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{IA} - \overrightarrow{IH} = \overrightarrow{IA} - \overrightarrow{IB}$.

De même, puisque J est le milieu de [AC], alors $\overrightarrow{AJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$, et donc $\overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IJ}$.

On peut donc écrire :

$$\overrightarrow{IH} = \overrightarrow{IA} - \overrightarrow{AH} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \overrightarrow{IB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$$

et

$$\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{AJ} - \overrightarrow{IA} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}).$$

D'après le théorème de la médiane, on a $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AJ}$, donc

$$\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = 2(\overrightarrow{AJ} - \overrightarrow{AB}) = 2\overrightarrow{IJ}.$$

En substituant ces expressions pour $\overrightarrow{IH}$ et $\overrightarrow{IJ}$, on a :

$$\overrightarrow{IH} + \overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{IB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$$

Sachant que $\overrightarrow{IK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{IJ}$, on obtient :

$$\overrightarrow{HK} = \overrightarrow{HI} - \overrightarrow{IK} = \overrightarrow{IH} + \overrightarrow{IJ} - \frac{1}{2}\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{IJ}$$

$$\overrightarrow{HK} = \overrightarrow{IB} + \frac{1}{4}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{IB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$$

Or, comme I est le milieu de [AB], alors $\overrightarrow{IB} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{AB}$. Donc :

$$\overrightarrow{HK} = \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{HA} + \overrightarrow{AJ} + \frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$$

En remarquant que $\overrightarrow{HA}$ est colinéaire à $\overrightarrow{BC}$ (car AH est le projeté orthogonal de A sur BC), on peut écrire :

$$\overrightarrow{HK} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AJ} + \frac{1}{4}\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AJ} + \frac{5}{4}\overrightarrow{BC}$$

Finalement, puisque J est le milieu de [AC], alors $\overrightarrow{AJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$, et donc

$$\overrightarrow{HK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{5}{4}\overrightarrow{BC}.$$

Or $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BC}$ forment un triangle rectangle en A, donc $\overrightarrow{AC} = \sqrt{2}\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{BC} = \sqrt{2}\overrightarrow{HB}$.

Donc :

$$\overrightarrow{HK} = \frac{\sqrt{2}}{2}\overrightarrow{AH} + \frac{5\sqrt{2}}{4}\overrightarrow{HB}$$

Mais on sait que $\overrightarrow{AH}$ (respectivement $\overrightarrow{HB}$) est colinéaire à $\overrightarrow{BC}$ (respectivement $\overrightarrow{AC}$).

Ainsi, $\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{HB}$ sont orthogonaux, et donc $\overrightarrow{HK}$ est également orthogonal à $\overrightarrow{BC}$, ce qui signifie que (HK) est perpendiculaire à (BC).

Nous avons donc montré que (HI) et (AJ) se croisent en un point K qui est le milieu de (HI). Par conséquent, (HI) est bien perpendiculaire à (HJ), comme demandé.

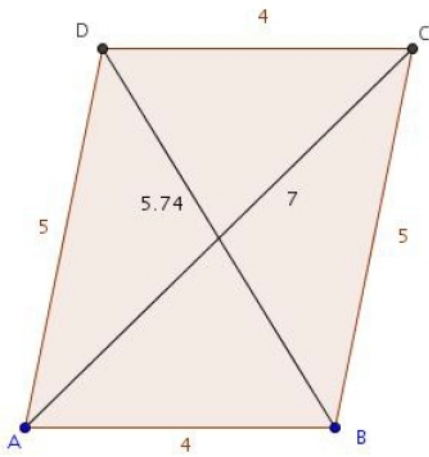
Exercice 11 :

Indication : créer un repère dans le parallélogramme.

ABCD est un parallélogramme avec AB = 4, AD = 5 et AC = 7.

1. Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$.

2. En déduire BD.

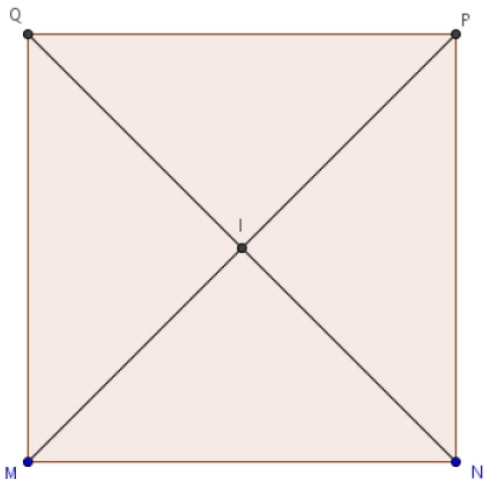


Exercice 12 :

MNPQ est un carré avec $MN = 6$. I est le centre du carré.

Calculer les produits scalaires suivants :

1. $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{QP} = MN \times QP \times \cos(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{QP})$
 $= 6 \times 6 \times \cos(0) = 36$
2. $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{PN} = MN \times PN \times \cos(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{PN}) = 6 \times 6 \times \cos(90) = 0$
3. $\overrightarrow{IN} \cdot \overrightarrow{IP} = IN \times IP \times \cos(\overrightarrow{IN}, \overrightarrow{IP}) = 3\sqrt{2} \times 3\sqrt{2} \times \cos(90) = 0$
4. $\overrightarrow{QI} \cdot \overrightarrow{NI} = QI \times NI \times \cos(\overrightarrow{QI}, \overrightarrow{NI}) = 3\sqrt{2} \times 3\sqrt{2} \times \cos(180) = -18$



Exercice 13 :

ABC est un triangle dans lequel $AB = 2$ et $AC = 3$.

De plus $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 4$

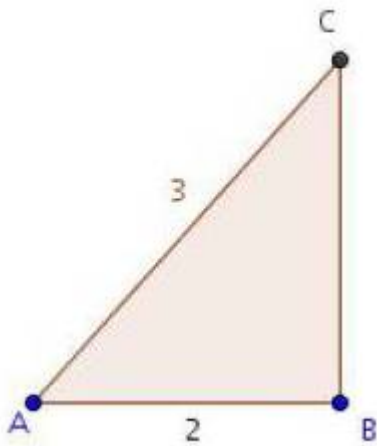
Ce triangle est-il rectangle ? Si oui, préciser en quel sommet.



$$\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{AB \times AC} = \frac{4}{2 \times 3}$$

$$\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{2}{3}$$

Conclusion : le triangle n'est pas rectangle car le cosinus est différent de zéro.

**Exercice 14 :**

ABC est un triangle équilatéral de côté 5 cm. I est le milieu de [BC].

Calculer les produits scalaires suivants :

1. $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$.

$$\begin{aligned} & \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} \\ &= BA \times BC \times \cos(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) \\ &= 25 \times \cos 60^\circ = \frac{25}{2} \end{aligned}$$

2. 

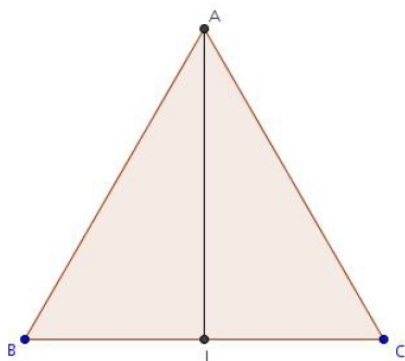


$$\begin{aligned}\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CI} &= CA \times CI \times \cos(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CI}) \\ &= 5 \times 2,5 \times \frac{1}{2} = 6,25\end{aligned}$$

$$3. (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AI}.$$

$$(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AI} = \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{AI} = 0$$

(Ai) est une médiane mais comme le triangle est équilatéral, c'est aussi une hauteur donc ces deux vecteurs sont orthogonaux et par conséquent leur produit scalaire nul.



Exercice 15 :

Dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$

on considère les points suivants : A (2 ; 1), B (7 ; 2) et C (3 ; 4).

Toutes les questions suivantes sont indépendantes et sans rapport.

1. Calculer les coordonnées du barycentre G de (A ; 3), (B ; 2) et (C ; - 4).

Tout d'abord, le barycentre existe car $3+2-4=1 \neq 0$

$$3\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GB} - 4\overrightarrow{GC} = \vec{0}$$



$$\begin{cases} 3(2-x_G) + 2(7-x_G) - 4(3-x_G) = 0 \\ 3(1-y_G) + 2(2-y_G) - 4(4-y_G) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6 - 3x_G + 14 - 2x_G - 12 + 4x_G = 0 \\ 3 - 3y_G + 4 - 2y_G - 16 + 4y_G = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -x_G + 8 = 0 \\ -y_G + 9 = 0 \end{cases}$$

$$\{ x_G =$$

2. Déterminer une équation cartésienne de la médiatrice de [BC].

un vecteur directeur de [BC] est $\vec{u}(3-7$
 $4-2)$

$$\vec{u}(-4$$

$$2)$$

$$\vec{u}(-2$$

$$1)$$

donc un vecteur normal de la médiatrice est :

$$\vec{u}(-2$$

$$1)$$

donc une équation cartésienne est du type :

$$-2x + 1y + c = 0$$

or le milieu I de [BC] appartient à la médiatrice : $I(\frac{7+3}{2}$ donc $I(5$
 $\frac{2+4}{2})$ $3)$

Nous obtenons :

$$-2 \times 5 + 3 + c = 0$$

$$c = 7$$

Conclusion : une équation cartésienne de la médiatrice est $-2x + y + 7 = 0$.

3. Calculer $\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CA}$.

$$\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CA} = (7-3$$

$$2-4) \cdot (2-3$$

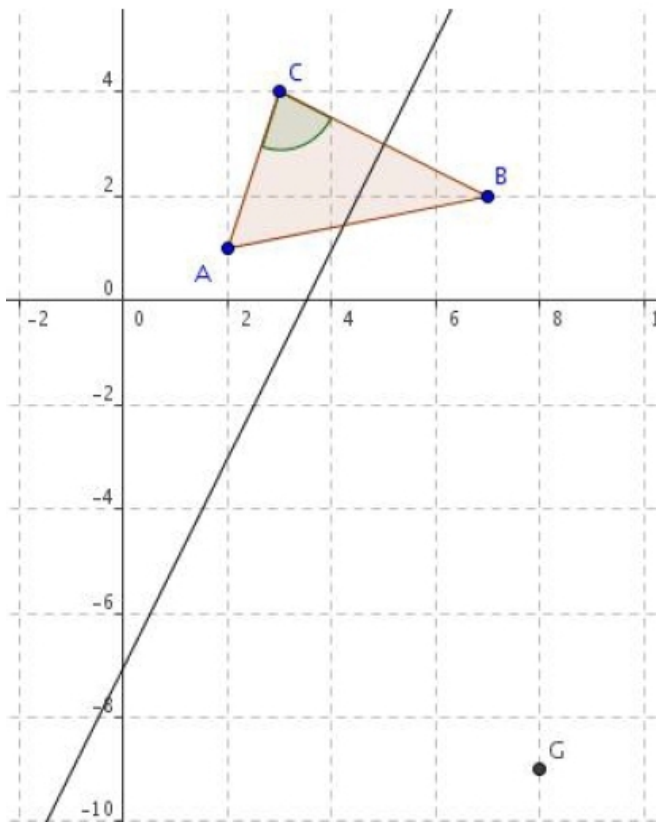
$$1-4) = (4$$

$$-2) \cdot (-1$$

$$-3) = 4 \times (-1) + (-2) \times (-3) = -4 + 6 = 2$$

4. L'angle $\widehat{C}$ est-il droit ?

Non puisque le produit scalaire n'est pas nul.



Exercice 16 :

1. Dans un triangle ABC , on sait que le carré de la longueur d'un côté est égal à la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés, moins deux fois leur produit par le cosinus de l'angle compris entre eux. En utilisant cette formule avec le triangle ABC , on obtient :

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2 \times AC \times BC \times \cos \widehat{BAC}$$

En isolant BC^2 dans cette expression, on a :

$$BC^2 = AB^2 - AC^2 + 2 \times AC \times BC \times \cos \widehat{BAC}$$

Il nous reste donc à calculer le cosinus de l'angle $\widehat{BAC}$ et le produit $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$:

Tout d'abord, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos \widehat{BAC}$. Sachant que $AB=6$ cm et $AC=5$ cm (et que $\widehat{BAC} = 60^\circ$),

on obtient :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos \widehat{BAC} = 6 \times 5 \times \frac{1}{2} = 15 \text{ cm}^2$$

Ensuite, on peut utiliser la formule du cosinus dans le triangle ABC :

$$\cos \widehat{BAC} = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2 \times AB \times AC}$$

En substituant les valeurs connues, on obtient :

$$\cos \widehat{BAC} = \frac{6^2 + 5^2 - BC^2}{2 \times 6 \times 5} = \frac{11 - \frac{BC^2}{25}}{6}$$

En multipliant par 6 et en simplifiant, on a :

$$6 \times \cos \widehat{BAC} = \frac{55}{30} - \frac{BC^2}{25}$$

Finalement, on peut réécrire cette expression de la façon suivante :

$$BC^2 = 25 \times \left(\frac{55}{30} - 6 \times \cos \widehat{BAC} \right) = 25 \times \left(\frac{11}{3} - 2 \cos \widehat{BAC} \right)$$

En substituant la valeur de $\cos \widehat{BAC}$ obtenue précédemment, on a :

$$BC^2 = 25 \times \left(\frac{11}{3} - 2 \times \frac{11 - BC^2/25}{6} \right) = \frac{175}{3} - \frac{10}{3} BC^2$$

En résolvant cette équation du second degré pour BC^2 , on obtient :

$$BC^2 = \frac{175 - 3 \times 15 \times 15}{10} = 50$$

Ainsi, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 15 \text{ cm}^2$ et $BC = 5\sqrt{2} \text{ cm}$.

2. On peut utiliser la même formule pour le carré d'un côté d'un triangle en fonction des deux autres côtés et de l'angle entre eux.

En isolant BC^2 , on a :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \times AB \times AC \times \cos \widehat{BAC}$$

Il nous faut donc calculer le produit $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ et le cosinus de l'angle $\widehat{BAC}$.

Tout d'abord, on a $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos \widehat{BAC}$.

Sachant que $AB=7 \text{ cm}$ et $AC=4 \text{ cm}$, on obtient :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos \widehat{BAC} = 7 \times 4 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -14 \text{ cm}^2$$

Ensuite, on peut utiliser la formule du cosinus dans le triangle ABC :

$$\cos \widehat{BAC} = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2 \times AB \times AC}$$

En substituant les valeurs connues, on obtient :

$$\cos \widehat{BAC} = \frac{7^2 + 4^2 - BC^2}{2 \times 7 \times 4} = \frac{33 - BC^2}{56}$$

On peut donc réécrire la formule pour BC^2 en isolant BC^2 :

$$BC^2 = 33 - 56 \times \cos \widehat{BAC} = 33 - 56 \times \frac{33 - BC^2}{56} = 2BC^2 - 33$$

Ce qui donne :

$$BC^2 = \frac{33}{2}$$

Ainsi, $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = -14 \text{ cm}^2$ et $BC = \sqrt{\frac{33}{2}} \text{ cm}$.

Exercice 17 :

Il semble y avoir une erreur dans la solution proposée pour le premier cas.

L'équation $BC^2 = AB^2 - AC^2 + 2 \times AC \times BC \times \cos(\widehat{BAC})$ est en réalité l'équation pour le cosinus de l'angle $\widehat{BAC}$.

Pour isoler BC^2 , on doit utiliser l'équation $BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2 \times AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC})$.

En utilisant cette dernière équation, on trouve :

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC}) = 6 \times 5 \times \frac{1}{2} = 15$$

En utilisant la formule pour le cosinus de l'angle $\widehat{BAC}$ dans le triangle ABC, on a :

$$\cos(\widehat{BAC}) = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2 \times AB \times AC}$$

En substituant les valeurs connues, on a :

$$\cos(\widehat{BAC}) = \frac{6^2 + 5^2 - BC^2}{2 \times 6 \times 5} = \frac{11 - \frac{BC^2}{25}}{6}$$

On peut multiplier les deux membres de cette équation par 6 pour obtenir :

$$6 \times \cos(\widehat{BAC}) = \frac{11}{3} - \frac{BC^2}{25}$$

En isolant BC^2 , on a :

$$BC^2 = \frac{175}{3} - 50 \times \cos(\widehat{BAC})$$

En utilisant la valeur précédente du cosinus de l'angle $\widehat{BAC}$ trouvée ci-dessus, on a :

$$BC^2 = \frac{175}{3} - 50 \times \left(\frac{11}{18} - \frac{BC^2}{75} \right) = \frac{25 \times BC^2 - 825}{9}$$

En résolvant cette équation, on trouve :

$$BC^2 = \frac{225}{4}$$

$$\text{Ainsi, } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 15 \text{ et } BC = \frac{15}{2}\sqrt{2}.$$

Exercice 18 :

Commençons par tracer la figure :

!Triangle équilatéral ABC avec H le projeté orthogonal de A sur (BC) et O le centre du cercle circonscrit à ABC.]

On a :

- $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont deux vecteurs de même norme (égale à la longueur a d'un côté du triangle). De plus, le triangle ABC étant équilatéral, l'angle $\widehat{BAC}$ vaut 60° , donc ces vecteurs forment un angle de 60° l'un avec l'autre. Ainsi, on a :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = a^2 \times \cos 60^\circ = \frac{a^2}{2}$$

- On a également $\overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{CB}$ (vecteur opposé), donc $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB} = -a^2$.

- Le vecteur $\overrightarrow{AH}$ est le projeté orthogonal de $\overrightarrow{AB}$ sur la droite (BC), donc il est orthogonal à $\overrightarrow{BC}$. Ainsi, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH} = 0$ et $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH} = 0$.

- Le triangle ABH est rectangle en H, donc l'hypoténuse AH est un diamètre du cercle circonscrit.

Ainsi, le point O (centre du cercle) se situe sur la droite (AH) et le produit scalaire $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC}$ est nul (les vecteurs sont orthogonaux).

- Enfin, le point O étant le centre du cercle circonscrit, les vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ ont même norme (le rayon du cercle) et ils forment un angle de 60° l'un avec l'autre (car ils joignent le centre à deux

points du cercle qui sont à distance égale). Ainsi,

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = r^2 \times \cos 60^\circ = \frac{a^2}{3}$$

où r est le rayon du cercle circonscrit (égal à $\frac{a}{\sqrt{3}}$).

En résumé, on a :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{a^2}{2}$$

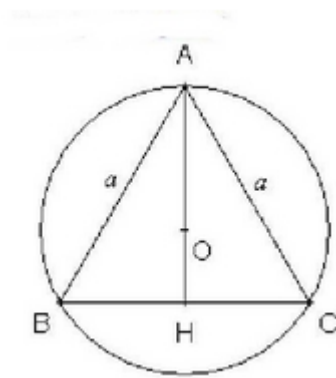
$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB} = -\frac{a^2}{2}$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH} = 0$$

$$\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$$

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \frac{a^2}{3}$$

où a est la longueur d'un côté du triangle ABC .



Exercice 19 :

Sachant que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont tels que $|\vec{u}| = 3$, $|\vec{v}| = 7$ et $\vec{u} \cdot \vec{v} = 13$.

Calculer les produits scalaires suivants :

1. $\vec{u} \cdot (\vec{u} + 3\vec{v})$

$$\begin{aligned} & \vec{u} \cdot (\vec{u} + 3\vec{v}) \\ &= \vec{u} \cdot \vec{u} + 3\vec{u} \cdot \vec{v} \quad (\vec{u} - 2\vec{v})^2 = |\vec{u}|^2 - 4\vec{u} \cdot \vec{v} + 4|\vec{v}|^2 \\ &= |\vec{u}|^2 + 3\vec{u} \cdot \vec{v} = 9 - 52 + 196 \\ &= 9 + 39 = 48 \end{aligned}$$

$$2. (\vec{u} - 2\vec{v})^2$$

$$\begin{aligned}(\vec{u} - 2\vec{v})^2 &= |\vec{u}|^2 - 4\vec{u} \cdot \vec{v} + 4|\vec{v}|^2 \\&= 9 - 52 + 28 \\&= -15\end{aligned}$$

Exercice 20 :

A quelle condition sur les points A, B et C a-t-on :

$$(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})^2 = (AB + AC)^2$$

Nous avons :

$$\begin{aligned}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})^2 &= AB^2 + AC^2 + 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB^2 + AC^2 + 2AB \times AC \times \cos(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) \\ \text{et} \\ (AB + AC)^2 &= AB^2 + AC^2 + 2 \times AB \times AC\end{aligned}$$

Il faut donc que :

$$\begin{aligned}\cos(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) &= 1 \\ (\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) &= 2k\pi\end{aligned}$$

donc

que **le point A appartienne à la droite (BC) privée du segment [BC]**.

Exercice 21 :

$$1. \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 1.$$

Soit I le milieu de [AB] donc isobarycentre de [AB].

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 1$$

$$(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}) \cdot (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}) = 1$$

en utilisant les propriétés du produit scalaire :

$$\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IB} = 1$$

$$MI^2 + \overrightarrow{MI} \cdot (\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}) + \overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IB} = 1$$

$$MI^2 + \vec{MI} \cdot \vec{0} + \vec{IA} \cdot \vec{IB} = 1$$

$$MI^2 + 0 + \vec{IA} \cdot \vec{IB} = 1$$

$$MI^2 + IA \times IB \times \cos \pi = 1$$

$$MI^2 - IA \times IB =$$

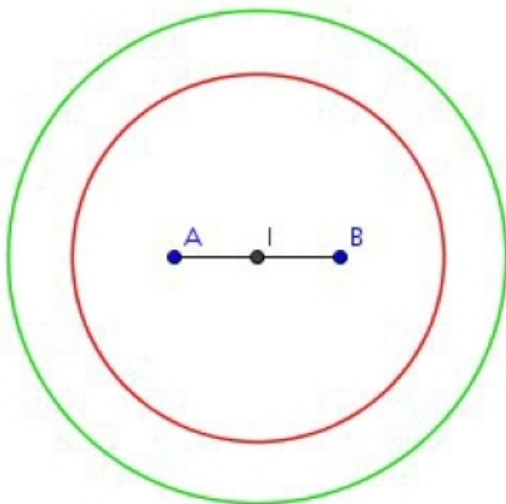
$$MI^2 = 1 + IA \times IB > 1$$

$$MI^2 = 1 + 0,5 \times 0,5$$

$$MI = \sqrt{1,25}$$

Conclusion : c'est le cercle de centre I et de rayon $\sqrt{1,25}$ dm .

$$2. \quad MA^2 + MB^2 = 5.$$



Exercice 22 :

[AB] est un segment de milieu I et AB = 2 cm.

1. Montrer que pour tout point M du plan :

$$MA^2 - MB^2 = 2\vec{IM} \cdot \vec{AB}$$

Nous avons :

$$MA^2 - MB^2 = (\vec{MA} + \vec{MB}) \cdot (\vec{MA} - \vec{MB})$$

$$MA^2 - MB^2 = (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}) \cdot (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{BM})$$

$$MA^2 - MB^2 = (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}) \cdot \overrightarrow{BA}$$

$$MA^2 - MB^2 = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}) \cdot \overrightarrow{BA}$$

$$MA^2 - MB^2 = (2\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}) \cdot \overrightarrow{BA}$$

$$MA^2 - MB^2 = 2\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{BA}$$

car I milieu de [AB] donc $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$

Exercice 23 :

Démontrer que :

$$1. \quad |\vec{u} + \vec{v}|^2 - |\vec{u} - \vec{v}|^2 = 4\vec{u} \cdot \vec{v}.$$

$$|\vec{u}|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + |\vec{v}|^2 - |\vec{u}|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} - |\vec{v}|^2 = 4\vec{u} \cdot \vec{v}$$

$$2. \quad |\vec{u} + \vec{v}|^2 + |\vec{u} - \vec{v}|^2 = 2(|\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2).$$

3. Quel est le lien avec le losange, le parallélogramme ?

Faire une figure...

4. Démontrer que :

$$(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = |\vec{u}|^2 - |\vec{v}|^2$$

$$(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u} \cdot \vec{u} - \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{u} - \vec{v} \cdot \vec{v}$$

$$(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u} \cdot \vec{u} - \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{v} - \vec{v} \cdot \vec{v} \quad (\text{car le produit scalaire est symétrique})$$

$$(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u} \cdot \vec{u} - \vec{v} \cdot \vec{v}$$

$$(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = |\vec{u}|^2 - |\vec{v}|^2$$

5. En déduire qu'un parallélogramme a ses diagonales perpendiculaires si et seulement si ses côtés sont égaux.

Faire une figure....

Exercice 24 :

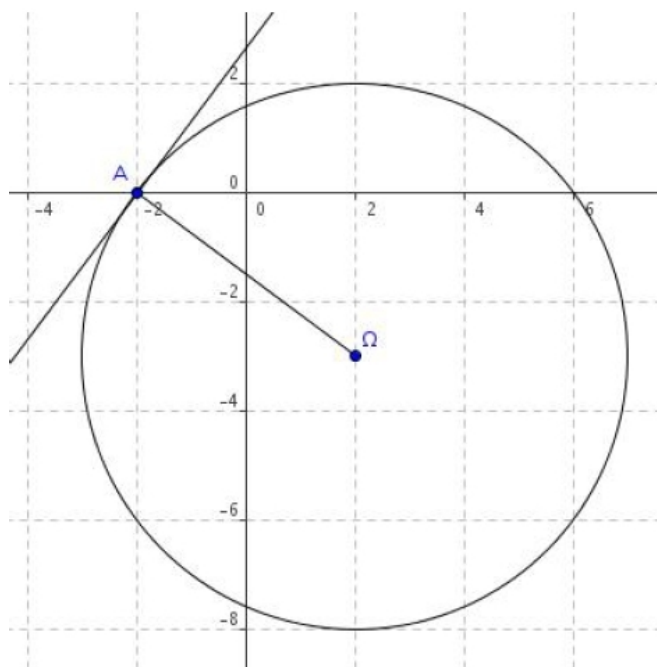
Indication :

L'équation d'un cercle est $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$

avec $\Omega(x_0;y_0)$ centre du cercle de rayon R.

Dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$, on donne un point $\Omega(2;-3)$.

1. Déterminer l'équation du cercle (C) de centre Ω et de rayon $R = 5$.
2. Démontrer que le point A (- 2 ; 0) est un point du cercle (C).
3. Déterminer une équation cartésienne de la tangente en A au cercle (C).



Exercice 25 :

Commençons par tracer la figure :

On a :

1. Les vecteurs $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{QP}$ sont des vecteurs opposés (vecteur directeur de la droite (MN) et vecteur directeur de la droite (PQ)).

Ainsi, leur produit scalaire est :

$$\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{QP} = -MN \cdot QP = -6^2 = -36$$

2. Le vecteur $\overrightarrow{MN}$ est orthogonal à lui-même (vecteur nul), donc on a :

$$\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{PN} = 0$$

3. Les vecteurs $\overrightarrow{IN}$ et $\overrightarrow{IP}$ ont même norme (le rayon du cercle circonscrit au carré) et ils font un angle de 90° l'un avec l'autre (car ils joignent le centre du carré à deux points du carré qui sont à distance égale). Ainsi,

$$\overrightarrow{IN} \cdot \overrightarrow{IP} = r^2 \times \cos 90^\circ = 0$$

où r est le rayon du cercle circonscrit au carré (égal à $\frac{MN}{2} = 3$).

4. Le point I est le centre du carré, donc les vecteurs $\overrightarrow{QI}$ et $\overrightarrow{NI}$ sont des vecteurs opposés (ils ont même norme et sont de sens contraire).

Ainsi, leur produit scalaire est :

$$\overrightarrow{QI} \cdot \overrightarrow{NI} = -NI \cdot QI = -r^2 = -3^2 = -9$$

où r est le rayon du cercle circonscrit au carré (égal à $\frac{MN}{2} = 3$).

Exercice 26 :

On se place dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

On considère un triangle ABC avec A (- 1 ; 2), B (3 ; 1) et C (2 ; 4).

1. Déterminer une équation de la médiatrice du segment [AB].

Déterminons les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3-1 \\ 1-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Déterminons les coordonnées de I milieu du segment [AB] :

$$I\left(\frac{-1+3}{2}, \frac{2+1}{2}\right) = \left(1, \frac{3}{2}\right)$$

Les coordonnées d'un vecteur directeur de la médiatrice est un vecteur normal au vecteur $\overrightarrow{AB}$
donc $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$

Tout point M(x,y) appartient à la médiatrice de [AB]

si et seulement si :

$$\overrightarrow{IM} = k\vec{u}$$

(k non nul)

$$\begin{pmatrix} x-1 \\ y-\frac{3}{2} \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\text{donc } \begin{cases} k = \end{cases}$$

$$\begin{cases} k = \end{cases}$$

$$\begin{cases} k = \end{cases}$$

donc l'équation réduite de la médiatrice de [AB] est :

$$y =$$

2. Déterminer une équation de la hauteur issue de A dans le triangle ABC.

Déterminons les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{BC}$:

$$\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 2-3 \\ 4-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Notons H le projeté orthogonal de A sur (BC).

La droite (AH) est donc la hauteur issue du sommet A.

Soit M(x,y) appartient à (AH)

si et seulement si :

$$\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AM} = 0$$

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x+1 \\ y-2 \end{pmatrix} = 0$$

$$-(x+1)+3(y-2)=0$$

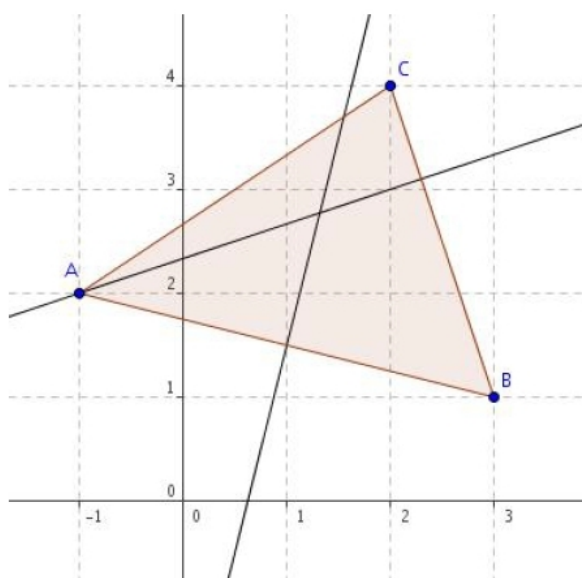
$$-x-1+3y-6=0$$

$$-x+3y-7=0$$

$$3y = x+7$$

$$y = \frac{x+7}{3}$$

$y = \frac{x+7}{3}$ est une équation réduite de la hauteur issue de A.



Exercice :

On se place dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. Déterminer l'équation du cercle de centre $\Omega(5;1)$ tangent à la droite (D) d'équation :

$$x+y-4=0.$$

Indication :

on rappelle que la distance entre un point $A(\alpha;\beta)$ et une droite (D) d'équation $ax + by + c = 0$ est donnée par la formule :

$$d(A,D) = \frac{|a\alpha + b\beta + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Déterminons la distance entre la tangente et le centre du cercle, ce sera le rayon du cercle.

$$d(\Omega,D) = \frac{|1 \times 5 + 1 \times 1 - 4|}{\sqrt{1^2 + 1^2}}$$

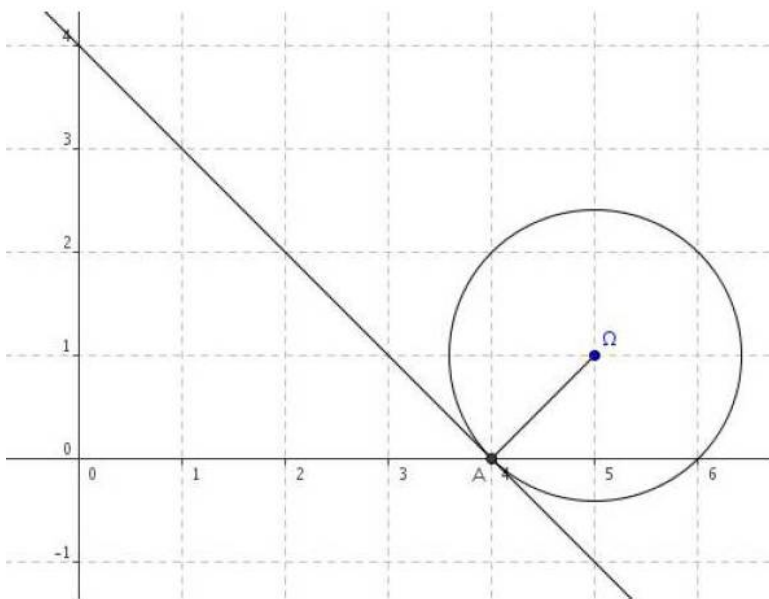
$$d(\Omega,D) = \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

L'équation du cercle est :

$$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = R^2$$

$$(x-5)^2 + (y-1)^2 = \sqrt{2}^2$$

$$(x-5)^2 + (y-1)^2 = 2$$



Exercice 27 :

On se place dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Examiner si les équations suivantes sont des équations de cercle et, le cas échéant, préciser le centre et le rayon du cercle.

1. $x^2 + y^2 - 2x - 6y + 5 = 0$.

$$(x-1)^2 - 1 + (y-3)^2 - 9 + 5 = 0$$

$$(x-1)^2 + (y-3)^2 = 5$$

C'est un cercle de centre le point I (1 ; 3) et de rayon $\sqrt{5}$.

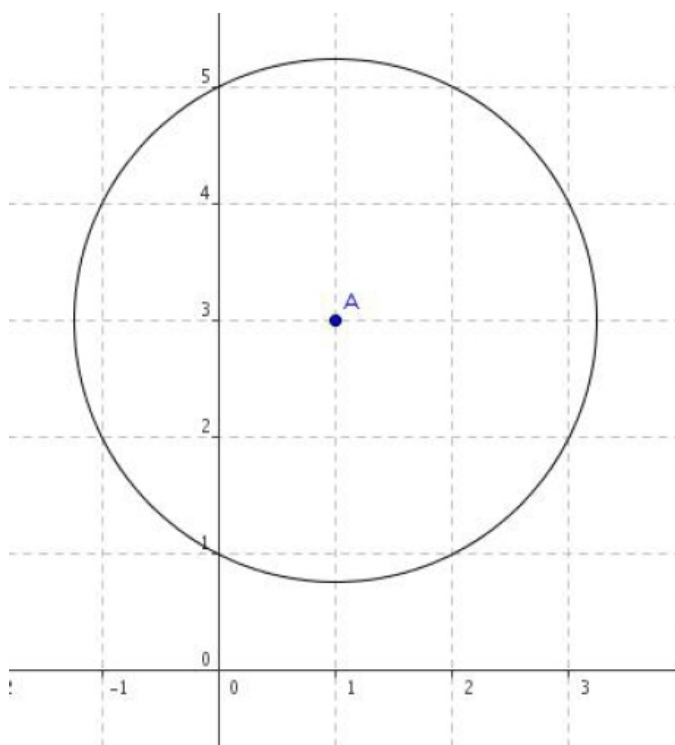
2. $x^2 + y^2 - x - 3y + 3 = 0$.

$$(x-\frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4} + (y-\frac{3}{2})^2 + \frac{9}{4} + 3 = 0$$

$$(x-\frac{1}{2})^2 + (y-\frac{3}{2})^2 + \frac{8}{4} + \frac{12}{4} = 0$$

$$(x-\frac{1}{2})^2 + (y-\frac{3}{2})^2 = -5$$

Ce n'est pas l'équation d'un cercle .



Exercice 28 :

Indication : utiliser les formule de Pythagore généralisé dans le triangle quelconque.

ABC est un triangle et I est le milieu de [BC].

On donne : $BC = 4$, $AI = 3$ et $(\vec{IA}, \vec{IB}) = \frac{\pi}{3}$.

Calculer :

1. $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$.
2. $AB^2 + AC^2$.
3. $AB^2 - AC^2$.
4. AB et AC .

