

Probabilités sur un univers fini

Exercice 1 : Univers, événements et système complet

On lance deux fois un dé équilibré à six faces. On note $\Omega = \llbracket 1, 6 \rrbracket^2$, muni de la probabilité uniforme. On considère les événements A : « le premier résultat est pair », B : « la somme des résultats vaut 7 » et C : « on obtient au moins un six ».

1. Écrire A , B et C comme des parties de Ω , puis donner leurs cardinaux.
2. Décrire en français et calculer la probabilité de $A \cap B$ et de $\overline{A \cup C}$.
3. Pour $k \in \llbracket 1, 6 \rrbracket$, on note M_k l'événement « le plus grand des deux résultats vaut k ». Montrer que $(M_1, \dots, M_6)$ est un système complet d'événements et calculer $P(M_k)$.
4. Les événements A , $\overline{A} \cap \{\text{le second résultat est pair}\}$ et $\overline{A} \cap \{\text{le second résultat est impair}\}$ forment-ils un système complet ? Donner leurs probabilités.

Exercice 2 : Construction d'une probabilité sur un univers fini

On note $\Omega = \llbracket 1, 6 \rrbracket$.

1. Déterminer le réel c pour que $P(\{k\}) = ck$ définisse une probabilité sur Ω . Calculer alors la probabilité d'obtenir un nombre pair, puis celle d'obtenir un nombre au moins égal à 4.
2. Même question avec $P(\{k\}) = \frac{a}{k(k+1)}$: déterminer a , puis calculer $P(\{1\})$ et $P(\{1, 2, 3\})$.

3. Existe-t-il un réel b tel que $P(\{k\}) = b(k-3)$ définisse une probabilité sur Ω ?

Exercice 3 : Tirages simultanés et probabilité uniforme

Une urne contient 5 boules rouges et 3 boules noires, indiscernables au toucher. On tire simultanément 3 boules. On note X le nombre de boules rouges obtenues.

1. Préciser l'univers choisi et justifier l'emploi de la probabilité uniforme.
2. Déterminer la loi de X et vérifier que la somme des probabilités vaut 1.
3. Calculer la probabilité d'obtenir au moins une boule noire.

Exercice 4 : Paradoxe des anniversaires

Un groupe compte k personnes, avec $2 \leq k \leq 365$. On néglige les années bissextiles et on suppose que les k dates d'anniversaire forment un k -uplet uniforme de $[[1, 365]]^k$.

1. Montrer que la probabilité q_k que les k anniversaires soient deux à deux distincts vaut

$$q_k = \prod_{i=0}^{k-1} \frac{365-i}{365}.$$

2. En déduire la probabilité p_k qu'au moins deux personnes aient le même anniversaire.

3. Montrer que la suite (p_k) est croissante. On admet que $p_{22} \approx 0,476$ et $p_{23} \approx 0,507$. Quel est le plus petit groupe pour lequel une coïncidence est plus probable que son contraire ?

4. À l'aide de l'inégalité $1 - x \leq e^{-x}$, montrer que $q_k \leq \exp\left(-\frac{k(k-1)}{730}\right)$, puis que $p_{40} \geq 0,88$.

Exercice 5 : Somme de deux dés et événements $\{X \in A\}$

On lance deux dés équilibrés, et on modélise les résultats par deux variables X_1 et X_2 sur $\Omega = \llbracket 1, 6 \rrbracket^2$ muni de la probabilité uniforme : $X_1(a, b) = a$ et $X_2(a, b) = b$. On pose $S = X_1 + X_2$ et $D = |X_1 - X_2|$. La grille ci-dessous donne la valeur de S pour chacune des 36 issues.

résultat du second dé	6	7	8	9	10	11	12
	5	6	7	8	9	10	11
	4	5	6	7	8	9	10
	3	4	5	6	7	8	9
	2	3	4	5	6	7	8
	1	2	3	4	5	6	7
		1	2	3	4	5	6
		résultat du premier dé					

- Déterminer la loi de S et l'écrire sous la forme $P(S = k) = \frac{6 - |k - 7|}{36}$.
- Calculer $P(S \in \{7, 11\})$, $P(S \in \{2, 3, 4\})$ et la probabilité que S soit un nombre premier.

3. Déterminer la loi de D .
4. Exprimer l'événement $\{S = 7\} \cap \{D = 1\}$ à l'aide de X_1 et X_2 , puis calculer sa probabilité.

Exercice 6 : Loi d'une variable $f(X)$

Soit X une variable aléatoire de loi uniforme sur $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$.

1. Déterminer la loi de $Y = X^2$.
2. Déterminer la loi de $Z = (-1)^X$ et celle de $W = \max(X, 0)$.
3. La variable Y suit-elle une loi uniforme sur $Y(\Omega)$? Deux variables de même loi sont-elles égales ? Comparer X et $-X$.

Exercice 7 : Probabilités conditionnelles : deux enfants

Une famille a deux enfants. On suppose que les quatre configurations (fille, fille), (fille, garçon), (garçon, fille) et (garçon, garçon), où l'aîné est cité en premier, sont équiprobables.

1. Sachant que la famille a au moins une fille, quelle est la probabilité que les deux enfants soient des filles ?
2. Sachant que l'aîné est une fille, quelle est la probabilité que les deux enfants soient des filles ?
3. Expliquer pourquoi les deux réponses diffèrent, alors que l'information semble comparable.

Exercice 8 : Tirages sans remise et probabilités composées

Une urne contient 3 boules blanches et 2 boules noires. On tire les boules une à une, sans remise, jusqu'à obtenir une boule noire. On note T le rang de la première boule noire, et N_i l'événement « la i -ième boule tirée est noire ».

1. Justifier que T prend ses valeurs dans $\{1, 2, 3, 4\}$.
2. Exprimer $\{T = k\}$ à l'aide des N_i , puis déterminer la loi de T par la formule des probabilités composées.
3. Calculer $P(N_2)$ par la formule des probabilités totales. Commenter le résultat.

Exercice 9 : Test de dépistage et formule de Bayes

Une maladie touche 1 % d'une population. Un test de dépistage est positif chez 99 % des malades, et il est positif chez 2 % des personnes saines. On choisit une personne au hasard. On note M « la personne est malade » et T « le test est positif ».

1. Calculer $P(T)$.
2. Calculer la probabilité qu'une personne dont le test est positif soit malade. Commenter.
3. Calculer la probabilité qu'une personne dont le test est négatif soit malade.
4. On fait passer un second test du même type à la personne. On suppose que, sachant M et sachant $\overline{M}$, les résultats des deux tests sont indépendants. Calculer la probabilité d'être malade sachant que les deux tests sont positifs.

Exercice 10 : Trois urnes et probabilités des causes

Pour $k \in \{1, 2, 3\}$, l'urne U_k contient k boules blanches et $4 - k$ boules noires. On choisit une urne au hasard, puis on y tire une boule. On note B_1 « la boule tirée est blanche ».

1. Calculer $P(B_1)$.
2. Sachant que la boule est blanche, quelle est la probabilité que l'urne choisie soit U_k , pour chaque k ?
3. On remet la boule dans l'urne choisie, puis on effectue un second tirage dans la même urne. On note B_2 « la seconde boule est blanche ». Calculer $P(B_1 \cap B_2)$ et $P_{B_1}(B_2)$.
4. Les événements B_1 et B_2 sont-ils indépendants ? Interpréter.

Exercice 11 : Rang du premier pile

On lance n fois une pièce qui donne « pile » avec la probabilité $p \in]0, 1[$, les lancers étant indépendants. Pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on note X_i la variable qui vaut 1 si le i -ième lancer donne pile et 0 sinon. On note T le rang du premier pile, avec la convention $T = 0$ si aucun pile n'apparaît.

1. Quelle est la loi de chaque X_i ? Que signifie l'hypothèse « les lancers sont indépendants » en termes des X_i ?
2. Exprimer $\{T = k\}$, pour $1 \leq k \leq n$, puis $\{T = 0\}$, à l'aide des X_i .
3. En déduire la loi de T et vérifier que la somme des probabilités vaut 1.
4. Pour $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, calculer la probabilité que les k premiers lancers donnent tous face.

Exercice 12 : Nombre de bonnes réponses à un QCM

Un QCM comporte 10 questions indépendantes. Chacune propose 4 réponses, dont une seule est juste. Un candidat répond au hasard à chaque question. On note X son nombre de bonnes réponses.

1. Modéliser X comme une somme de variables de Bernoulli et en déduire sa loi.

2. Calculer la probabilité qu'il n'ait aucune bonne réponse, puis la probabilité qu'il en ait au moins deux.
3. On donne $P(X \geq 5) \approx 0,078$. Le hasard permet-il raisonnablement d'obtenir la moyenne ?

Exercice 13 : Mode d'une loi binomiale

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $p \in]0, 1[$ et $X \sim \mathcal{B}(n, p)$. On pose $b_k = P(X = k)$ pour $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$.

1. Pour $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, calculer le quotient $\frac{b_{k+1}}{b_k}$.
2. Montrer que $b_{k+1} \geq b_k$ si et seulement si $k+1 \leq (n+1)p$.
3. En déduire la ou les valeurs de k pour lesquelles b_k est maximal (le mode de la loi). Distinguer selon que $(n+1)p$ est entier ou non.
4. Application : donner le mode pour $n = 10$, $p = \frac{1}{4}$, puis pour $n = 11$, $p = \frac{1}{4}$.

Exercice 14 : Loi conjointe donnée par un tableau

Un couple (X, Y) de variables aléatoires, à valeurs dans $\{0, 1, 2\} \times \{0, 1\}$, a la loi conjointe suivante, où la case (x, y) contient $P(X = x, Y = y)$:

	$x = 0$	$x = 1$	$x = 2$
$y = 0$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$
$y = 1$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{12}$

1. Vérifier que ce tableau définit bien une loi de probabilité.
2. Déterminer les lois marginales de X et de Y .

3. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
4. Déterminer la loi de $X + Y$ et calculer $P(X = Y)$.
5. Déterminer la loi conditionnelle de X sachant $\{Y = 1\}$.

Exercice 15 : Minimum et maximum de deux dés

Soit $n \geq 2$. On lance deux dés équilibrés à n faces : X_1 et X_2 sont indépendantes, de loi uniforme sur $\llbracket 1, n \rrbracket$. On pose $U = \min(X_1, X_2)$ et $V = \max(X_1, X_2)$.

1. Pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, calculer $P(V \leq k)$, puis en déduire la loi de V .
2. Calculer de même $P(U \geq k)$ et la loi de U .
3. Déterminer la loi conjointe du couple (U, V) , puis retrouver la loi de V comme loi marginale.
4. Les variables U et V sont-elles indépendantes ?
5. Application numérique pour $n = 6$: calculer $P(V = 4)$, $P(U = 2)$ et $P(U = 2, V = 4)$.

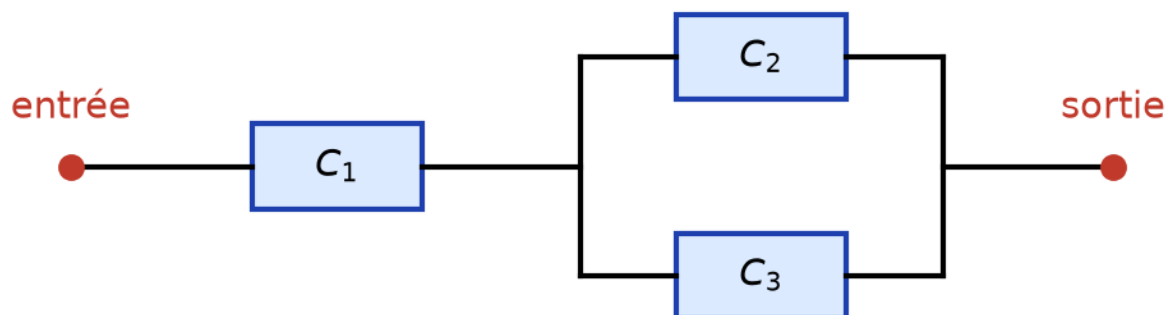
Exercice 16 : Indépendance deux à deux sans indépendance mutuelle

1. On lance deux pièces équilibrées de façon indépendante. On note A « la première donne pile », B « la seconde donne pile » et C « les deux pièces donnent le même résultat ». Montrer que A , B , C sont deux à deux indépendants, mais pas mutuellement indépendants.
2. Sur $\Omega = \llbracket 1, 8 \rrbracket$ muni de la probabilité uniforme, on pose $E = \{1, 2, 3, 4\}$, $F = \{1, 2, 3, 5\}$ et $G = \{1, 6, 7, 8\}$. Vérifier que $P(E \cap F \cap G) = P(E)P(F)P(G)$. Les événements E , F , G sont-ils mutuellement indépendants ?
3. Montrer que si A et B sont indépendants, alors A et $\overline{B}$ le sont aussi.

4. Montrer qu'un événement A est indépendant de lui-même si et seulement si $P(A) \in \{0, 1\}$.

Exercice 17 : Fiabilité d'un système de composants

Un système est formé de trois composants C_1 , C_2 , C_3 montés comme sur le schéma ci-dessous. Le courant passe de l'entrée à la sortie si C_1 fonctionne et si au moins l'un des composants C_2 , C_3 fonctionne. Chaque composant fonctionne avec la probabilité p , et les événements F_i : « C_i fonctionne » sont mutuellement indépendants.



1. Exprimer l'événement S : « le système fonctionne » à l'aide des F_i .
2. Justifier que F_1 et $F_2 \cup F_3$ sont indépendants, puis montrer que $P(S) = p^2(2 - p)$.
3. Calculer $P(S)$ pour $p = 0,9$.
4. Le système est en panne. Quelle est la probabilité que C_1 soit en panne, pour $p = 0,9$?

Exercice 18 : Coalitions de variables de Bernoulli

Soient X_1, X_2, X_3, X_4 des variables mutuellement indépendantes de même loi $\mathcal{B}(p)$, avec $p \in]0, 1[$. On pose $S = X_1 + X_2$ et $Q = X_3 X_4$.

1. Déterminer la loi de S et celle de Q .
2. Justifier que S et Q sont indépendantes.
3. Calculer $P(S = Q)$, puis sa valeur pour $p = \frac{1}{2}$.
4. Les variables S et $X_1 X_3$ sont-elles indépendantes ?

Exercice 19 : Somme de deux lois binomiales indépendantes

Soient $n, m \in \mathbb{N}^*$, $p \in]0, 1[$, et X, Y deux variables indépendantes de lois respectives $\mathcal{B}(n, p)$ et $\mathcal{B}(m, p)$.

1. Démontrer la formule de Vandermonde : pour $s \in [[0, n+m]]$,

$$\sum_{k=0}^s \binom{n}{k} \binom{m}{s-k} = \binom{n+m}{s},$$
 avec la convention $\binom{a}{b} = 0$ si $b > a$.
2. Montrer par un calcul direct que $X + Y \sim \mathcal{B}(n + m, p)$.
3. Retrouver ce résultat sans calcul, à l'aide de $n + m$ variables de Bernoulli indépendantes et du lemme des coalitions (on admet l'existence d'un tel modèle).
4. Soit $s \in [[0, n+m]]$. Déterminer la loi conditionnelle de X sachant $\{X + Y = s\}$.
 Dépend-elle de p ?

Exercice 20 : Variable indépendante d'une fonction d'elle-même

1. Soit X de loi uniforme sur $\{-1, 0, 1\}$. Les variables X et X^2 sont-elles indépendantes ?
2. Soit X de loi uniforme sur $\{-1, 1\}$. Les variables X et X^2 sont-elles indépendantes ?
3. Soient X une variable aléatoire et f une fonction telles que X et $Y = f(X)$ soient

indépendantes. Montrer que, pour tout $y \in Y(\Omega)$, $P(Y = y) \in \{0, 1\}$. En déduire qu'il existe c tel que $P(Y = c) = 1$.

4. Réciproquement, montrer que si $P(Y = c) = 1$, alors Y est indépendante de toute variable aléatoire.

Exercice 21 : Pièce truquée et indépendance conditionnelle

Un sac contient deux pièces : une pièce équilibrée et une pièce truquée qui donne toujours pile. On choisit une pièce au hasard, puis on la lance n fois. Sachant la pièce choisie, les lancers sont indépendants. On note E « la pièce choisie est la pièce équilibrée », R son contraire, et A_n « les n premiers lancers donnent pile ».

1. Calculer $P(A_n)$.
2. Montrer que $P_{A_n}(R) = \frac{2^n}{2^n + 1}$. Calculer cette valeur pour $n = 3$ et sa limite quand $n \rightarrow +\infty$.
3. Calculer la probabilité que le lancer numéro $n+1$ donne pile sachant A_n . Étudier sa limite.
4. On note P_1 « le premier lancer donne pile » et P_2 « le second lancer donne pile ». Les événements P_1 et P_2 sont-ils indépendants ? Commenter.

Exercice 22 : Transmission d'un bit à travers des relais

Un bit (0 ou 1) est transmis à travers n relais successifs. Chaque relais transmet le bit reçu sans erreur avec la probabilité $p \in]0, 1[$, et l'inverse avec la probabilité $1 - p$, indépendamment des autres relais. On note p_n la probabilité que le bit reçu après n relais soit le bit émis, avec $p_0 = 1$.

1. À l'aide de la formule des probabilités totales, montrer que $p_{n+1} = (2p - 1)p_n + 1 - p$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. En déduire l'expression de p_n , puis sa limite.

- Retrouver ce résultat autrement : on note N le nombre de relais qui commettent une erreur. Donner la loi de N , puis exprimer P_n comme une somme et la calculer.
- Pour $p = 0,9$, calculer P_{10} et déterminer le plus petit n tel que $P_n < 0,6$.

Exercice 23 : Problème : indépendance et fonction indicatrice d'Euler

Soit $n \geq 2$ un entier. On choisit un entier K au hasard dans $\Omega = \llbracket 1, n \rrbracket$, muni de la probabilité uniforme. Pour tout diviseur $d \geq 1$ de n , on note A_d l'événement « d divise K ».

- Montrer que $P(A_d) = \frac{1}{d}$ pour tout diviseur d de n .
- Soient $p_1, \dots, p_r$ les diviseurs premiers distincts de n . Montrer que $A_{p_1} \cap \dots \cap A_{p_r} = A_{p_1 \dots p_r}$, puis que les événements $A_{p_1}, \dots, A_{p_r}$ sont mutuellement indépendants.
- Pour $n = 8$, les événements A_2 et A_4 sont-ils indépendants ? Commenter.
- On note $\varphi(n)$ le nombre d'entiers de $\llbracket 1, n \rrbracket$ premiers avec n . Exprimer l'événement « K est premier avec n » à l'aide des A_{p_i} , puis démontrer que

$$\varphi(n) = n \prod_{i=1}^r \left(1 - \frac{1}{p_i}\right).$$

- Calculer $\varphi(360)$ et $\varphi(1001)$.

Le corrigé des exercices

Chaque exercice est corrigé en détail, question par question, sur la page suivante.



Pour aller plus loin en maths sup

- Le cours : [probabilités sur un univers fini, cours de maths sup](#)
- À maîtriser avant : [Dénombrement](#)
- Chapitre précédent : [Dénombrement](#)
- Chapitre suivant : [Espérance, variance et inégalités probabilistes](#)
- Le même thème en L1 : [probabilités finies, exercices de maths en L1](#)
- Tester vos connaissances : [QCM de maths sup par chapitre](#)
- Le sommaire : [tous les chapitres de maths sup](#) et les [chapitres de maths spé](#)