

Probabilités sur un univers fini

Corrigé de l'exercice 1 : Univers, événements et système complet

- On a $A = \{2, 4, 6\} \times \llbracket 1, 6 \rrbracket$, donc $|A| = 18$. Ensuite, $B = \{(1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1)\}$, donc $|B| = 6$. Enfin, $\overline{C} = \llbracket 1, 5 \rrbracket^2$, donc $|C| = 36 - 25 = 11$. Ainsi $|A| = 18$, $|B| = 6$ et $|C| = 11$.
- $A \cap B$ signifie « le premier résultat est pair et la somme vaut 7 ». Or $A \cap B = \{(2,5), (4,3), (6,1)\}$, donc $P(A \cap B) = \frac{3}{36}$. Ensuite, d'après De Morgan, $\overline{A \cup C} = \overline{A} \cap \overline{C}$: « le premier résultat est impair et aucun six n'apparaît ». Cet événement vaut $\{1, 3, 5\} \times \llbracket 1, 5 \rrbracket$, de cardinal 15. Donc $P(A \cap B) = \frac{1}{12}$ et $P(\overline{A \cup C}) = \frac{5}{12}$.
- Pour toute issue (a, b) , le nombre $\max(a, b)$ prend une et une seule valeur de $\llbracket 1, 6 \rrbracket$. Les M_k sont donc deux à deux disjoints et leur réunion vaut Ω : c'est un système complet. De plus, $\{\max \leq k\} = \llbracket 1, k \rrbracket^2$ a k^2 éléments. Par conséquent, $|M_k| = k^2 - (k-1)^2 = 2k - 1$. On obtient $P(M_k) = \frac{2k-1}{36}$, et l'on vérifie que $\sum_{k=1}^6 (2k-1) = 36$.
- Oui. En effet, une issue est soit dans A , soit dans $\overline{A}$. Dans le second cas, le second résultat est pair ou impair, sans ambiguïté. Les trois événements sont donc disjoints et recouvrent Ω . Leurs cardinaux valent 18, $3 \times 3 = 9$ et 9. Leurs probabilités sont $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ et $\frac{1}{4}$.

Corrigé de l'exercice 2 : Construction d'une probabilité sur un univers fini

1. D'après le cours, $(ck)_1 \leq k \leq 6$ définit une probabilité si et seulement si ces nombres sont positifs et de somme 1. Or $\sum_{k=1}^6 ck = 21c$. Il faut donc $c = \frac{1}{21}$, qui est bien positif. Ensuite, $P(\{2, 4, 6\}) = \frac{2+4+6}{21} = \frac{12}{21}$ et $P(\{4, 5, 6\}) = \frac{15}{21}$. Ainsi $c = \frac{1}{21}$, $P(\text{pair}) = \frac{4}{7}$ et $P(\geq 4) = \frac{5}{7}$.
2. On décompose $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$. La somme est télescopique :

$$\sum_{k=1}^6 \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{7} = \frac{6}{7}$$
. Il faut donc $a \cdot \frac{6}{7} = 1$, soit $a = \frac{7}{6}$. Alors
 $P(\{1\}) = \frac{7}{6} \cdot \frac{1}{2} = \frac{7}{12}$. De même, $\sum_{k=1}^3 \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$. On trouve $a = \frac{7}{6}$,
 $P(\{1\}) = \frac{7}{12}$ et $P(\{1, 2, 3\}) = \frac{7}{8}$.
3. La somme vaut $b(-2 - 1 + 0 + 1 + 2 + 3) = 3b$. Elle égale 1 seulement si $b = \frac{1}{3}$. Cependant, on aurait alors $P(\{1\}) = -\frac{2}{3} < 0$. **Aucun réel b ne convient.**

Point de méthode : une distribution de probabilités exige deux conditions, la positivité et la somme égale à 1. On oublie souvent la première.

Corrigé de l'exercice 3 : Tirages simultanés et probabilité uniforme

1. On numérote les boules de 1 à 8, les rouges portant les numéros 1 à 5. L'univers Ω est l'ensemble des parties à 3 éléments de $\llbracket 1, 8 \rrbracket$. Ainsi $|\Omega| = \binom{8}{3} = 56$. Comme les boules sont indiscernables au toucher, aucune partie n'est privilégiée. **On munit donc Ω de la probabilité uniforme.**
2. Pour obtenir k rouges, on choisit k rouges parmi 5 et $3 - k$ noires parmi 3. Donc

$$P(X = k) = \frac{\binom{5}{k} \binom{3}{3-k}}{\binom{8}{3}}$$
. On obtient $P(X = 0) = \frac{1}{56}$,
 $P(X = 1) = \frac{5 \times 3}{56} = \frac{15}{56}$, $P(X = 2) = \frac{10 \times 3}{56} = \frac{30}{56}$ et $P(X = 3) = \frac{10}{56}$. **La loi de X est $\left(\frac{1}{56}, \frac{15}{56}, \frac{30}{56}, \frac{10}{56}\right)$, et la somme vaut bien $\frac{1+15+30+10}{56} = 1$.**

3. « Au moins une noire » est le contraire de $\{X = 3\}$. Sa probabilité vaut $1 - \frac{5}{28} = \frac{23}{28}$.

Corrigé de l'exercice 4 : Paradoxe des anniversaires

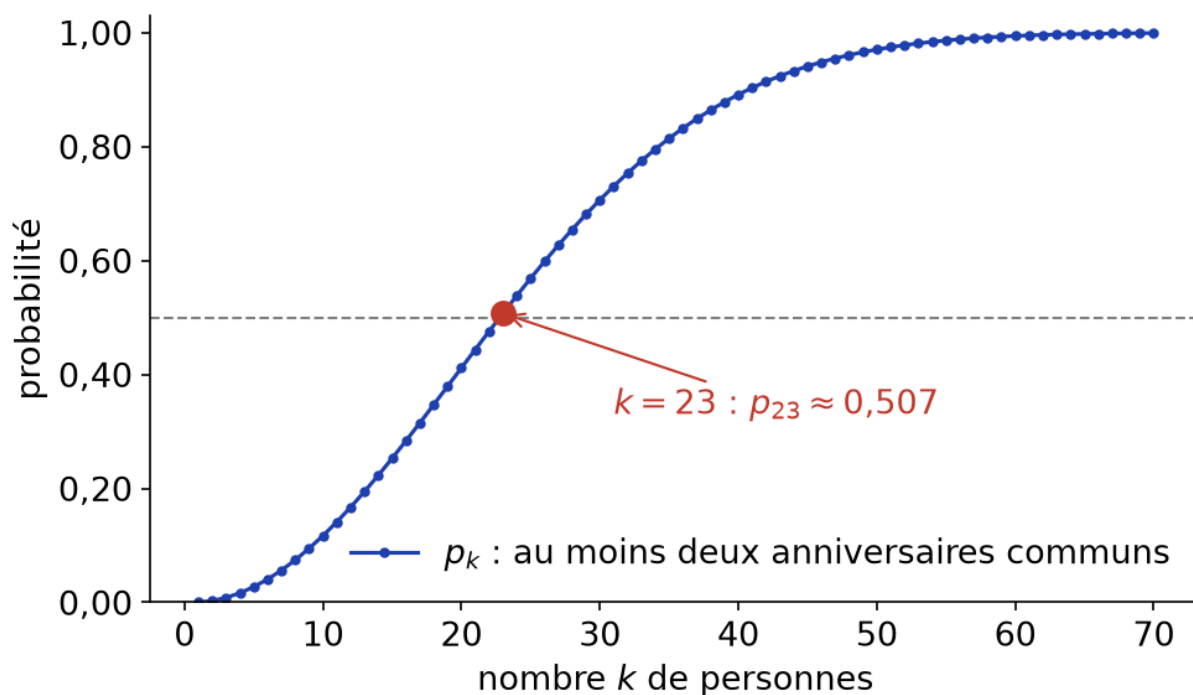
1. L'univers $\Omega = [[1, 365]]^k$ a 365^k éléments, tous équiprobables. Les issues favorables sont les k -uplets d'éléments distincts. On en compte $365 \times 364 \times \dots \times (365 - k + 1)$: il y a 365 choix pour la première date, puis 364 pour la deuxième, et ainsi de suite. **Donc**

$$q_k = \prod_{i=0}^{k-1} \frac{365-i}{365}.$$

2. L'événement « au moins deux anniversaires communs » est le contraire du précédent. **Ainsi**

$$p_k = 1 - q_k.$$

3. On a $q_{k+1} = q_k \cdot \frac{365-k}{365} \leq q_k$, car le dernier facteur est dans $[0, 1]$. Donc (q_k) décroît et (p_k) croît. Comme $p_{22} < \frac{1}{2} < p_{23}$, la croissance montre que $p_k < \frac{1}{2}$ pour $k \leq 22$. **Le plus petit groupe cherché compte 23 personnes.** La courbe ci-dessous montre la croissance rapide de p_k .



4. Pour tout i , on a $0 \leq 1 - \frac{i}{365} \leq e^{-i/365}$. Comme tous les facteurs sont positifs, on peut multiplier ces inégalités. Ainsi

$$q_k \leq \exp\left(-\frac{1}{365} \sum_{i=0}^{k-1} i\right) = \exp\left(-\frac{k(k-1)}{730}\right).$$

Pour $k = 40$, l'exposant vaut $-\frac{1560}{730} \approx -2,137$. Donc $q_{40} \leq e^{-2,137} \approx 0,118$. **On en déduit** $p_{40} \geq 0,88$. Ce résultat surprend : il suffit de 40 personnes pour qu'une coïncidence soit presque certaine.

Corrigé de l'exercice 5 : Somme de deux dés et événements $\{X \in A\}$

- La valeur $S = k$ correspond, dans la grille de l'énoncé, à une diagonale. Pour $2 \leq k \leq 7$, les couples $(a, k-a)$ avec $1 \leq a \leq k-1$ conviennent : il y en a $k-1 = 6 - |k-7|$. Pour $7 \leq k \leq 12$, il faut $k-6 \leq a \leq 6$, soit $13-k = 6 - |k-7|$ couples. **Donc**

$$P(S = k) = \frac{6 - |k-7|}{36} \text{ pour } k \in [[2, 12]].$$
- On a $\{S \in A\} = \bigcup_{k \in A} \{S = k\}$, réunion disjointe. Ainsi $P(S \in \{7, 11\}) = \frac{6+2}{36}$.
 Ensuite, $P(S \in \{2, 3, 4\}) = \frac{1+2+3}{36}$. Enfin, les valeurs premières sont 2, 3, 5, 7, 11, d'où

$$\frac{1+2+4+6+2}{36} = \frac{15}{36}. \text{ Les probabilités valent } \frac{2}{9}, \frac{1}{6} \text{ et } \frac{5}{12}.$$
- La variable D prend ses valeurs dans $[[0, 5]]$. D'abord, $D = 0$ correspond aux 6 doublets. Ensuite, pour $d \geq 1$, les couples $(a, a+d)$ et $(a+d, a)$ avec $1 \leq a \leq 6-d$ conviennent : il y en a $2(6-d)$. **Donc** $P(D = 0) = \frac{6}{36}$ et

$$P(D = d) = \frac{2(6-d)}{36} \text{ pour } 1 \leq d \leq 5, \text{ soit } \frac{6}{36}, \frac{10}{36}, \frac{8}{36}, \frac{6}{36}, \frac{4}{36}, \frac{2}{36}, \text{ de somme } 1.$$
- On a $\{S = 7\} \cap \{D = 1\} = \left\{ \begin{array}{l} X_1 + X_2 = 7, \\ |X_1 - X_2| = 1 \end{array} \right\}$. Le système $a + b = 7$,
 $|a - b| = 1$ donne $(a, b) \in \{(3, 4), (4, 3)\}$. **La probabilité vaut** $\frac{2}{36} = \frac{1}{18}$.

Corrigé de l'exercice 6 : Loi d'une variable $f(X)$

- Y prend les valeurs $0, 1, 4$. D'après la formule de la loi de $f(X)$,
 $P(Y = 1) = P(X = -1) + P(X = 1) = \frac{2}{5}$. De même, $P(Y = 4) = \frac{2}{5}$ et
 $P(Y = 0) = \frac{1}{5}$. **La loi de Y est donnée par $P(Y = 0) = \frac{1}{5}$,
 $P(Y = 1) = P(Y = 4) = \frac{2}{5}$.**
- On a $Z = 1$ si X est pair, c'est-à-dire $X \in \{-2, 0, 2\}$, et $Z = -1$ sinon. Donc
 $P(Z = 1) = \frac{3}{5}$ et $P(Z = -1) = \frac{2}{5}$. Ensuite, $W = 0$ lorsque $X \leq 0$, et
 $W = X$ sinon. **Ainsi $P(W = 0) = \frac{3}{5}$ et $P(W = 1) = P(W = 2) = \frac{1}{5}$.**
- Non : Y n'est pas uniforme sur $\{0, 1, 4\}$, car ses probabilités diffèrent. En effet, l'image d'une loi uniforme par une fonction non injective n'est pas uniforme en général. Ensuite, $-X$ prend les mêmes valeurs que X avec les mêmes probabilités, par symétrie. Donc $X \sim -X$. Pourtant, $X(\omega) \neq -X(\omega)$ dès que $X(\omega) \neq 0$, ce qui arrive avec la probabilité $\frac{4}{5}$. **Deux variables de même loi ne sont donc pas égales en général.**

Corrigé de l'exercice 7 : Probabilités conditionnelles : deux enfants

- Soit U l'événement « au moins une fille » : $U = \{FF, FG, GF\}$, donc $P(U) = \frac{3}{4}$. De plus, $\{FF\} \subset U$. Par définition, $P_U(\{FF\}) = \frac{P(\{FF\})}{P(U)} = \frac{1/4}{3/4}$. **La probabilité cherchée vaut $\frac{1}{3}$.**
- Soit V « l'aîné est une fille » : $V = \{FF, FG\}$, de probabilité $\frac{1}{2}$. Ainsi
 $P_V(\{FF\}) = \frac{1/4}{1/2}$. **La probabilité cherchée vaut $\frac{1}{2}$.**
- Les deux informations ne réduisent pas l'univers de la même façon. En effet, U contient trois issues équiprobables, alors que V n'en contient que deux. Savoir que l'aîné est une fille ne dit rien sur le cadet. En revanche, « au moins une fille » laisse ouvertes les configurations FG et GF . **Le conditionnement dépend de l'événement exact observé, pas de son énoncé approximatif.**

Corrigé de l'exercice 8 : Tirages sans remise et probabilités composées

1. L'urne contient seulement 3 blanches. Après au plus trois blanches, la boule suivante est donc noire. **Ainsi T prend ses valeurs dans $\{1, 2, 3, 4\}$.**
2. On a $\{T = k\} = \overline{N_1} \cap \dots \cap \overline{N_{k-1}} \cap N_k$. La formule des probabilités composées s'applique, car les conditionnements portent sur des événements de probabilité non nulle. Avant chaque tirage, on connaît la composition de l'urne :

$$\begin{aligned} P(T = 1) &= \frac{2}{5}, & P(T = 2) &= \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{3}{10}, \\ P(T = 3) &= \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{5}, & P(T = 4) &= \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{1}{10}. \end{aligned}$$

La loi de T est $\left(\frac{2}{5}, \frac{3}{10}, \frac{1}{5}, \frac{1}{10}\right)$, et la somme vaut $\frac{4+3+2+1}{10} = 1$.

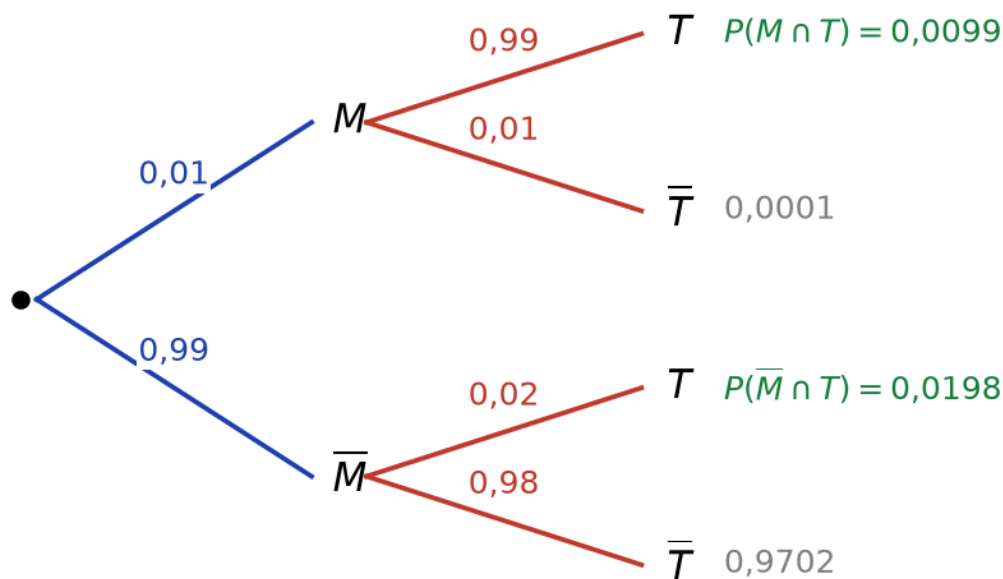
3. Le couple $(N_1, \overline{N_1})$ est un système complet. D'après la formule des probabilités totales,

$$P(N_2) = P(N_1)P_{N_1}(N_2) + P(\overline{N_1})P_{\overline{N_1}}(N_2) = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} + \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{1}{10} + \frac{3}{10}.$$

Donc $P(N_2) = \frac{2}{5} = P(N_1)$. Ce n'est pas un hasard : par symétrie, chaque boule a la même chance d'occuper le rang 2 que le rang 1.

Corrigé de l'exercice 9 : Test de dépistage et formule de Bayes

1. Les données se traduisent ainsi : $P(M) = 0,01$, $P_M(T) = 0,99$ et $P_{\overline{M}}(T) = 0,02$.
Le système complet $(M, \overline{M})$ et la formule des probabilités totales donnent
 $P(T) = 0,01 \times 0,99 + 0,99 \times 0,02 = 0,0099 + 0,0198$. **Donc $P(T) = 0,0297$.**
L'arbre ci-dessous résume ce calcul.



2. La formule de Bayes donne $P_T(M) = \frac{P(M \cap T)}{P(T)} = \frac{0,0099}{0,0297}$. **On obtient** $P_T(M) = \frac{1}{3}$.

Ainsi, deux personnes positives sur trois sont saines. En effet, la maladie est rare : les faux positifs, pris sur 99 % de la population, sont deux fois plus nombreux que les vrais positifs.

3. On a $P(\bar{T}) = 1 - 0,0297 = 0,9703$ et $P(M \cap \bar{T}) = 0,01 \times 0,01 = 0,0001$. **Donc**
 $P_{\bar{T}}(M) = \frac{0,0001}{0,9703} \approx 1,03 \times 10^{-4}$. Un test négatif est donc très rassurant.

4. Notons T_1 et T_2 les deux résultats positifs. Par l'indépendance conditionnelle supposée,
 $P_M(T_1 \cap T_2) = 0,99^2 = 0,9801$ et $P_{\bar{M}}(T_1 \cap T_2) = 0,02^2 = 0,0004$. La formule de Bayes donne alors

$$P_{T_1 \cap T_2}(M) = \frac{0,01 \times 0,9801}{0,01 \times 0,9801 + 0,99 \times 0,0004} = \frac{0,009801}{0,010197} = \frac{99}{103}.$$

La probabilité d'être malade vaut $\frac{99}{103} \approx 0,961$. Le second test confirme donc fortement le diagnostic.

Point de méthode : dans un problème de dépistage, on écrit toujours les données sous la forme $P_M(T)$ et $P_{\bar{M}}(T)$. La quantité utile, $P_T(M)$, s'obtient ensuite par Bayes.

Corrigé de l'exercice 10 : Trois urnes et probabilités des causes

- Notons U_k l'événement « l'urne U_k est choisie ». Ces trois événements forment un système complet, avec $P(U_k) = \frac{1}{3}$ et $P_{U_k}(B_1) = \frac{k}{4}$. La formule des probabilités totales donne $P(B_1) = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{4} + \frac{2}{4} + \frac{3}{4} \right)$. **Donc** $P(B_1) = \frac{1}{2}$.
- Par la formule de Bayes, $P_{B_1}(U_k) = \frac{P(U_k)P_{U_k}(B_1)}{P(B_1)} = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{k}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{k}{6}$. **On obtient**
 $P_{B_1}(U_1) = \frac{1}{6}$, $P_{B_1}(U_2) = \frac{1}{3}$ **et** $P_{B_1}(U_3) = \frac{1}{2}$.
- Sachant U_k , les deux tirages avec remise sont indépendants, d'où $P_{U_k}(B_1 \cap B_2) = \frac{k^2}{16}$.
Par la formule des probabilités totales, $P(B_1 \cap B_2) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1+4+9}{16} = \frac{14}{48}$. **Donc**
 $P(B_1 \cap B_2) = \frac{7}{24}$ **et** $P_{B_1}(B_2) = \frac{7/24}{1/2} = \frac{7}{12}$.
- Le même calcul qu'au 1 donne $P(B_2) = \frac{1}{2}$. Or $P(B_1)P(B_2) = \frac{1}{4} = \frac{6}{24} \neq \frac{7}{24}$. **Les événements B_1 et B_2 ne sont pas indépendants.** En effet, une première boule blanche rend plus probable l'urne U_3 , riche en blanches : elle augmente donc les chances d'une seconde blanche.

Corrigé de l'exercice 11 : Rang du premier pile

- Chaque X_i vaut 1 avec la probabilité p et 0 sinon. **Donc** $X_i \sim \mathcal{B}(p)$. L'indépendance des lancers signifie que $X_1, \dots, X_n$ sont mutuellement indépendantes.
- Le premier pile est au rang k si les $k-1$ premiers lancers donnent face et le k -ième donne pile. **Ainsi** $\{T = k\} = \{X_1 = 0\} \cap \dots \cap \{X_{k-1} = 0\} \cap \{X_k = 1\}$ **et**
 $\{T = 0\} = \bigcap_{i=1}^n \{X_i = 0\}$.
- Par indépendance mutuelle, les probabilités des intersections sont des produits. **Donc**
 $P(T = k) = (1-p)^{k-1}p$ **pour** $1 \leq k \leq n$, **et** $P(T = 0) = (1-p)^n$. Par la somme géométrique, $\sum_{k=1}^n (1-p)^{k-1}p = p \cdot \frac{1 - (1-p)^n}{1 - (1-p)} = 1 - (1-p)^n$. En ajoutant $(1-p)^n$,

on trouve bien 1.

4. L'événement voulu est $\bigcap_{i=1}^k \{X_i = 0\}$, et l'indépendance donne encore un produit. Sa probabilité vaut $(1-p)^k$, avec la convention d'une intersection vide égale à 1 pour $k = 0$.

Point de méthode : on n'a jamais décrit Ω . Les variables X_i et leur indépendance suffisent à tout calculer, ce qui est l'intérêt de la modélisation par variables aléatoires.

Corrigé de l'exercice 12 : Nombre de bonnes réponses à un QCM

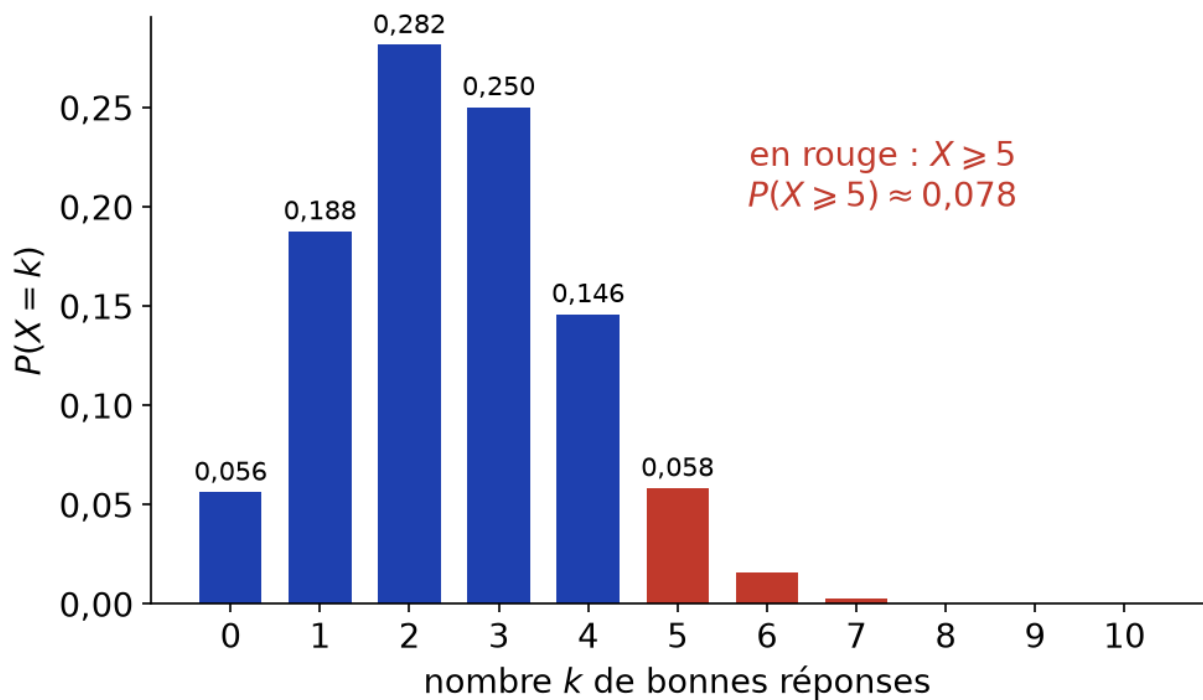
1. Pour $i \in \llbracket 1, 10 \rrbracket$, soit X_i l'indicatrice de l'événement « la réponse i est juste ». Le candidat répond au hasard, donc $X_i \sim \mathcal{B}\left(\frac{1}{4}\right)$. De plus, les questions sont indépendantes, donc les X_i sont mutuellement indépendantes. Or $X = X_1 + \dots + X_{10}$. D'après le théorème du cours, X suit la loi binomiale $\mathcal{B}\left(10, \frac{1}{4}\right)$.

2. D'abord, $P(X = 0) = \left(\frac{3}{4}\right)^{10} = \frac{59049}{1048576} \approx 0,056$. Ensuite,
 $P(X = 1) = 10 \cdot \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^9 = \frac{10 \times 3^9}{4^{10}}$. Par passage au contraire,

$$P(X \geq 2) = 1 - \frac{3^{10} + 10 \times 3^9}{4^{10}} = 1 - \frac{13 \times 3^9}{4^{10}} = 1 - \frac{255879}{1048576}.$$

Donc $P(X = 0) \approx 0,056$ et $P(X \geq 2) = \frac{792697}{1048576} \approx 0,756$.

3. La probabilité d'obtenir au moins 5 bonnes réponses vaut environ 0,078, comme le montre l'histogramme ci-dessous. **Le hasard donne donc la moyenne moins d'une fois sur douze.** Les valeurs les plus probables sont 2 et 3.



Corrigé de l'exercice 13 : Mode d'une loi binomiale

- Notons $q = 1 - p$. Comme p et q sont non nuls, tous les b_k sont strictement positifs. De plus, $\binom{n}{k+1} = \binom{n}{k} \frac{n-k}{k+1}$. Donc $\frac{b_{k+1}}{b_k} = \frac{(n-k)p}{(k+1)q}$.
- Comme $(k+1)q > 0$, on a $b_{k+1} \geq b_k$ si et seulement si $(n-k)p \geq (k+1)(1-p)$. En développant, cela s'écrit $np - kp \geq k+1 - kp - p$, soit $np + p \geq k+1$. Ainsi $b_{k+1} \geq b_k \Leftrightarrow k+1 \leq (n+1)p$, avec égalité $b_{k+1} = b_k$ si et seulement si $k+1 = (n+1)p$.
- Posons $m = \lfloor (n+1)p \rfloor$. Comme $0 < (n+1)p < n+1$, on a $0 \leq m \leq n$. D'après le 2, la suite (b_k) croît pour $k \leq m$, puis décroît strictement pour $k \geq m$. Si $(n+1)p$ n'est pas entier, toutes les inégalités sont strictes. **Le mode est alors unique et vaut $\lfloor (n+1)p \rfloor$.** Si $(n+1)p = m$ est entier, alors $m \geq 1$ et $b_{m-1} = b_m$. **Dans ce cas, il y a deux modes : $m-1$ et m .**
- Pour $n = 10$, $(n+1)p = 2,75$: **le mode vaut 2**, ce que confirme l'histogramme de l'exercice 12. Pour $n = 11$, $(n+1)p = 3$ est entier. **Les modes sont 2 et 3**. En effet, $\binom{11}{2} 3^9 = 55 \times 3^9$ et $\binom{11}{3} 3^8 = 165 \times 3^8 = 55 \times 3^9$.

Corrigé de l'exercice 14 : Loi conjointe donnée par un tableau

1. Tous les nombres sont positifs. Leur somme vaut $\frac{1+3+2+2+3+1}{12} = 1$. **Le tableau définit donc bien une loi de probabilité sur $\{0, 1, 2\} \times \{0, 1\}$.**
2. On somme les colonnes : $P(X=0) = \frac{1}{12} + \frac{2}{12}$, $P(X=1) = \frac{3}{12} + \frac{3}{12}$ et $P(X=2) = \frac{2}{12} + \frac{1}{12}$. Ensuite, on somme les lignes : $P(Y=0) = \frac{1+3+2}{12}$. **Ainsi X a pour loi $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$ et $Y \sim \mathcal{B}\left(\frac{1}{2}\right)$.**
3. On a $P(X=0, Y=0) = \frac{1}{12}$. Or $P(X=0)P(Y=0) = \frac{1}{8}$. **Les variables X et Y ne sont donc pas indépendantes.**
4. On regroupe les cases selon la valeur de $x+y$. D'abord, $P(X+Y=0) = \frac{1}{12}$. Ensuite, $P(X+Y=1) = P(1,0) + P(0,1) = \frac{3}{12} + \frac{2}{12}$. De même, $P(X+Y=2) = P(2,0) + P(1,1) = \frac{5}{12}$ et $P(X+Y=3) = \frac{1}{12}$. **La loi de $X+Y$ est $\left(\frac{1}{12}, \frac{5}{12}, \frac{5}{12}, \frac{1}{12}\right)$ sur $\{0, 1, 2, 3\}$. Enfin, $P(X=Y) = P(0,0) + P(1,1) = \frac{1}{12} + \frac{3}{12}$, soit $\frac{1}{3}$.**
5. On divise la ligne $y=1$ par $P(Y=1) = \frac{1}{2}$. **La loi conditionnelle de X sachant $\{Y=1\}$ est $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{6}\right)$. Elle diffère de la loi de X , ce qui confirme la dépendance.**

Corrigé de l'exercice 15 : Minimum et maximum de deux dés

1. On a $\{V \leq k\} = \{X_1 \leq k\} \cap \{X_2 \leq k\}$. Par indépendance, $P(V \leq k) = \left(\frac{k}{n}\right)^2$. Ensuite, $P(V = k) = P(V \leq k) - P(V \leq k-1)$, car $\{V \leq k-1\} \subset \{V \leq k\}$. **Donc $P(V = k) = \frac{k^2 - (k-1)^2}{n^2} = \frac{2k-1}{n^2}$.**
2. De même, $\{U \geq k\} = \{X_1 \geq k\} \cap \{X_2 \geq k\}$, d'où $P(U \geq k) = \left(\frac{n-k+1}{n}\right)^2$. Ensuite, $P(U = k) = P(U \geq k) - P(U \geq k+1)$. **Ainsi $P(U = k) = \frac{(n-k+1)^2 - (n-k)^2}{n^2} = \frac{2(n-k)+1}{n^2}$.**

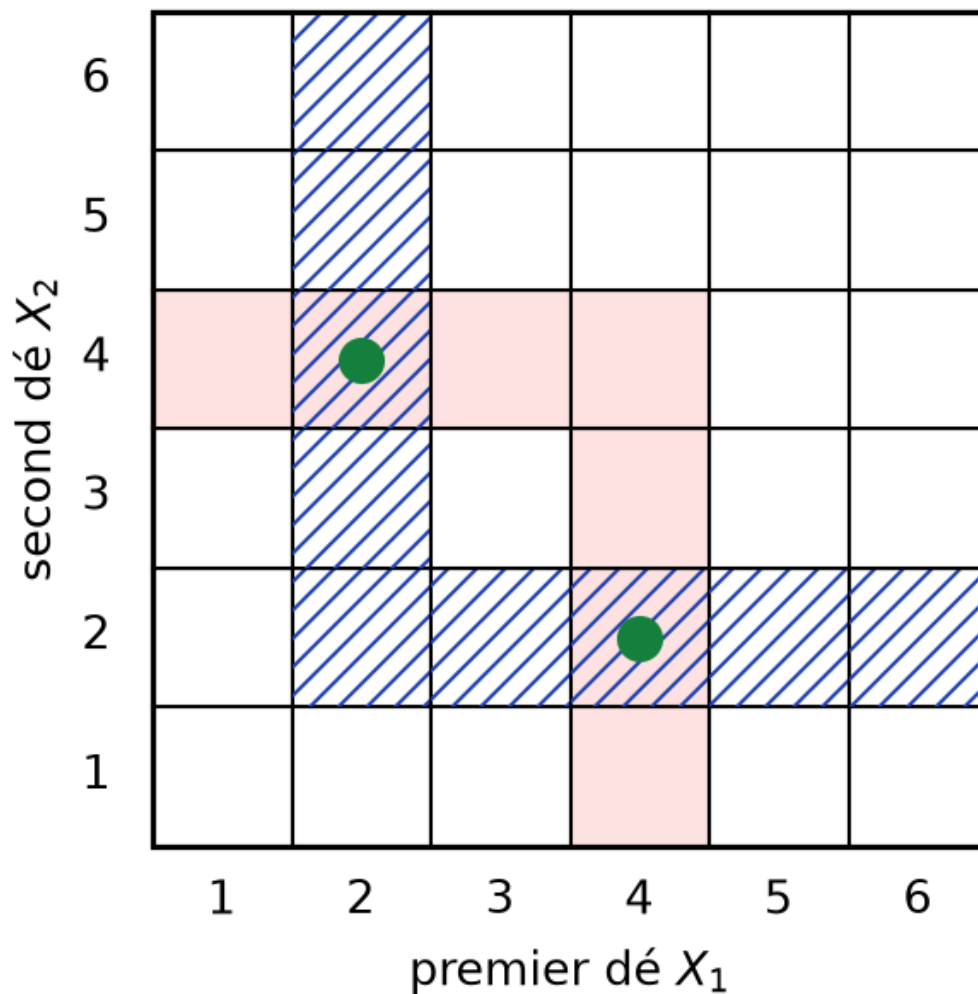
3. Soient $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Si $i > j$, l'événement $\{U = i, V = j\}$ est vide. Si $i = j$, il se réduit à $\{X_1 = X_2 = i\}$. Si $i < j$, il vaut $\{(X_1, X_2) = (i, j)\} \cup \{(X_1, X_2) = (j, i)\}$. **Donc** $P(U = i, V = j)$ **vaut** $\frac{2}{n^2}$ **si** $i < j$, $\frac{1}{n^2}$ **si** $i = j$, **et** 0 **si** $i > j$. On retrouve la loi marginale de V :

$$P(V = j) = \sum_{i=1}^j P(U = i, V = j) = \frac{2(j-1)+1}{n^2} = \frac{2j-1}{n^2}.$$

4. Comme $n \geq 2$, on a $P(U = n, V = 1) = 0$. Pourtant, $P(U = n) = \frac{1}{n^2}$ et $P(V = 1) = \frac{1}{n^2}$ sont non nuls. **Les variables U et V ne sont pas indépendantes.**
5. Pour $n = 6$, la figure ci-dessous représente les cases concernées. On lit $P(V = 4) = \frac{7}{36}$, $P(U = 2) = \frac{9}{36}$ et $P(U = 2, V = 4) = \frac{2}{36}$. **Ainsi** $P(V = 4) = \frac{7}{36}$, $P(U = 2) = \frac{1}{4}$ **et** $P(U = 2, V = 4) = \frac{1}{18}$, qui diffère bien de $\frac{7}{36} \cdot \frac{1}{4} = \frac{7}{144}$.

rose : $\{V = 4\}$ (7 cases) hachures : $\{U = 2\}$ (9 cases)

points verts : $\{U = 2, V = 4\}$ (2 cases)



Corrigé de l'exercice 16 : Indépendance deux à deux sans indépendance mutuelle

1. L'univers $\{P, F\}^2$ est muni de la probabilité uniforme. On a $A = \{PP, PF\}$, $B = \{PP, FP\}$, $C = \{PP, FF\}$, tous de probabilité $\frac{1}{2}$. Ensuite, $A \cap B = A \cap C = B \cap C = \{PP\}$, de probabilité $\frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$. Les événements sont donc deux à deux indépendants. Cependant, $A \cap B \cap C = \{PP\}$, de probabilité $\frac{1}{4} \neq \frac{1}{8}$. Ils ne sont donc pas mutuellement indépendants.

2. Chaque événement a 4 éléments, donc une probabilité $\frac{1}{2}$. De plus, $E \cap F \cap G = \{1\}$, de probabilité $\frac{1}{8} = \left(\frac{1}{2}\right)^3$. En revanche, $E \cap F = \{1, 2, 3\}$, de probabilité $\frac{3}{8} \neq \frac{1}{4}$. **Les événements ne sont pas mutuellement indépendants** : la formule produit doit être vérifiée pour toute sous-famille.
3. On a $A = (A \cap B) \cup (A \cap \bar{B})$, réunion disjointe. Donc
 $P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A)P(B) = P(A)(1 - P(B))$. Ainsi
 $P(A \cap \bar{B}) = P(A)P(\bar{B})$: **A et $\bar{B}$ sont indépendants.**
4. A est indépendant de lui-même si et seulement si $P(A \cap A) = P(A)^2$, c'est-à-dire $P(A)(1 - P(A)) = 0$. **Cela équivaut à $P(A) \in \{0, 1\}$.**

Corrigé de l'exercice 17 : Fiabilité d'un système de composants

1. Le courant traverse C_1 , puis l'une au moins des deux branches parallèles. **Donc**
 $S = F_1 \cap (F_2 \cup F_3)$.
2. Posons $Y_i = 1_{F_i}$. Ces variables sont mutuellement indépendantes, car les F_i le sont. Or $1_{F_2 \cup F_3} = \max(Y_2, Y_3)$ est une fonction de (Y_2, Y_3) . D'après le lemme des coalitions, Y_1 et $\max(Y_2, Y_3)$ sont indépendantes. Par conséquent, F_1 et $F_2 \cup F_3$ sont indépendants. Ensuite,
 $P(F_2 \cup F_3) = 1 - P(\bar{F}_2)P(\bar{F}_3) = 1 - (1 - p)^2 = 2p - p^2$. **Donc**
 $P(S) = p(2p - p^2) = p^2(2 - p)$.
3. **Pour $p = 0,9$, on trouve $P(S) = 0,81 \times 1,1 = 0,891$.**
4. Si C_1 est en panne, le système l'est aussi : $\bar{F}_1 \subset \bar{S}$. Donc
 $P(\bar{F}_1 \cap \bar{S}) = P(\bar{F}_1) = 0,1$. Par ailleurs, $P(\bar{S}) = 1 - 0,891 = 0,109$. **Ainsi**
 $P_{\bar{S}}(\bar{F}_1) = \frac{0,1}{0,109} = \frac{100}{109} \approx 0,917$. Le composant C_1 , sans secours, est donc le point faible du montage.

Corrigé de l'exercice 18 : Coalitions de variables de Bernoulli

1. S est une somme de deux variables de Bernoulli indépendantes de paramètre p . **Donc**
 $S \sim \mathcal{B}(2, p)$: $P(S = 0) = (1-p)^2$, $P(S = 1) = 2p(1-p)$, $P(S = 2) = p^2$.
 Ensuite, Q vaut 0 ou 1, et $P(Q = 1) = P(X_3 = 1, X_4 = 1) = p^2$ par indépendance. **Ainsi** $Q \sim \mathcal{B}(p^2)$.
2. S est une fonction de (X_1, X_2) et Q une fonction de (X_3, X_4) . Ces paquets sont disjoints. **D'après le lemme des coalitions, S et Q sont indépendantes.**
3. Comme $Q \in \{0, 1\}$, on a $\{S = Q\} = \{S = 0, Q = 0\} \cup \{S = 1, Q = 1\}$, réunion disjointe. Par indépendance :

$$P(S = Q) = (1-p)^2(1-p^2) + 2p(1-p)p^2.$$

Pour $p = \frac{1}{2}$, **on obtient** $\frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} + 2 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{5}{16}$.

4. Non : les deux variables font intervenir X_1 , et le lemme ne s'applique pas. D'ailleurs,
 $\{X_1 X_3 = 1\} \subset \{X_1 = 1\} \subset \{S \geq 1\}$. Donc $P(S = 0, X_1 X_3 = 1) = 0$, alors que
 $P(S = 0)P(X_1 X_3 = 1) = (1-p)^2 p^2 > 0$. **Les variables S et $X_1 X_3$ ne sont pas indépendantes.**

Corrigé de l'exercice 19 : Somme de deux lois binomiales indépendantes

1. On développe $(1+x)^{n+m} = (1+x)^n (1+x)^m$ par la formule du binôme. Le coefficient de x^s vaut $\binom{n+m}{s}$ à gauche. À droite, il vaut $\sum_{k=0}^s \binom{n}{k} \binom{m}{s-k}$, avec la convention indiquée. **Deux polynômes égaux ont les mêmes coefficients, d'où la formule de Vandermonde.**
2. Soit $s \in \llbracket 0, n+m \rrbracket$. La famille $(\{X = k\})_{0 \leq k \leq n}$ est un système complet, et $\{X + Y = s\} \cap \{X = k\} = \{X = k, Y = s - k\}$. Par indépendance, avec $q = 1 - p$:

$$P(X + Y = s) = \sum_{k=0}^s \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \binom{m}{s-k} p^{s-k} q^{m-s+k} = p^s q^{n+m-s} \sum_{k=0}^s \binom{n}{k} \binom{m}{s-k}.$$

Les termes où $k > n$ ou $s - k > m$ sont nuls par convention. **Par Vandermonde,**

$$P(X + Y = s) = \sum_{k=0}^{n+m-s} \binom{n+m}{s-k} p^s q^{n+m-s-k} : X + Y \sim \mathcal{B}(n + m, p).$$

3. Soient $Z_1, \dots, Z_{n+m}$ indépendantes de loi $\mathcal{B}(p)$. Posons $X' = Z_1 + \dots + Z_n$ et $Y' = Z_{n+1} + \dots + Z_{n+m}$. Alors $X' \sim \mathcal{B}(n, p)$ et $Y' \sim \mathcal{B}(m, p)$, et elles sont indépendantes par le lemme des coalitions. Le couple (X', Y') a donc la même loi que (X, Y) , car la loi conjointe est le produit des marginales. Par conséquent, $X + Y$ a même loi que $X' + Y' = Z_1 + \dots + Z_{n+m}$. **On retrouve** $X + Y \sim \mathcal{B}(n + m, p)$.

4. Pour k compatible ($0 \leq k \leq n$, $0 \leq s - k \leq m$), on a

$$P(X = k | X + Y = s) = \frac{\binom{n}{k} p^k q^{n-k} \sum_{j=0}^{m-s+k} \binom{m}{s-k-j} p^{s-k-j} q^{m-s+k-j}}{\sum_{k=0}^{n+m-s} \binom{n+m}{s-k} p^s q^{n+m-s-k}} = \frac{\binom{n}{k} \sum_{j=0}^{m-s+k} \binom{m}{s-k-j} p^{s-k-j} q^{m-s+k-j}}{\sum_{j=0}^{m-s+k} \binom{m}{s-k-j} p^{s-k-j} q^{m-s+k-j}}.$$

Cette loi conditionnelle ne dépend pas de p . C'est la loi du nombre de boules blanches dans un tirage simultané de s boules parmi n blanches et m noires (loi dite hypergéométrique, hors programme).

Corrigé de l'exercice 20 : Variable indépendante d'une fonction d'elle-même

1. On a $P(X = 0, X^2 = 1) = 0$, car $X = 0$ impose $X^2 = 0$. Or $P(X = 0)P(X^2 = 1) = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \neq 0$. **Les variables X et X^2 ne sont pas indépendantes.**
2. Ici $X^2 = 1$ sur tout Ω . Pour $x \in \{-1, 1\}$, $P(X = x, X^2 = 1) = P(X = x) = P(X = x)P(X^2 = 1)$. **Les variables X et X^2 sont donc indépendantes.**
3. Soit $y \in Y(\Omega)$. Pour tout x tel que $f(x) = y$, on a $\{X = x\} \subset \{Y = y\}$, donc $P(X = x, Y = y) = P(X = x)$. D'après la formule de la loi de $f(X)$ puis l'indépendance :

$$P(Y = y) = \sum_{\substack{x: \\ f(x) = y}} P(X = x, Y = y) = \sum_{\substack{x: \\ f(x) = y}} P(X = x)P(Y = y) = P(Y = y)^2.$$

Ainsi $P(Y = y) \in \{0, 1\}$. Or ces probabilités ont pour somme 1 sur l'ensemble fini $Y(\Omega)$. **Exactement une valeur c vérifie donc $P(Y = c) = 1$.**

4. Soit Z une variable aléatoire, $z \in Z(\Omega)$ et $y \in Y(\Omega)$. Si $y \neq c$, alors

$P(Z = z, Y = y) \leq P(Y = y) = 0 = P(Z = z)P(Y = y)$. Si $y = c$, alors $P(Z = z, Y \neq c) = 0$, donc $P(Z = z, Y = c) = P(Z = z) = P(Z = z)P(Y = c)$. **Une variable presque sûrement constante est indépendante de toute variable.**

Corrigé de l'exercice 21 : Pièce truquée et indépendance conditionnelle

1. On a $P(E) = P(R) = \frac{1}{2}$. Sachant E , les lancers sont indépendants, donc $P_E(A_n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n$. Sachant R , la pièce donne toujours pile : $P_R(A_n) = 1$. D'après la formule des probabilités totales, $P(A_n) = \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2} = \frac{2^n + 1}{2^{n+1}}$.

2. Par la formule de Bayes, $P_{A_n}(R) = \frac{P(R)P_R(A_n)}{P(A_n)} = \frac{1/2}{(2^n + 1)/2^{n+1}}$. **Donc**
 $P_{A_n}(R) = \frac{2^n}{2^n + 1}$. Pour $n = 3$, cela vaut $\frac{8}{9}$. **La limite vaut 1** : une longue série de piles désigne presque sûrement la pièce truquée.

3. L'événement « pile au lancer $n + 1$ » intersecté avec A_n vaut A_{n+1} . Ainsi

$$P_{A_n}(A_{n+1}) = \frac{P(A_{n+1})}{P(A_n)} = \frac{2^{n+1} + 1}{2^{n+2}} \cdot \frac{2^{n+1}}{2^n + 1} = \frac{2^{n+1} + 1}{2^{n+1} + 2}.$$

Cette probabilité tend vers 1 quand $n \rightarrow +\infty$. Pour $n = 0$, on retrouve bien $P(A_1) = \frac{3}{4}$.

4. On a $P(P_1) = P(A_1) = \frac{3}{4}$ et, par symétrie du calcul, $P(P_2) = \frac{3}{4}$. En revanche, $P(P_1 \cap P_2) = P(A_2) = \frac{5}{8} = \frac{10}{16}$. Or $P(P_1)P(P_2) = \frac{9}{16}$. **Les événements P_1 et P_2 ne sont pas indépendants.** Ils le sont sachant E et sachant R , mais pas pour P .
 En effet, le premier lancer renseigne sur la pièce, donc sur le second : l'indépendance conditionnelle n'entraîne pas l'indépendance.

Corrigé de l'exercice 22 : Transmission d'un bit à travers des relais

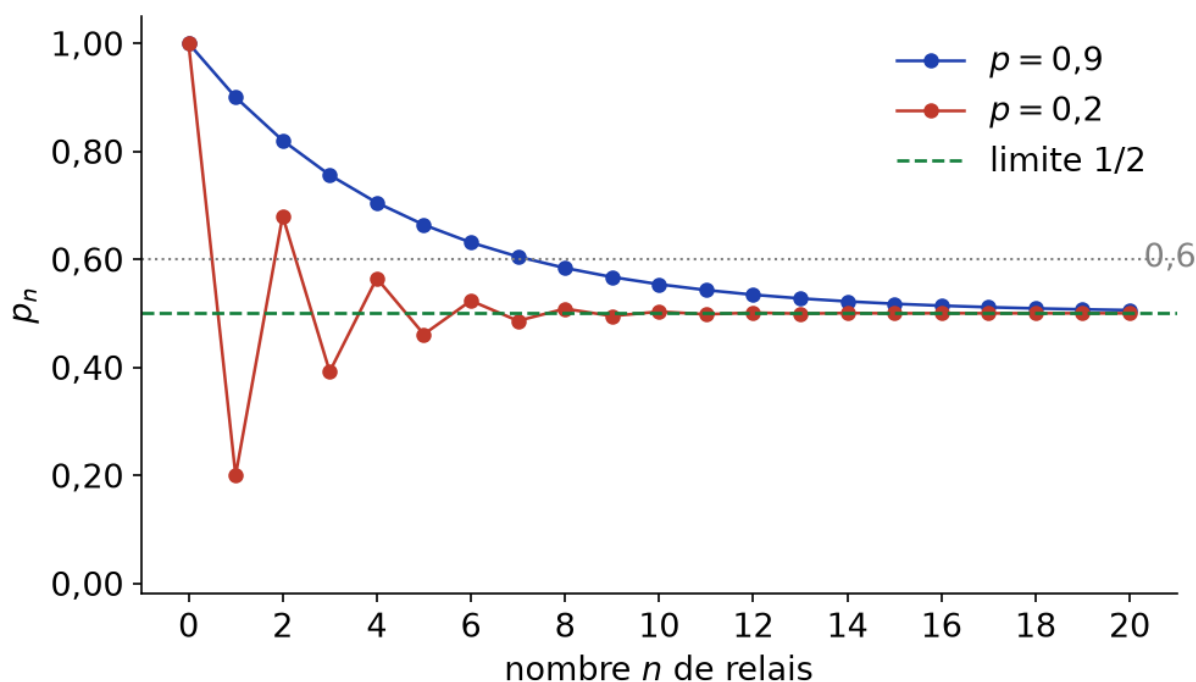
- Notons C_n « le bit est correct après n relais ». Le couple $(C_n, \overline{C_n})$ est un système complet. Le relais $n+1$ agit indépendamment des précédents. Donc $P_{C_n}(C_{n+1}) = p$ et $P_{\overline{C_n}}(C_{n+1}) = 1 - p$: un bit faux redevient juste s'il est inversé. D'après la formule des probabilités totales, $p_{n+1} = p p_n + (1 - p)(1 - p_n)$. **Ainsi**
 $p_{n+1} = (2p - 1)p_n + 1 - p$. Si p_n vaut 0 ou 1, la formule reste vraie par un calcul direct.
- C'est une suite arithmético-géométrique. Son point fixe ℓ vérifie $\ell = (2p - 1)\ell + 1 - p$, soit $2(1 - p)\ell = 1 - p$, donc $\ell = \frac{1}{2}$. Ensuite, $p_{n+1} - \frac{1}{2} = (2p - 1)(p_n - \frac{1}{2})$. **Donc**
 $p_n = \frac{1}{2} + \frac{(2p - 1)^n}{2}$. Comme $|2p - 1| < 1$, **la suite (p_n) converge vers $\frac{1}{2}$** . Le bit reçu devient donc aussi imprévisible qu'un lancer de pièce.
- Soit N le nombre de relais fautifs. Les erreurs sont des épreuves de Bernoulli indépendantes de paramètre $1 - p$, donc $N \sim \mathcal{B}(n, 1 - p)$. Le bit final est juste si et seulement si N est pair, car deux inversions se compensent. Ainsi

$$p_n = \sum_{k \text{ pair}} \binom{n}{k} (1 - p)^k p^{n-k} = \frac{(p + (1 - p))^n + (p - (1 - p))^n}{2}.$$

En effet, la demi-somme des deux développements binomiaux élimine les termes d'indice impair.

On retrouve $p_n = \frac{1 + (2p - 1)^n}{2}$.

- Pour $p = 0,9$, on a $2p - 1 = 0,8$. Donc $p_{10} = \frac{1 + 0,8^{10}}{2} \approx \frac{1 + 0,1074}{2}$, **soit**
 $p_{10} \approx 0,554$. Ensuite, $p_n < 0,6$ équivaut à $0,8^n < 0,2$. Or $0,8^7 \approx 0,210$ et $0,8^8 \approx 0,168$, et la suite $(0,8^n)$ décroît. **Le plus petit entier cherché est $n = 8$** . La figure ci-dessous compare ce cas à celui où $p = 0,2$, pour lequel $2p - 1 < 0$ et la suite oscille.



Corrigé de l'exercice 23 : Problème : indépendance et fonction indicatrice d'Euler

- Les multiples de d dans $[[1, n]]$ sont $d, 2d, \dots, \frac{n}{d} \cdot d$, car d divise n . Il y en a $\frac{n}{d}$. Par la probabilité uniforme, $P(A_d) = \frac{n/d}{n} = \frac{1}{d}$.
- Les p_i sont des nombres premiers distincts, donc deux à deux premiers entre eux. D'après le lemme de Gauss, un entier divisible par chacun des p_i est divisible par leur produit. La réciproque est immédiate. D'où $A_{p_1} \cap \dots \cap A_{p_r} = A_{p_1 \dots p_r}$. Soit maintenant $I \subset [[1, r]]$ non vide. Le même argument donne $\bigcap_{i \in I} A_{p_i} = A_{d_I}$, avec $d_I = \prod_{i \in I} p_i$, qui divise n .
Par le 1,

$$P\left(\bigcap_{i \in I} A_{p_i}\right) = \frac{1}{d_I} = \prod_{i \in I} \frac{1}{p_i} = \prod_{i \in I} P(A_{p_i}).$$

Les événements $A_{p_1}, \dots, A_{p_r}$ sont donc mutuellement indépendants.

- Pour $n = 8$, on a $A_4 \subset A_2$, donc $P(A_2 \cap A_4) = P(A_4) = \frac{1}{4}$. Or $P(A_2)P(A_4) = \frac{1}{8}$. **Les événements A_2 et A_4 ne sont pas indépendants.** En effet,

2 et 4 ne sont pas premiers entre eux : savoir que 4 divise K garantit que 2 le divise.

4. Un entier K est premier avec n si et seulement si aucun diviseur premier de n ne divise K . Cet événement vaut donc $\overline{Ap_1} \cap \dots \cap \overline{Ap_r}$. D'après la propriété du cours, les contraires d'événements mutuellement indépendants sont mutuellement indépendants. Par conséquent,

$$\frac{\varphi(n)}{n} = P\left(\bigcap_{i=1}^r \overline{Ap_i}\right) = \prod_{i=1}^r \left(1 - \frac{1}{p_i}\right).$$

En multipliant par n , on obtient $\varphi(n) = n \prod_{i=1}^r \left(1 - \frac{1}{p_i}\right)$.

5. On a $360 = 2^3 \times 3^2 \times 5$. Donc $\varphi(360) = 360 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} = 96$. Ensuite, $1001 = 7 \times 11 \times 13$, d'où $\varphi(1001) = 6 \times 10 \times 12$. **Ainsi** $\varphi(360) = 96$ **et** $\varphi(1001) = 720$.

Point de méthode : pour prouver l'indépendance mutuelle, on vérifie la formule produit pour **toute** sous-famille, pas seulement pour la famille entière.

[Revenir aux énoncés des exercices](#)

Pour aller plus loin en maths sup

- Le cours : [probabilités sur un univers fini, cours de maths sup](#)
- Les énoncés : [exercices de maths sup sur probabilités sur un univers fini](#)
- À maîtriser avant : [Dénombrement](#)
- Chapitre précédent : [Dénombrement](#)
- Chapitre suivant : [Espérance, variance et inégalités probabilistes](#)
- Le même thème en L1 : [probabilités finies, exercices de maths en L1](#)

- Tester vos connaissances : [QCM de maths sup par chapitre](#)
- Le sommaire : [tous les chapitres de maths sup](#) et les [chapitres de maths spé](#)