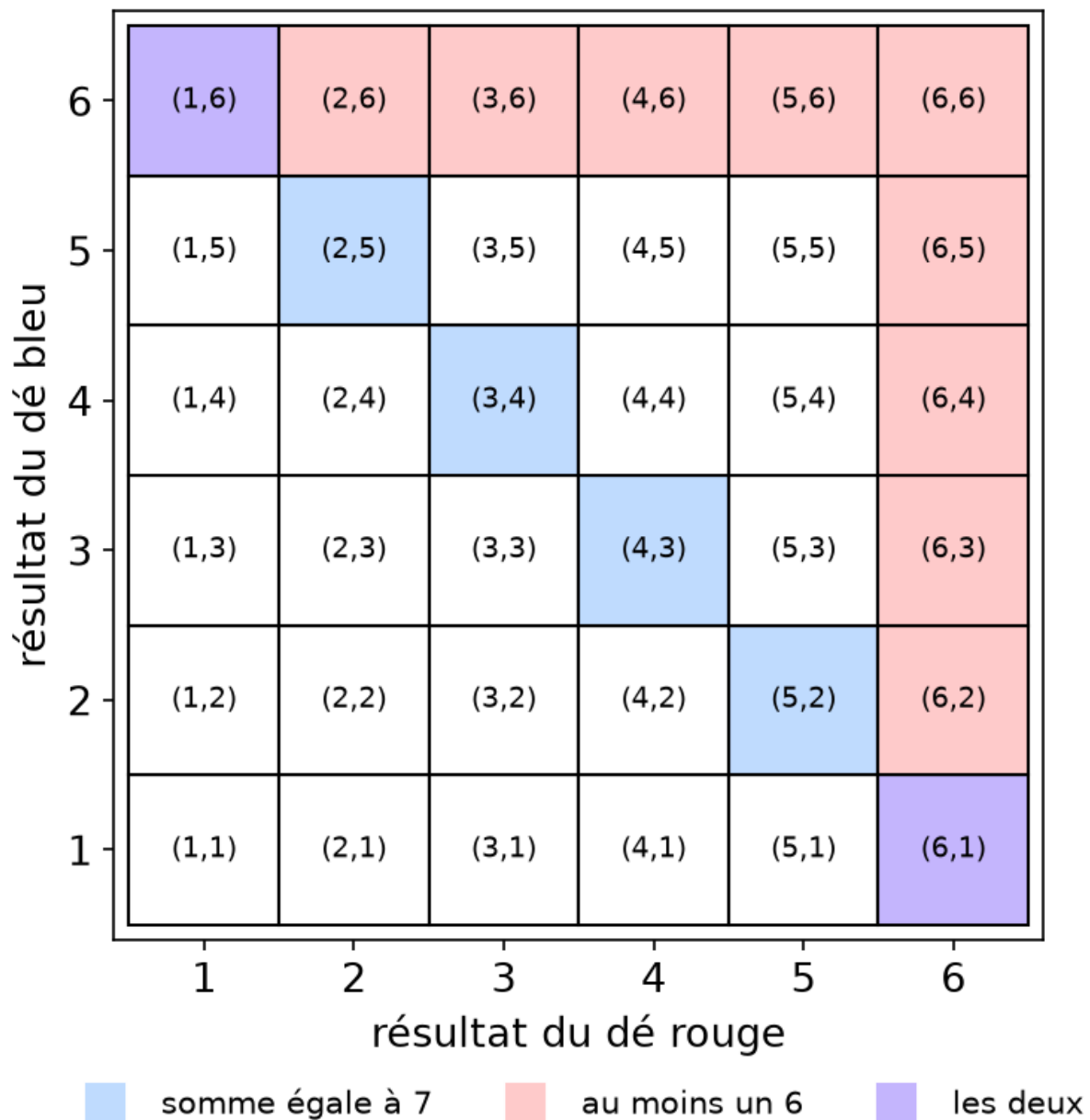


Probabilités finies

Exercice 1 : Modéliser le lancer de deux dés

On lance un dé rouge et un dé bleu, tous deux équilibrés. La grille ci-dessous représente les 36 résultats possibles.



- Proposer un univers Ω et une probabilité P qui modélisent l'expérience. Justifier le choix de l'équiprobabilité.
- On note A « la somme vaut 7 », B « on obtient un double » et C « au moins un dé donne 6 ». Décrire ces événements comme parties de Ω et calculer leurs probabilités.
- Les événements A et B sont-ils incompatibles ? Calculer $P(A \cap C)$ et $P(A \cup C)$.
- Un camarade propose l'univers $\left\{ \begin{matrix} 2, 3, \\ f_{s4 \dots 1.} \end{matrix} , 12 \right\}$ des sommes, muni de la probabilité uniforme. Expliquer pourquoi ce modèle est faux.

Exercice 2 : Opérations sur les événements

Soit A et B deux événements d'un espace probabilisé fini tels que $P(A) = 0,5$, $P(B) = 0,4$ et $P(A \cap B) = 0,2$.

1. Calculer $P(A \cup B)$, $P(\overline{A} \cap \overline{B})$ et $P(A \cap \overline{B})$.
2. Calculer la probabilité que exactement un des deux événements soit réalisé.
3. Démontrer que, pour tous événements A et B , on a $P(A) + P(B) - 1 \leq P(A \cap B) \leq \min(P(A), P(B))$.
4. Existe-t-il deux événements tels que $P(A) = 0,7$, $P(B) = 0,6$ et $P(A \cap B) = 0,2$?

Exercice 3 : Probabilité définie par des poids

On truque un dé à six faces de sorte que la probabilité d'obtenir la face k soit proportionnelle à k .

1. Déterminer la constante c telle que $P(\{k\}) = ck$ pour $k \in \{1, \dots, 6\}$. Justifier qu'on définit bien ainsi une probabilité.
2. Calculer la probabilité des événements A « obtenir un nombre pair » et B « obtenir au moins 4 ».
3. Calculer $P(A \cap B)$ puis $P(A \cup B)$ de deux façons.
4. Existe-t-il une probabilité sur $\{1, \dots, 6\}$ telle que $P(\{k\})$ soit proportionnelle à $\frac{1}{k}$? Si oui, donner la constante.

Exercice 4 : Mains de cartes par dénombrement

Un jeu de 32 cartes comporte 8 hauteurs (7, 8, 9, 10, valet, dame, roi, as) dans chacune des 4 couleurs. On tire simultanément 5 cartes au hasard.

1. Préciser l'univers et justifier l'équiprobabilité. Calculer son cardinal.
2. Calculer la probabilité d'obtenir les quatre as.
3. Calculer la probabilité d'obtenir exactement deux cœurs.
4. Calculer la probabilité d'obtenir au moins un as.
5. Un « full » est formé de trois cartes d'une même hauteur et de deux cartes d'une autre hauteur. Calculer la probabilité d'obtenir un full.

Exercice 5 : Le paradoxe des anniversaires

Dans un groupe de n personnes ($2 \leq n \leq 365$), on suppose que les dates d'anniversaire sont indépendantes et uniformément réparties sur 365 jours. On note p_n la probabilité que les n dates soient deux à deux distinctes.

1. Préciser un univers adapté et montrer que $p_n = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{365-k}{365}$.
2. Montrer que $1 - x \leq e^{-x}$ pour tout réel x .
3. En déduire que $p_n \leq \exp\left(-\frac{n(n-1)}{730}\right)$.
4. On donne $730 \ln 2 \approx 505,997$. Montrer que dans un groupe de 23 personnes, la probabilité qu'au moins deux personnes aient la même date d'anniversaire dépasse $\frac{1}{2}$.

Exercice 6 : Problème des rencontres et formule du crible

1. Démontrer la formule du crible pour trois événements :

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C).$$

2. Une secrétaire place au hasard quatre lettres différentes dans quatre enveloppes portant chacune l'adresse d'un destinataire, à raison d'une lettre par enveloppe. On note A_i l'événement « la lettre i est dans la bonne enveloppe ». Préciser l'univers et calculer $P(A_i)$, $P(A_i \cap A_j)$ pour $i \neq j$, puis la probabilité d'une intersection de trois ou quatre A_i .
3. On admet la formule du crible pour quatre événements, qui prolonge celle de la question 1 avec un terme $-P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4)$. En déduire la probabilité qu'aucune lettre ne soit dans la bonne enveloppe.
4. Avec n lettres, on admet que la probabilité qu'aucune lettre ne soit bien placée vaut $\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}$. Vérifier ce résultat pour $n = 4$, puis donner sa limite quand $n \rightarrow +\infty$.

Exercice 7 : Probabilité conditionnelle dans une classe

Une classe compte 30 étudiants : 18 filles et 12 garçons. Parmi eux, 6 filles et 4 garçons portent des lunettes. On choisit un étudiant au hasard. On note F « l'étudiant est une fille » et L « l'étudiant porte des lunettes ».

- Calculer $P(F)$, $P(L)$ et $P(F \cap L)$.
- Calculer $P_F(L)$ et $P_L(F)$. Interpréter ces deux nombres par une phrase.
- Les événements F et L sont-ils indépendants ?
- Calculer $P_L(\overline{F})$ de deux manières.

Exercice 8 : Tirages successifs et probabilités composées

Une urne contient 3 boules blanches et 5 boules noires. On tire successivement et sans remise trois boules. On note B_k l'événement « la k -ième boule tirée est blanche ».

1. Calculer la probabilité que les trois boules tirées soient blanches.
2. Calculer la probabilité que la première boule blanche apparaisse au troisième tirage.
3. Calculer $P(B_2)$ à l'aide de la formule des probabilités totales. Comparer avec $P(B_1)$.
4. Calculer $P_{B_2}(B_1)$.

Exercice 9 : Urne choisie au hasard et probabilités totales

On dispose de deux urnes. L'urne U_1 contient 3 boules blanches et 1 noire ; l'urne U_2 contient 1 boule blanche et 3 noires. On lance un dé équilibré : s'il donne 1 ou 2, on choisit U_1 , sinon on choisit U_2 . On tire alors une boule dans l'urne choisie.

1. Calculer la probabilité de tirer une boule blanche.
2. On a tiré une boule blanche. Quelle est la probabilité qu'elle provienne de U_1 ?
3. On remet la boule dans l'urne choisie et l'on effectue un second tirage dans la même urne. On note W_1 et W_2 les événements « la première (respectivement la seconde) boule est blanche ». Calculer $P(W_1 \cap W_2)$.
4. Les événements W_1 et W_2 sont-ils indépendants ? Expliquer le résultat intuitivement.

Exercice 10 : Test de dépistage et formule de Bayes

Une maladie touche 1 % d'une population. Un test de dépistage est positif chez 99 % des malades, et chez 2 % des personnes non malades. On choisit une personne au hasard et on la teste. On note M « la personne est malade » et T « le test est positif ».

1. Traduire les données en probabilités et construire un arbre pondéré.

2. Calculer $P(T)$, puis la probabilité qu'une personne testée positive soit malade.
3. Calculer la probabilité qu'une personne testée négative soit saine. Arrondir à 10^{-5} .
4. Une personne positive passe un second test. On suppose que, sachant M (respectivement sachant $\overline{M}$), les résultats des deux tests sont indépendants et suivent les mêmes probabilités que ci-dessus. Calculer la probabilité qu'elle soit malade si les deux tests sont positifs.

Exercice 11 : Indépendance deux à deux et mutuelle

On lance deux dés équilibrés. On note A « le premier dé donne un nombre pair », B « le second dé donne un nombre pair » et C « la somme des deux dés est paire ».

1. Calculer $P(A)$, $P(B)$ et $P(C)$.
2. Montrer que A , B et C sont indépendants deux à deux.
3. Sont-ils mutuellement indépendants ?
4. On remplace C par D « le premier dé donne 1, 2 ou 3 ». Les événements A et D sont-ils indépendants ? incompatibles ?

Exercice 12 : Indépendance et répétition d'une épreuve

1. Soit A et B deux événements indépendants. Démontrer que $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont indépendants.
2. Un archer atteint sa cible avec probabilité $0,3$ à chaque tir, les tirs étant mutuellement indépendants. Calculer la probabilité qu'il atteigne la cible au moins une fois en n tirs.
3. Déterminer le plus petit entier n pour lequel cette probabilité dépasse $0,95$.
4. Calculer la probabilité que le premier tir réussi soit le quatrième.

Exercice 13 : Urne de Pólya

Une urne contient initialement une boule blanche et une boule noire. On effectue des tirages successifs : après chaque tirage, on remet la boule tirée et on ajoute une boule de la même couleur. On note W_k l'événement « la k -ième boule tirée est blanche ».

1. Calculer $P(W_1)$, $P(W_2)$ et $P_{W_2}(W_1)$.
2. Les événements W_1 et W_2 sont-ils indépendants ?
3. Soit $n \geq 1$ et $k \in \{0, \dots, n\}$. Montrer que toute suite donnée de n tirages comportant k blanches et $n - k$ noires a pour probabilité $\frac{k! (n-k)!}{(n+1)!}$, quel que soit l'ordre des couleurs.
4. On note X_n le nombre de boules blanches tirées lors des n premiers tirages. Déterminer la loi de X_n et son espérance.

Exercice 14 : Loi du maximum de deux dés

On lance deux dés équilibrés. On note M le plus grand et m le plus petit des deux résultats.

1. Pour $k \in \{1, \dots, 6\}$, calculer $P(M \leq k)$.
2. En déduire la loi de M , puis son espérance.
3. Calculer $P(m \geq k)$, puis la loi de m .
4. Justifier que $M + m$ est la somme des deux dés, et en déduire $E(m)$ sans nouveau calcul de loi.

Exercice 15 : Somme de deux dés, loi, espérance et variance

On lance deux dés équilibrés et on note S la somme obtenue.

1. Déterminer la loi de S et vérifier que $P(S = k) = \frac{6 - |k - 7|}{36}$ pour $2 \leq k \leq 12$.
2. Calculer $E(S)$ de deux façons : par la définition, puis par linéarité.
3. Calculer $E(S^2)$ et $V(S)$.
4. Calculer $P(|S - 7| \geq 3)$.

Exercice 16 : Réponses au hasard à un QCM

Un QCM comporte 10 questions indépendantes. Chacune propose 4 réponses dont une seule est juste. Un étudiant répond au hasard à toutes les questions. On note X le nombre de bonnes réponses.

1. Justifier que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
2. Calculer $P(X = 0)$ et $P(X \leq 2)$, à 10^{-3} près.
3. Donner $E(X)$ et $V(X)$.
4. Chaque bonne réponse rapporte 1 point et chaque mauvaise réponse retire $\frac{1}{3}$ de point. On note N la note obtenue. Exprimer N en fonction de X , puis calculer $E(N)$ et $V(N)$. Commenter.

Exercice 17 : Rang de la première boule blanche

Une urne contient 2 boules blanches et 3 boules noires. On tire les boules une à une, sans remise, jusqu'à obtenir une boule blanche. On note X le rang de la première boule blanche.

1. Déterminer $X(n)$.

2. Déterminer la loi de X à l'aide de la formule des probabilités composées.
3. Calculer $E(X)$ et $V(X)$.
4. Retrouver $P(X = 1)$ et $P(X = 4)$ en considérant l'ensemble des positions possibles des deux boules blanches dans l'ordre complet des tirages.

Exercice 18 : Un jeu équitable

Un joueur lance un dé équilibré. S'il obtient 6, il gagne 12 euros. S'il obtient 4 ou 5, il gagne 3 euros. Sinon, il perd a euros, où $a > 0$. On note G le gain algébrique du joueur.

1. Déterminer la loi de G et calculer $E(G)$ en fonction de a .
2. Pour quelle valeur de a le jeu est-il équitable, c'est-à-dire $E(G) = 0$?
3. Pour cette valeur, calculer $V(G)$ et $\sigma(G)$.
4. L'organisateur multiplie tous les gains et la perte par 2 et ajoute un droit d'entrée de 1 euro. Exprimer le nouveau gain en fonction de G et donner son espérance et sa variance.

Exercice 19 : Loi uniforme sur un ensemble d'entiers

1. Soit X une variable de loi uniforme sur $\{1, \dots, n\}$. Démontrer que $E(X) = \frac{n+1}{2}$ et $V(X) = \frac{n^2-1}{12}$.
2. Soit $a \leq b$ deux entiers et Y de loi uniforme sur $\{a, \dots, b\}$. Montrer que $Y - a + 1$ suit une loi uniforme que l'on précisera. En déduire $E(Y)$ et $V(Y)$.
3. On choisit au hasard un entier entre 10 et 20 inclus. Calculer l'espérance et l'écart type de l'entier obtenu.
4. Soit Z de loi uniforme sur $\{-1, 0, 1\}$. Déterminer la loi de Z^2 et vérifier le théorème de transfert sur $E(Z^2)$.

Exercice 20 : Espérance et variance de la loi binomiale

Soit $n \geq 2$, $p \in [0, 1]$ et X une variable de loi $\mathcal{B}(n, p)$. On pose $q = 1 - p$.

1. Démontrer que $k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}$ pour $1 \leq k \leq n$.
2. En déduire, par un calcul direct, que $E(X) = np$.
3. Démontrer de même que $E(X(X-1)) = n(n-1)p^2$, puis que $V(X) = npq$.
4. Retrouver $E(X) = np$ en écrivant X comme une somme de variables de Bernoulli.

Exercice 21 : Tirages avec et sans remise

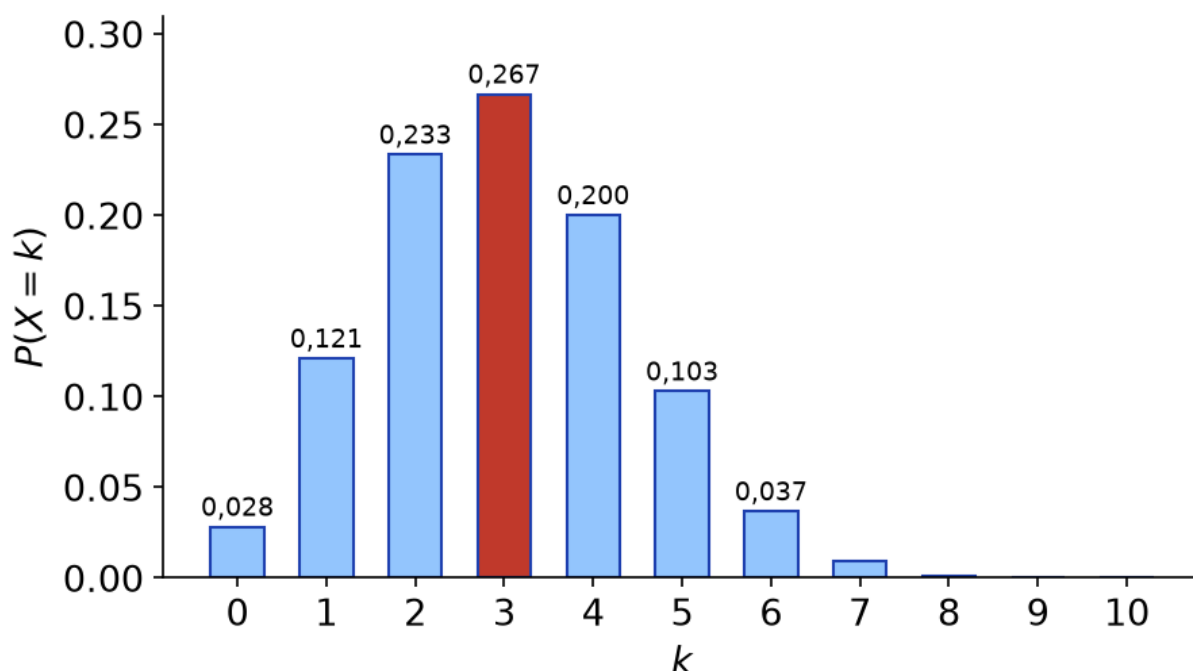
Une urne contient 4 boules rouges et 6 boules bleues. On tire 3 boules et on note X le nombre de boules rouges obtenues.

1. On tire les boules successivement avec remise. Déterminer la loi de X , son espérance et sa variance.
2. On tire désormais les 3 boules simultanément. Déterminer la loi de X par dénombrement.
3. Calculer l'espérance et la variance de X dans ce second cas.
4. Comparer les deux situations. Pourquoi la variance est-elle plus faible sans remise ?

Exercice 22 : Mode d'une loi binomiale

Soit $n \geq 1$, $p \in]0, 1[$ et X de loi $\mathcal{B}(n, p)$. On note $p_k = P(X = k)$. Le diagramme ci-

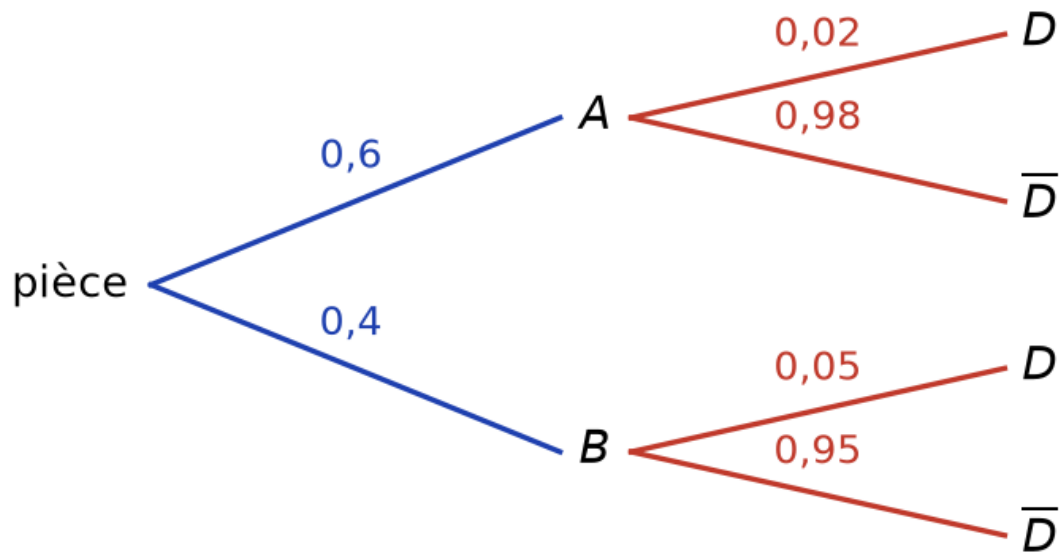
dessous représente la loi $\mathcal{B}(10; 0,3)$, dont la plus grande probabilité est atteinte en $k = 3$.



1. Pour $0 \leq k \leq n-1$, calculer le quotient $\frac{p_{k+1}}{p_k}$.
2. Montrer que $p_{k+1} > p_k$ si et seulement si $k+1 < (n+1)p$.
3. En déduire que si $(n+1)p$ n'est pas entier, la suite (p_k) admet un unique maximum, atteint en $k = \lfloor (n+1)p \rfloor$. Vérifier sur le diagramme.
4. Que se passe-t-il si $(n+1)p$ est un entier m ? Illustrer avec $n = 11$ et $p = \frac{1}{4}$.

Exercice 23 : Problème, contrôle qualité sur deux machines

Une usine fabrique des pièces sur deux machines. La machine A produit 60 % des pièces, dont 2 % sont défectueuses. La machine B produit le reste, dont 5 % sont défectueuses. On choisit une pièce au hasard dans la production. On note D l'événement « la pièce est défectueuse ». L'arbre ci-dessous résume les données.



1. Calculer $P(D)$.
2. La pièce est défectueuse. Calculer la probabilité qu'elle provienne de la machine A .
3. La pièce n'est pas défectueuse. Calculer la probabilité qu'elle provienne de A ; donner le résultat sous forme de fraction irréductible.
4. Les événements A et D sont-ils indépendants ?
5. On prélève 50 pièces dans la production totale. La production est assez grande pour assimiler ce prélèvement à 50 tirages indépendants. Soit X le nombre de pièces défectueuses. Donner la loi de X , son espérance et sa variance. Calculer $P(X = 0)$ et $P(X \geq 2)$ à 10^{-3} près.
6. Chaque pièce défectueuse vendue coûte 20 euros de remboursement. On note C le coût dû aux défauts pour ces 50 pièces. Calculer $E(C)$ et $\sigma(C)$.
7. Un client reçoit un lot provenant tout entier d'une seule machine, A avec probabilité 0,6 et B avec probabilité 0,4. Sachant la machine, les pièces sont défectueuses indépendamment les unes des autres. Il contrôle 10 pièces du lot et n'en trouve aucune défectueuse. Calculer, à 10^{-3} près, la probabilité que le lot provienne de la machine A .

Le corrigé des exercices

Chaque exercice est corrigé en détail, question par question, sur la page suivante.



Pour aller plus loin en L1

- Le cours : [probabilités finies, cours de maths en L1](#)
- À maîtriser avant : [Entiers naturels, récurrence et dénombrement](#)
- Chapitre précédent : [Géométrie du plan et de l'espace](#)
- Le même thème en maths sup : [probabilités sur un univers fini, exercices de maths sup](#)
- Tester vos connaissances : [QCM de maths en L1 par chapitre](#)
- Le sommaire : [tous les chapitres de maths de L1](#) et la [licence de maths de L1 à L3](#)