

Probabilités finies

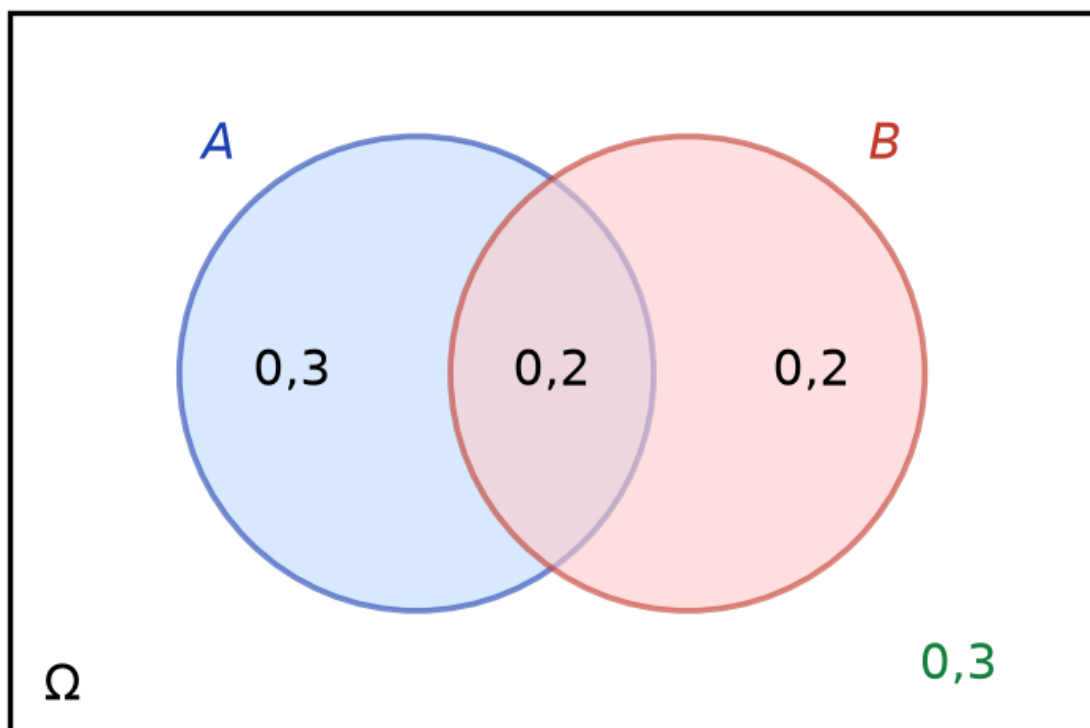
Corrigé de l'exercice 1 : Modéliser le lancer de deux dés

1. On distingue les deux dés et l'on prend $\Omega = \{1, \dots, 6\}^2$, où (i, j) signifie « le dé rouge donne i , le dé bleu donne j ». Ainsi $\text{card}(\Omega) = 36$. Les dés sont équilibrés et lancés indépendamment, donc aucun couple n'est privilégié. **On munit Ω de la probabilité uniforme : chaque couple a pour probabilité $\frac{1}{36}$.**
2. D'abord, $A = \{(1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1)\}$, donc $P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$. Ensuite, $B = \{(k, k) : 1 \leq k \leq 6\}$, donc $P(B) = \frac{1}{6}$. Enfin, le contraire de C est « aucun dé ne donne 6 », soit $\{1, \dots, 5\}^2$, qui contient 25 couples. Par conséquent, $P(A) = P(B) = \frac{1}{6}$ et $P(C) = 1 - \frac{25}{36} = \frac{11}{36}$.
3. Un double (k, k) a une somme $2k$ paire, donc jamais égale à 7. Ainsi $A \cap B = \emptyset$: **A et B sont incompatibles.** Ensuite, $A \cap C = \{(1, 6), (6, 1)\}$, d'où $P(A \cap C) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$. La grille de l'énoncé montre ces deux cases violettes. Enfin, $P(A \cup C) = \frac{6}{36} + \frac{11}{36} - \frac{2}{36} = \frac{15}{36}$. **Donc $P(A \cap C) = \frac{1}{18}$ et $P(A \cup C) = \frac{5}{12}$.**
4. Dans le vrai modèle, la somme 2 correspond au seul couple $(1, 1)$, tandis que la somme 7 correspond à six couples. Ainsi $P(S = 2) = \frac{1}{36}$ alors que $P(S = 7) = \frac{1}{6}$. **Les sommes ne sont pas équiprobables, donc la probabilité uniforme sur $\left\{ \begin{smallmatrix} 2, \\ fs4\dots \end{smallmatrix}, 12 \right\}$ ne décrit pas l'expérience.** Cet univers est acceptable, mais avec d'autres poids.

Point de méthode : pour des lancers ou tirages successifs, on distingue les objets et on travaille avec des couples ordonnés ; l'équiprobabilité y est naturelle.

Corrigé de l'exercice 2 : Opérations sur les événements

1. Par la formule de la réunion, $P(A \cup B) = 0,5 + 0,4 - 0,2 = 0,7$. Ensuite, par la loi de De Morgan, $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$, donc $P(\overline{A \cap B}) = 1 - 0,2 = 0,8$. Enfin, $\overline{A \cap B}$ est la réunion disjointe de $\overline{A} \cap \overline{B}$ et $\overline{A} \cap B$, d'où $P(\overline{A \cap B}) = P(\overline{A} \cap \overline{B}) + P(\overline{A} \cap B)$. On obtient $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0,8 - 0,3 = 0,5$. Le diagramme ci-dessous place ces quatre probabilités dans les quatre zones.



2. L'événement « exactement un » est la réunion disjointe de $A \cap \overline{B}$ et $\overline{A} \cap B$. De même qu'au 1, $P(\overline{A \cap B}) = 0,8 - 0,2 = 0,6$. La probabilité cherchée vaut $0,3 + 0,2 = 0,5$. On retrouve aussi $P(A \cup B) - P(A \cap B) = 0,7 - 0,2$.
3. D'abord, $A \cap B \subset A$ et $A \cap B \subset B$, donc par croissance $P(A \cap B) \leq P(A)$ et $P(A \cap B) \leq P(B)$. Ensuite, $P(A \cup B) \leq 1$, et la formule de la réunion donne $P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) \geq P(A) + P(B) - 1$. L'encadrement $P(A) + P(B) - 1 \leq P(A \cap B) \leq \min(P(A), P(B))$ est démontré.
4. D'après la question précédente, on devrait avoir $P(A \cap B) \geq 0,7 + 0,6 - 1 = 0,3$. Or $0,2 < 0,3$. De tels événements n'existent donc pas.

Corrigé de l'exercice 3 : Probabilité définie par des poids

1. Les poids doivent avoir pour somme 1 : $c(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) = 21c = 1$. Donc $c = \frac{1}{21}$. Les réels $\frac{k}{21}$ sont positifs et de somme 1. D'après le théorème de caractérisation par les issues, **il existe une unique probabilité telle que** $P(\{k\}) = \frac{k}{21}$, **avec** $c = \frac{1}{21}$.
2. On a $A = \{2, 4, 6\}$, donc $P(A) = \frac{2+4+6}{21} = \frac{12}{21}$. De même, $B = \{4, 5, 6\}$, donc $P(B) = \frac{15}{21}$. **Ainsi** $P(A) = \frac{4}{7}$ **et** $P(B) = \frac{5}{7}$.
3. D'abord, $A \cap B = \{4, 6\}$, donc $P(A \cap B) = \frac{10}{21}$. Par la formule de la réunion, $P(A \cup B) = \frac{12+15-10}{21} = \frac{17}{21}$. Autrement, le contraire de $A \cup B$ est $\{1, 3\}$, de probabilité $\frac{4}{21}$, et $1 - \frac{4}{21} = \frac{17}{21}$. **On trouve** $P(A \cap B) = \frac{10}{21}$ **et** $P(A \cup B) = \frac{17}{21}$.
4. On cherche $c > 0$ tel que $c \sum_{k=1}^6 \frac{1}{k} = 1$. Or $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} = \frac{60+30+20+15+12+10}{60} = \frac{147}{60} = \frac{49}{20}$. **Une telle probabilité existe, avec** $c = \frac{20}{49}$. En effet, tout choix de poids positifs se normalise ainsi.

Corrigé de l'exercice 4 : Mains de cartes par dénombrement

1. Le tirage est simultané, donc une main est une partie à 5 éléments du jeu. On prend pour Ω l'ensemble de ces parties. Le tirage se fait au hasard, donc toutes les mains sont équiprobables. **On a** $\text{card}(\Omega) = \binom{32}{5} = \frac{32 \times 31 \times 30 \times 29 \times 28}{120} = 201\,376$.
2. Une main contenant les quatre as est déterminée par sa cinquième carte, choisie parmi les 28 autres. **La probabilité vaut** $\frac{28}{201\,376} = \frac{1}{7192}$.
3. On choisit 2 cœurs parmi 8, puis 3 cartes parmi les 24 cartes qui ne sont pas des cœurs. Il y a donc $\binom{8}{2} \binom{24}{3} = 28 \times 2024 = 56\,672$ mains favorables. Ensuite, on simplifie : $\frac{56\,672}{201\,376} = \frac{1771}{6293}$ en divisant par 32, puis par 7. **La probabilité vaut** $\frac{253}{899} \approx 0,281$.

4. On passe à l'événement contraire « aucun as » : les 5 cartes sont choisies parmi 28. Ainsi

$$P(\text{aucun as}) = \frac{\binom{28}{5}}{\binom{32}{5}} = \frac{98\,280}{201\,376} = \frac{1755}{3596}. \text{ Donc la probabilité d'obtenir au moins un as}$$

vaut $\frac{1841}{3596} \approx 0,512$.

5. On construit un full par choix successifs : la hauteur du brelan (8 choix), ses trois couleurs (

$$\binom{4}{3} = 4 \text{ choix), la hauteur de la paire parmi les 7 restantes, puis ses deux couleurs (}$$

$\binom{4}{2} = 6$ choix). Il y a donc $8 \times 4 \times 7 \times 6 = 1344$ fulls. Chaque full est obtenu une seule fois, car le brelan et la paire jouent des rôles différents. **La probabilité d'un full vaut**

$$\frac{1344}{201\,376} = \frac{6}{899} \approx 0,0067.$$

Point de méthode : au numérateur comme au dénominateur, on compte le même type d'objets (ici des parties non ordonnées).

Corrigé de l'exercice 5 : Le paradoxe des anniversaires

1. On prend $\Omega = \{1, \text{fs}4\dots, 365\}^n$: la i -ième coordonnée est le jour d'anniversaire de la i -ième personne. Les hypothèses d'indépendance et d'uniformité donnent l'équiprobabilité sur Ω , de cardinal 365^n . Les issues favorables sont les listes à éléments distincts, au nombre de $365 \times 364 \times \dots \times (365 - n + 1)$. Par conséquent,

$$p_n = \frac{365 \times 364 \times \dots \times (365 - n + 1)}{365^n} = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{365 - k}{365}.$$

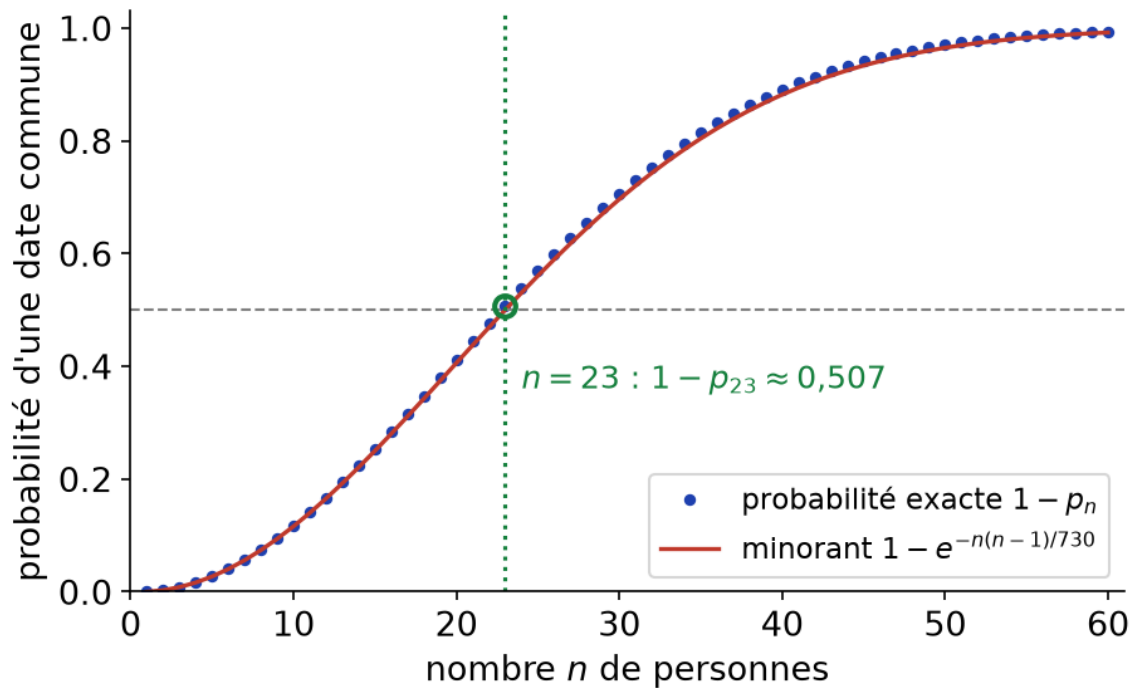
2. Posons $f(x) = e^{-x} - 1 + x$. La fonction f est dérivable et $f'(x) = 1 - e^{-x}$. Cette dérivée est négative sur $] -\infty, 0]$ et positive sur $[0, +\infty[$. Ainsi f admet un minimum en 0, égal à $f(0) = 0$. **Donc** $1 - x \leq e^{-x}$ **pour tout réel** x .

3. Pour $0 \leq k \leq n - 1$, on a $0 \leq 1 - \frac{k}{365} \leq e^{-k/365}$. Comme ces facteurs sont positifs, on peut multiplier les inégalités membre à membre :

$$p_n = \prod_{k=0}^{n-1} \left(1 - \frac{k}{365}\right) \leq \exp\left(-\frac{1}{365} \sum_{k=0}^{n-1} k\right) = \exp\left(-\frac{n(n-1)}{730}\right).$$

L'inégalité demandée est établie.

4. Pour $n = 23$, $n(n-1) = 506$. Or $506 > 730 \ln 2 \approx 505,997$, donc $\frac{506}{730} > \ln 2$. La fonction exponentielle étant croissante, $p_{23} \leq e^{-506/730} < e^{-\ln 2} = \frac{1}{2}$. **La probabilité qu'au moins deux personnes partagent leur anniversaire, $1 - p_{23}$, dépasse donc $\frac{1}{2}$.** Le calcul exact donne $1 - p_{23} \approx 0,507$. La figure ci-dessous compare les valeurs exactes et le minorant obtenu : ils sont très proches.



Corrigé de l'exercice 6 : Problème des rencontres et formule du crible

- On applique deux fois la formule de la réunion. D'abord,
 $P(A \cup B \cup C) = P(A \cup B) + P(C) - P((A \cup B) \cap C)$. Ensuite,
 $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$, et l'intersection de ces deux événements est
 $A \cap B \cap C$. Donc $P((A \cup B) \cap C) = P(A \cap C) + P(B \cap C) - P(A \cap B \cap C)$.
Enfin, on remplace $P(A \cup B)$ par $P(A) + P(B) - P(A \cap B)$. **On obtient exactement la formule du crible pour trois événements.**
- Numérotons lettres et enveloppes de 1 à 4, la lettre i étant destinée à l'enveloppe i . Un placement est une permutation de $\{1, 2, 3, 4\}$, et l'on prend pour Ω l'ensemble S_4 de ces

permutations, muni de l'équiprobabilité. Ainsi $\text{card}(\Omega) = 24$. Si la lettre i est bien placée, les trois autres se placent de $3! = 6$ façons, donc $P(A_i) = \frac{6}{24} = \frac{1}{4}$. De même, $P(A_i \cap A_j) = \frac{2!}{24} = \frac{1}{12}$. Trois lettres bien placées forcent la quatrième, donc $P(A_i) = \frac{1}{4}$, $P(A_i \cap A_j) = \frac{1}{12}$, **et toute intersection de trois ou quatre A_i a pour probabilité $\frac{1}{24}$.**

3. La formule du crible compte 4 termes simples, 6 intersections doubles, 4 triples et une quadruple :

$$P\left(\bigcup_{i=1}^4 A_i\right) = 4 \times \frac{1}{4} - 6 \times \frac{1}{12} + 4 \times \frac{1}{24} - \frac{1}{24} = \frac{24 - 12 + 4 - 1}{24} = \frac{15}{24}.$$

Par conséquent, **la probabilité qu'aucune lettre ne soit bien placée vaut $1 - \frac{5}{8} = \frac{3}{8}$.**

4. Pour $n = 4$, $\sum_{k=0}^4 \frac{(-1)^k}{k!} = 1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{24} = \frac{12 - 4 + 1}{24} = \frac{9}{24} = \frac{3}{8}$, ce qui

confirme le résultat. De plus, la série exponentielle donne $\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} \rightarrow e^{-1}$. **La limite vaut $\frac{1}{e} \approx 0,368$.**

Corrigé de l'exercice 7 : Probabilité conditionnelle dans une classe

1. Le choix se fait au hasard, donc on est en situation d'équiprobabilité sur les 30 étudiants. Il y a 18 filles, $6 + 4 = 10$ porteurs de lunettes et 6 filles à lunettes. **Ainsi $P(F) = \frac{3}{5}$, $P(L) = \frac{1}{3}$ et $P(F \cap L) = \frac{1}{5}$.**
2. Par définition, $P_F(L) = \frac{P(F \cap L)}{P(F)} = \frac{1/5}{3/5} = \frac{1}{3}$. De même, $P_L(F) = \frac{1/5}{1/3} = \frac{3}{5}$. **Un tiers des filles portent des lunettes, et trois porteurs de lunettes sur cinq sont des filles.**
3. On a $P(F)P(L) = \frac{3}{5} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{5} = P(F \cap L)$. **Les événements F et L sont donc indépendants.** Cela se voit aussi sur $P_F(L) = P(L)$.
4. D'abord, P_L est une probabilité, donc $P_L(\overline{F}) = 1 - P_L(F) = \frac{2}{5}$. Ensuite, directement, 4 des 10 porteurs de lunettes sont des garçons. **Dans les deux cas, $P_L(\overline{F}) = \frac{2}{5}$.**

Corrigé de l'exercice 8 : Tirages successifs et probabilités composées

1. Par la formule des probabilités composées,

$P(B_1 \cap B_2 \cap B_3) = P(B_1) P_{B_1}(B_2) P_{B_1 \cap B_2}(B_3)$. Avant chaque tirage, on connaît la composition de l'urne. Ainsi, cette probabilité vaut $\frac{3}{8} \times \frac{2}{7} \times \frac{1}{6} = \frac{6}{336}$. **La probabilité de tirer les trois blanches vaut $\frac{1}{56}$.**

2. L'événement est $\overline{B_1} \cap \overline{B_2} \cap B_3$. De la même façon, sa probabilité vaut $\frac{5}{8} \times \frac{4}{7} \times \frac{3}{6} = \frac{60}{336}$. **La probabilité cherchée vaut $\frac{5}{28}$.**

3. Le couple $(B_1, \overline{B_1})$ est un système complet d'événements de probabilités non nulles. Par la formule des probabilités totales :

$$P(B_2) = P(B_1) P_{B_1}(B_2) + P(\overline{B_1}) P_{\overline{B_1}}(B_2) = \frac{3}{8} \times \frac{2}{7} + \frac{5}{8} \times \frac{3}{7} = \frac{6+15}{56} = \frac{21}{56}.$$

Ainsi $P(B_2) = \frac{3}{8} = P(B_1)$. Ce résultat s'explique par symétrie : sans information sur le premier tirage, chaque boule a la même chance d'être tirée en deuxième.

4. Par définition, $P_{B_2}(B_1) = \frac{P(B_1 \cap B_2)}{P(B_2)} = \frac{6/56}{21/56}$. **On obtient $P_{B_2}(B_1) = \frac{2}{7}$.** C'est la même valeur que $P_{B_1}(B_2)$, toujours par symétrie.

Corrigé de l'exercice 9 : Urne choisie au hasard et probabilités totales

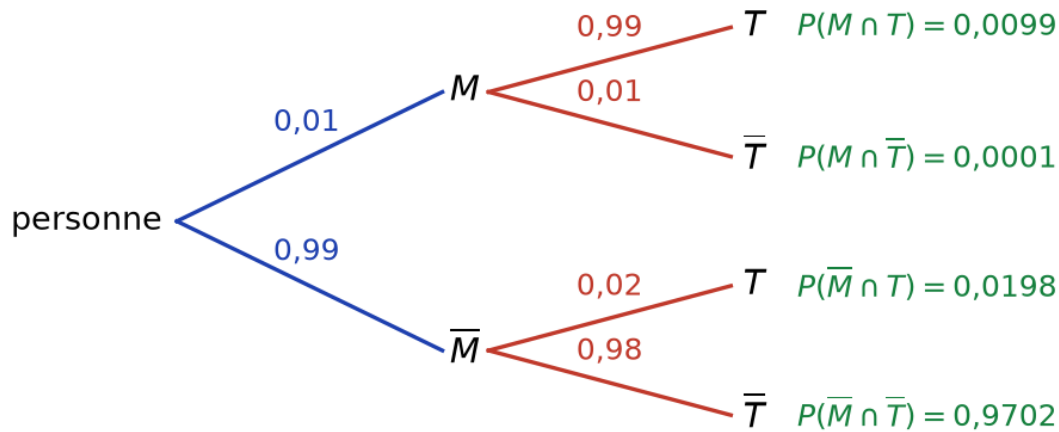
1. Le dé donne $P(U_1) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ et $P(U_2) = \frac{2}{3}$. Ensuite, $P_{U_1}(W_1) = \frac{3}{4}$ et $P_{U_2}(W_1) = \frac{1}{4}$. Le couple (U_1, U_2) est un système complet, donc par la formule des probabilités totales, $P(W_1) = \frac{1}{3} \times \frac{3}{4} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{4} + \frac{1}{6}$. **La probabilité de tirer une boule blanche vaut $\frac{5}{12}$.**

2. Par la formule de Bayes, $P_{W_1}(U_1) = \frac{P(U_1) P_{U_1}(W_1)}{P(W_1)} = \frac{1/4}{5/12} = \frac{12}{20}$. **La probabilité que la boule provienne de U_1 vaut $\frac{3}{5}$.** Elle a augmenté par rapport à $\frac{1}{3}$, car U_1 est riche en blanches.
3. Sachant l'urne choisie, les deux tirages avec remise sont indépendants. Ainsi $P_{U_1}(W_1 \cap W_2) = \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{16}$ et $P_{U_2}(W_1 \cap W_2) = \frac{1}{16}$. Par la formule des probabilités totales, $P(W_1 \cap W_2) = \frac{1}{3} \times \frac{9}{16} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{16} = \frac{9+2}{48}$. **Donc $P(W_1 \cap W_2) = \frac{11}{48}$.**
4. Par symétrie, $P(W_2) = \frac{5}{12}$, donc $P(W_1)P(W_2) = \frac{25}{144}$. Or $\frac{11}{48} = \frac{33}{144}$. **Les événements W_1 et W_2 ne sont pas indépendants.** En effet, une première boule blanche rend plus probable l'urne U_1 , donc une seconde blanche : $P_{W_1}(W_2) = \frac{11}{20} > \frac{5}{12}$.

Point de méthode : l'indépendance sachant chaque cause n'entraîne pas l'indépendance tout court ; il faut toujours recalculer.

Corrigé de l'exercice 10 : Test de dépistage et formule de Bayes

1. Les données se traduisent ainsi : $P(M) = 0,01$, $P_M(T) = 0,99$ et $P_{\overline{M}}(T) = 0,02$. On en déduit $P_M(\overline{T}) = 0,01$ et $P_{\overline{M}}(\overline{T}) = 0,98$, car P_M et $P_{\overline{M}}$ sont des probabilités. **L'arbre pondéré ci-dessous résume la situation, avec la probabilité de chaque chemin.**



2. Par la formule des probabilités totales, $P(T) = 0,0099 + 0,0198 = 0,0297$. Ensuite, la formule de Bayes donne $P_T(M) = \frac{0,0099}{0,0297} = \frac{99}{297}$. Ainsi $P(T) = 0,0297$ et $P_T(M) = \frac{1}{3}$. Malgré la qualité du test, deux positifs sur trois sont sains, car les malades sont rares.
3. On a $P(\bar{T}) = 1 - 0,0297 = 0,9703$ et $P(\bar{M} \cap \bar{T}) = 0,99 \times 0,98 = 0,9702$. Par conséquent, $P_{\bar{T}}(\bar{M}) = \frac{0,9702}{0,9703} \approx 0,99990$. Un test négatif est donc très rassurant.
4. Notons T_1 et T_2 les deux résultats positifs. Par l'indépendance conditionnelle supposée, $P_M(T_1 \cap T_2) = 0,99^2 = 0,9801$ et $P_{\bar{M}}(T_1 \cap T_2) = 0,02^2 = 0,0004$. La formule de Bayes donne alors

$$P_{T_1 \cap T_2}(M) = \frac{0,01 \times 0,9801}{0,01 \times 0,9801 + 0,99 \times 0,0004} = \frac{0,009801}{0,010197} = \frac{99}{103}.$$

La probabilité d'être malade après deux tests positifs vaut $\frac{99}{103} \approx 0,961$.

Corrigé de l'exercice 11 : Indépendance deux à deux et mutuelle

1. On travaille sur $\Omega = \{1, \dots, 6\}^2$ muni de l'équiprobabilité. L'événement A contient $3 \times 6 = 18$ couples, de même que B . Ensuite, la somme est paire si les deux dés ont la même parité : cela donne $9 + 9 = 18$ couples. **Ainsi** $P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{2}$.
2. D'abord, $A \cap B$ contient $3 \times 3 = 9$ couples, donc $P(A \cap B) = \frac{1}{4} = P(A)P(B)$. Ensuite, $A \cap C$ signifie « premier pair et second pair », soit $A \cap B$: $P(A \cap C) = \frac{1}{4}$. De même, $B \cap C = A \cap B$, d'où $P(B \cap C) = \frac{1}{4}$. **Chaque probabilité d'intersection vaut $\frac{1}{4} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$: les trois événements sont indépendants deux à deux.**
3. On a $A \cap B \cap C = A \cap B$, donc $P(A \cap B \cap C) = \frac{1}{4}$. Or $P(A)P(B)P(C) = \frac{1}{8}$. **Les événements ne sont pas mutuellement indépendants.**
4. L'intersection $A \cap D$ est « le premier dé donne 2 », de probabilité $\frac{1}{6}$. Or $P(A)P(D) = \frac{1}{4}$. **A et D ne sont ni indépendants ($\frac{1}{6} \neq \frac{1}{4}$), ni incompatibles ($A \cap D \neq \emptyset$).**

Corrigé de l'exercice 12 : Indépendance et répétition d'une épreuve

1. D'abord, A est la réunion disjointe de $A \cap B$ et $A \cap \overline{B}$. Donc $P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A \cap B) = P(A)P(\overline{B})$: A et $\overline{B}$ sont indépendants. On applique ensuite ce résultat au couple $(\overline{B}, A)$. **Ainsi** $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A})P(\overline{B})$.
2. Notons R_i « le i -ième tir réussit ». Les événements $\overline{R}_1, \dots, \overline{R}_n$ sont mutuellement indépendants, par le même argument appliqué à chaque sous-famille. Le contraire de « au moins une réussite » est $\overline{R}_1 \cap \dots \cap \overline{R}_n$, de probabilité $0,7^n$. **La probabilité cherchée vaut $1 - 0,7^n$.**
3. On veut $0,7^n \leq 0,05$, soit $n \ln 0,7 \leq \ln 0,05$. Comme $\ln 0,7 < 0$, cela équivaut à $n \geq \frac{\ln 0,05}{\ln 0,7} \approx 8,40$. On vérifie : $0,7^8 \approx 0,0576$ et $0,7^9 \approx 0,0404$. **Le plus petit entier convenable est $n = 9$.**
4. L'événement est $\overline{R}_1 \cap \overline{R}_2 \cap \overline{R}_3 \cap R_4$. Par indépendance mutuelle, sa probabilité vaut $0,7^3 \times 0,3$. **On obtient $0,1029$.**

Corrigé de l'exercice 13 : Urne de Pólya

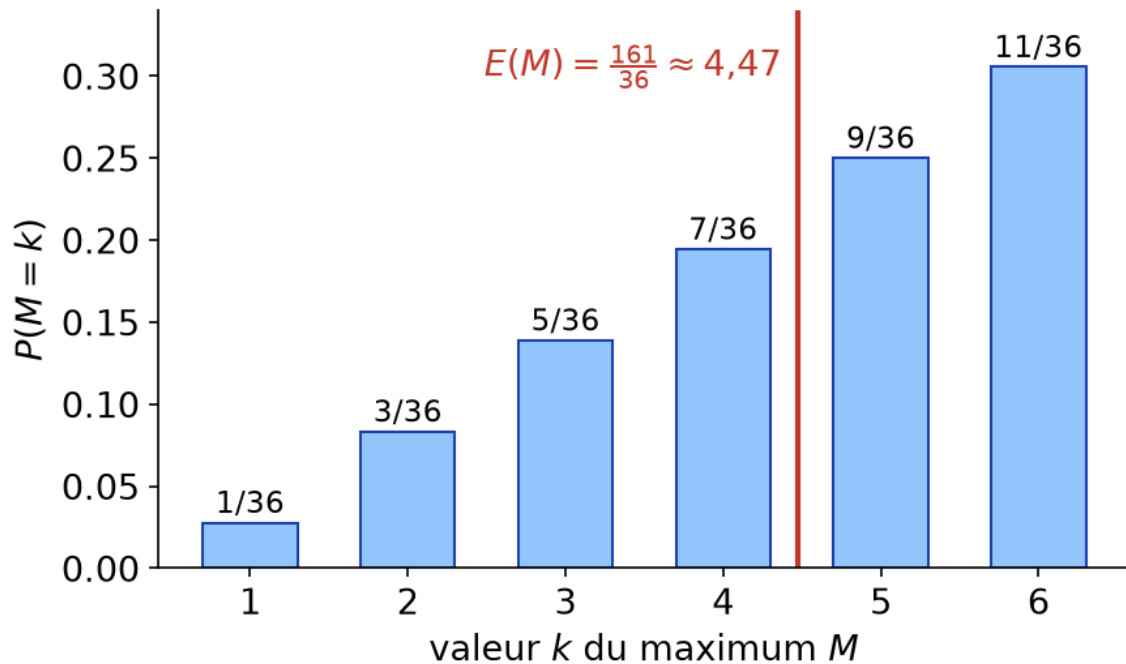
1. Au départ, l'urne contient une blanche et une noire, donc $P(W_1) = \frac{1}{2}$. Si la première est blanche, l'urne contient 2 blanches et 1 noire, donc $P_{W_1}(W_2) = \frac{2}{3}$. Sinon, elle contient 1 blanche et 2 noires, et $P_{\overline{W_1}}(W_2) = \frac{1}{3}$. Par la formule des probabilités totales,
$$P(W_2) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{2}.$$
 Enfin, par la formule de Bayes, $P_{W_2}(W_1) = \frac{1/3}{1/2}$. On trouve $P(W_1) = P(W_2) = \frac{1}{2}$ et $P_{W_2}(W_1) = \frac{2}{3}$.
2. On a $P(W_1 \cap W_2) = \frac{1}{3}$, alors que $P(W_1)P(W_2) = \frac{1}{4}$. Les événements W_1 et W_2 ne sont pas indépendants.
3. Avant le $(t+1)$ -ième tirage, l'urne contient $t+2$ boules. Par la formule des probabilités composées, la probabilité d'une suite donnée est un produit de n fractions. Les dénominateurs valent successivement $2, 3, \dots, n+1$, de produit $(n+1)!$. Ensuite, lorsqu'on tire la j -ième blanche, l'urne contient j blanches : les numérateurs des tirages blancs sont $1, 2, \dots, k$. De même, ceux des tirages noirs sont $1, 2, \dots, n-k$. **Toute suite comportant k blanches a donc pour probabilité $\frac{k!(n-k)!}{(n+1)!}$, quel que soit l'ordre.**
4. L'événement $(X_n = k)$ est la réunion disjointe des suites comportant k blanches. Or ces suites sont au nombre de $\binom{n}{k}$, car on choisit les rangs des blanches. Donc
$$P(X_n = k) = \binom{n}{k} \frac{k!(n-k)!}{(n+1)!} = \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1}.$$
 La variable X_n suit la loi uniforme sur $\{0, \dots, n\}$, et $E(X_n) = \frac{n}{2}$. En effet, $E(X_n) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n k = \frac{n}{2}$.

Corrigé de l'exercice 14 : Loi du maximum de deux dés

1. On a $M \leq k$ si et seulement si les deux dés donnent un résultat dans $\{1, \dots, k\}$. Il y a k^2 tels couples parmi 36. **Donc $P(M \leq k) = \frac{k^2}{36}$.**
2. Pour $k \geq 2$, $P(M = k) = P(M \leq k) - P(M \leq k-1) = \frac{k^2 - (k-1)^2}{36} = \frac{2k-1}{36}$. La formule reste vraie pour $k = 1$. Ensuite,

$$E(M) = \sum_{k=1}^6 k \frac{2k-1}{36} = \frac{2 \times 91 - 21}{36} = \frac{161}{36}.$$

La loi est $P(M = k) = \frac{2k-1}{36}$ **et** $E(M) = \frac{161}{36} \approx 4,47$. Le diagramme ci-dessous montre cette loi croissante.



3. On a $m \geq k$ si et seulement si les deux dés donnent un résultat dans $\{k, \dots, 6\}$, qui a $7 - k$ éléments. Donc $P(m \geq k) = \frac{(7-k)^2}{36}$. Ensuite,

$$P(m = k) = P(m \geq k) - P(m \geq k+1) = \frac{(7-k)^2 - (6-k)^2}{36}. \text{ Ainsi}$$

$$P(m = k) = \frac{13-2k}{36} \text{ pour } 1 \leq k \leq 6.$$

4. Le plus grand et le plus petit des deux résultats sont les deux résultats eux-mêmes, donc

$$M + m = D_1 + D_2. \text{ Par linéarité, } E(M) + E(m) = E(D_1) + E(D_2) = 7. \text{ Par conséquent, } E(m) = 7 - \frac{161}{36} = \frac{91}{36}. \text{ Un calcul direct donne bien } \frac{13 \times 21 - 2 \times 91}{36} = \frac{91}{36}.$$

Corrigé de l'exercice 15 : Somme de deux dés, loi, espérance et variance

- On a $S(\Omega) = \left\{ \begin{matrix} 2, \\ \text{fs4...}, 12 \end{matrix} \right\}$. Pour $2 \leq k \leq 7$, les couples de somme k sont $(1, k-1), \dots, (k-1, 1)$: il y en a $k-1 = 6 - |k-7|$. Pour $7 \leq k \leq 12$, ce sont $(k-6, 6), \dots, (6, k-6)$: il y en a $13-k = 6 - |k-7|$. Ainsi $P(S = k) = \frac{6 - |k-7|}{36}$.
- La loi est symétrique par rapport à 7, car $P(S = 7+j) = P(S = 7-j)$. En regroupant les termes $7+j$ et $7-j$, la définition donne $E(S) = 7 \sum_k P(S = k) = 7$. Par linéarité, $S = D_1 + D_2$ et $E(D_i) = \frac{21}{6} = \frac{7}{2}$. Dans les deux cas, $E(S) = 7$.
- Par le théorème de transfert,
 $36 E(S^2) = 4 + 18 + 48 + 100 + 180 + 294 + 320 + 324 + 300 + 242 + 144 = 1974$.
Ensuite, König-Huygens donne $V(S) = \frac{1974}{36} - 49 = \frac{1974 - 1764}{36} = \frac{210}{36}$. On obtient $E(S^2) = \frac{329}{6}$ et $V(S) = \frac{35}{6}$.
- L'événement $|S - 7| \geq 3$ est $S \in \{2, 3, 4, 10, 11, 12\}$. Sa probabilité vaut $\frac{1+2+3+3+2+1}{36} = \frac{12}{36}$. Donc $P(|S - 7| \geq 3) = \frac{1}{3}$.

Corrigé de l'exercice 16 : Réponses au hasard à un QCM

- Chaque question est une épreuve de Bernoulli de succès « réponse juste », de probabilité $\frac{1}{4}$. Les 10 épreuves sont mutuellement indépendantes, et X compte les succès. Par le théorème du cours, $X \sim \mathcal{B}(10, \frac{1}{4})$.
- D'abord, $P(X = 0) = \left(\frac{3}{4}\right)^{10} \approx 0,0563$. Ensuite,
 $P(X = 1) = 10 \times \frac{1}{4} \times \left(\frac{3}{4}\right)^9 \approx 0,1877$ et $P(X = 2) = 45 \times \frac{1}{16} \times \left(\frac{3}{4}\right)^8 \approx 0,2816$.
Ainsi $P(X = 0) \approx 0,056$ et $P(X \leq 2) \approx 0,526$.
- Pour une loi binomiale, $E(X) = np$ et $V(X) = np(1-p)$. Donc $E(X) = \frac{5}{2}$ et

$$V(X) = 10 \times \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{15}{8}.$$

4. Il y a $10 - X$ mauvaises réponses, donc $N = X - \frac{10 - X}{3} = \frac{4X - 10}{3}$. Par linéarité, $E(N) = \frac{4 \times 2,5 - 10}{3} = 0$. Ensuite, $V(N) = \frac{16}{9} V(X) = \frac{16}{9} \times \frac{15}{8} = \frac{10}{3}$. **On obtient** $E(N) = 0$ **et** $V(N) = \frac{10}{3}$. Le barème est donc conçu pour qu'un candidat répondant au hasard ait une note moyenne nulle.

Corrigé de l'exercice 17 : Rang de la première boule blanche

1. Il y a 3 noires, donc la première blanche sort au plus tard au quatrième tirage. **Ainsi** $X(\Omega) = \{1, 2, 3, 4\}$.
2. Notons N_i « la i -ième boule est noire ». Par la formule des probabilités composées :

$$\begin{aligned} P(X = 1) &= \frac{2}{5}, \quad P(X = 2) = \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} = \frac{3}{10}, \\ P(X = 3) &= \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{5}, \quad P(X = 4) = \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} \times \frac{1}{3} \times 1 = \frac{1}{10}. \end{aligned}$$

La loi de X est $\left(\frac{4}{10}, \frac{3}{10}, \frac{2}{10}, \frac{1}{10}\right)$ **sur** $\{1, 2, 3, 4\}$; la somme vaut bien 1.

3. D'abord, $E(X) = \frac{4 + 6 + 6 + 4}{10} = 2$. Ensuite, par transfert, $E(X^2) = \frac{4 + 12 + 18 + 16}{10} = 5$. **Donc** $E(X) = 2$ **et** $V(X) = 5 - 4 = 1$.
4. Si l'on vide entièrement l'urne, les positions des deux blanches forment une partie à 2 éléments de $\{1, \dots, 5\}$, et ces 10 parties sont équiprobables. Ensuite, $X = 1$ signifie que la position 1 est prise : il reste 4 choix pour l'autre blanche. De même, $X = 4$ impose les positions $\{4, 5\}$. **On retrouve** $P(X = 1) = \frac{4}{10}$ **et** $P(X = 4) = \frac{1}{10}$.

Corrigé de l'exercice 18 : Un jeu équitable

1. La variable G prend les valeurs 12 , 3 et $-a$, avec les probabilités $\frac{1}{6}$, $\frac{2}{6}$ et $\frac{3}{6}$. Ainsi $E(G) = \frac{12 + 6 - 3a}{6}$. **La loi est $(\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2})$ et $E(G) = 3 - \frac{a}{2}$.**
2. On résout $3 - \frac{a}{2} = 0$. **Le jeu est équitable pour $a = 6$.**
3. Dans ce cas, $E(G) = 0$, donc $V(G) = E(G^2) = \frac{144 + 2 \times 9 + 3 \times 36}{6} = \frac{270}{6}$. **On obtient $V(G) = 45$ et $\sigma(G) = 3\sqrt{5} \approx 6,71$ euros.**
4. Le nouveau gain vaut $G' = 2G - 1$. Par linéarité, $E(G') = 2 \times 0 - 1$. Ensuite, $V(G') = 4 V(G)$. **Ainsi $E(G') = -1$ et $V(G') = 180$.** Le jeu devient défavorable au joueur.

Corrigé de l'exercice 19 : Loi uniforme sur un ensemble d'entiers

1. D'abord, $E(X) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n k = \frac{1}{n} \times \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n+1}{2}$. Ensuite, par transfert, $E(X^2) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{(n+1)(2n+1)}{6}$. Enfin, par König-Huygens, $V(X) = \frac{(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{(n+1)^2}{4} = \frac{(n+1)(4n+2-3n-3)}{12}$. **Donc $E(X) = \frac{n+1}{2}$ et $V(X) = \frac{n^2-1}{12}$.**
2. Posons $N = b - a + 1$ et $U = Y - a + 1$. La variable U prend les valeurs $1, \dots, N$, et $P(U = j) = P(Y = a + j - 1) = \frac{1}{N}$. Donc $U \sim \mathcal{U}(\{1, \dots, N\})$. Comme $Y = U + a - 1$, on a $E(Y) = \frac{N+1}{2} + a - 1$ et $V(Y) = V(U)$. **Ainsi $E(Y) = \frac{a+b}{2}$ et $V(Y) = \frac{(b-a+1)^2-1}{12}$.**
3. Ici $a = 10$, $b = 20$ et $N = 11$. **L'espérance vaut 15 et la variance $\frac{120}{12} = 10$, donc l'écart type vaut $\sqrt{10} \approx 3,16$.**
4. La variable Z^2 vaut 0 si $Z = 0$ et 1 si $Z = \pm 1$. Donc $P(Z^2 = 0) = \frac{1}{3}$, $P(Z^2 = 1) = \frac{2}{3}$, et $E(Z^2) = \frac{2}{3}$. Par transfert, on trouve aussi $E(Z^2) = \frac{(-1)^2 + 0^2 + 1^2}{3}$. **Les deux calculs donnent $E(Z^2) = \frac{2}{3}$.**

Corrigé de l'exercice 20 : Espérance et variance de la loi binomiale

1. Pour $1 \leq k \leq n$, $k \binom{n}{k} = \frac{k \cdot n!}{k! (n-k)!} = \frac{n \cdot (n-1)!}{(k-1)! (n-k)!}$. C'est bien $n \binom{n-1}{k-1}$.

2. Le terme $k = 0$ est nul. On utilise la question 1, puis on pose $j = k - 1$:

$$E(X) = \sum_{k=1}^n n \binom{n-1}{k-1} p^k q^{n-k} = np \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} p^j q^{n-1-j} = np (p+q)^{n-1}.$$

Comme $p+q=1$, on obtient $E(X) = np$.

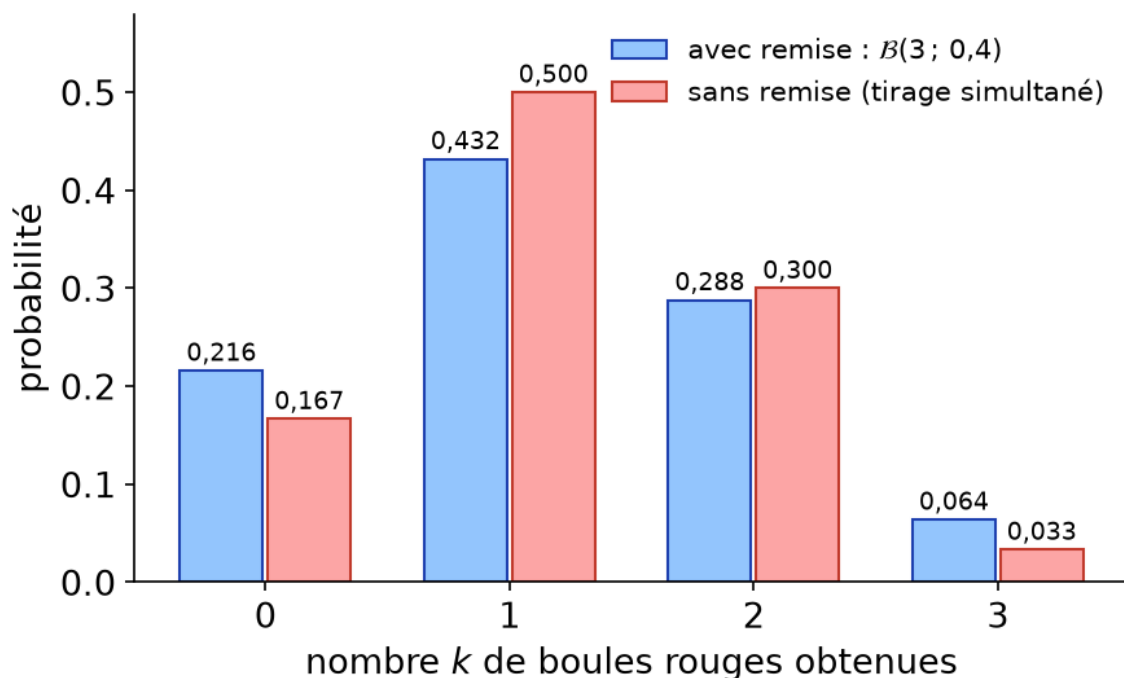
3. En appliquant deux fois la question 1, $k(k-1) \binom{n}{k} = n(n-1) \binom{n-2}{k-2}$ pour $k \geq 2$. Les termes $k=0$ et $k=1$ sont nuls. Par transfert et binôme, $E(X(X-1)) = n(n-1)p^2 (p+q)^{n-2} = n(n-1)p^2$. Ensuite, $E(X^2) = E(X(X-1)) + E(X)$, donc $V(X) = n(n-1)p^2 + np - n^2p^2 = np - n^2p^2$. Ainsi $V(X) = np(1-p) = npq$.

4. La loi $\mathcal{B}(n, p)$ est celle du nombre de succès dans n épreuves de Bernoulli indépendantes. On écrit donc $X = X_1 + \dots + X_n$, où X_i vaut 1 en cas de succès à l'épreuve i . Chaque X_i suit $\mathcal{B}(p)$, d'espérance p . Par linéarité, $E(X) = np$. Cette méthode n'utilise ni la loi de X ni l'indépendance.

Corrigé de l'exercice 21 : Tirages avec et sans remise

1. Avec remise, les trois tirages sont indépendants et chacun donne une rouge avec probabilité $\frac{4}{10} = 0,4$. Donc $X \sim \mathcal{B}(3; 0,4)$: $P(X=0) = 0,216$, $P(X=1) = 0,432$, $P(X=2) = 0,288$, $P(X=3) = 0,064$. Ainsi $E(X) = 1,2$ et $V(X) = 3 \times 0,4 \times 0,6 = 0,72$.

2. Sans remise, on prend pour univers les parties à 3 éléments des 10 boules, équiprobables, au nombre de $\binom{10}{3} = 120$. Pour obtenir k rouges, on choisit k rouges parmi 4 et $3 - k$ bleues parmi 6. Donc $P(X = k) = \frac{\binom{4}{k} \binom{6}{3-k}}{120}$, ce qui donne $\frac{20}{120}$, $\frac{60}{120}$, $\frac{36}{120}$, $\frac{4}{120}$. **La loi est $(\frac{1}{6}, \frac{1}{2}, \frac{3}{10}, \frac{1}{30})$ sur $\{0, 1, 2, 3\}$.**
3. D'abord, $E(X) = \frac{60 + 72 + 12}{120} = \frac{144}{120} = 1,2$. Ensuite, par transfert, $E(X^2) = \frac{60 + 144 + 36}{120} = 2$. **Ainsi $E(X) = 1,2$ et $V(X) = 2 - 1,44 = 0,56$.**
4. Les deux espérances sont égales, car chaque boule tirée est rouge avec probabilité $0,4$ dans les deux cas. En revanche, sans remise, tirer une rouge diminue les chances de la suivante. Les valeurs extrêmes 0 et 3 deviennent donc moins probables, comme le montre la figure ci-dessous. **C'est pourquoi la variance baisse de $0,72$ à $0,56$.**



Corrigé de l'exercice 22 : Mode d'une loi binomiale

1. Comme $0 < p < 1$, tous les P_k sont non nuls. Ensuite,

$$\frac{\binom{n}{k+1}}{\binom{n}{k}} = \frac{k!(n-k)!}{(k+1)!(n-k-1)!} = \frac{n-k}{k+1}. \text{ Donc } \frac{p_{k+1}}{p_k} = \frac{(n-k)p}{(k+1)(1-p)}.$$

- Les dénominateurs sont positifs, donc $p_{k+1} > p_k$ équivaut à $(n-k)p > (k+1)(1-p)$. En développant, on obtient $np - kp > k + 1 - kp - p$, soit $np + p > k + 1$. Ainsi $p_{k+1} > p_k$ si et seulement si $k + 1 < (n+1)p$. De même, $p_{k+1} = p_k$ si et seulement si $k + 1 = (n+1)p$.
- Posons $m = \lfloor (n+1)p \rfloor$. Comme $0 < (n+1)p < n + 1$, on a $0 \leq m \leq n$. Si $(n+1)p$ n'est pas entier, alors pour $k + 1 \leq m$, $k + 1 < (n+1)p$, donc la suite croît strictement jusqu'à p_m . Pour $k + 1 \geq m + 1$, $k + 1 > (n+1)p$, donc elle décroît strictement ensuite. **Le maximum est unique, atteint en $k = \lfloor (n+1)p \rfloor$.** Pour $n = 10$ et $p = 0,3$, $(n+1)p = 3,3$, donc le mode vaut 3, comme sur le diagramme de l'énoncé.
- Si $(n+1)p = m$ est entier, alors $1 \leq m \leq n$ et $p_m = p_{m-1}$. La suite croît strictement jusqu'à p_{m-1} et décroît strictement à partir de p_m . **Le maximum est atteint en deux valeurs, $m - 1$ et m .** Pour $n = 11$ et $p = \frac{1}{4}$, $m = 3$. On vérifie que $p_2 = 55 \frac{3^9}{4^{11}}$ et $p_3 = 165 \frac{3^8}{4^{11}}$ sont égaux, car $55 \times 3 = 165$.

Corrigé de l'exercice 23 : Problème, contrôle qualité sur deux machines

- Le couple (A, B) est un système complet, avec $P(A) = 0,6$, $P(B) = 0,4$, $P_A(D) = 0,02$ et $P_B(D) = 0,05$. Par la formule des probabilités totales, $P(D) = 0,6 \times 0,02 + 0,4 \times 0,05 = 0,012 + 0,020$. **Donc $P(D) = 0,032$.**
- Par la formule de Bayes, $P_D(A) = \frac{0,012}{0,032} = \frac{12}{32}$. **La probabilité que la pièce vienne de A vaut $\frac{3}{8} = 0,375$.**
- On a $P(\overline{D}) = 0,968$ et $P(A \cap \overline{D}) = 0,6 \times 0,98 = 0,588$. Donc $P_{\overline{D}}(A) = \frac{0,588}{0,968} = \frac{588}{968}$. On simplifie par 4. **On obtient $P_{\overline{D}}(A) = \frac{147}{242} \approx 0,607$, fraction irréductible car $147 = 3 \times 7^2$ et $242 = 2 \times 11^2$.**
- On a $P(A \cap D) = 0,012$, alors que $P(A)P(D) = 0,6 \times 0,032 = 0,0192$. **Les événements A et D ne sont pas indépendants.** En effet, la machine A produit

proportionnellement moins de défauts.

5. On répète 50 épreuves indépendantes de succès « pièce défectueuse », de probabilité 0,032 .

Donc $X \sim \mathcal{B}(50; 0,032)$, avec $E(X) = 50 \times 0,032 = 1,6$ et

$V(X) = 1,6 \times 0,968 = 1,5488$. Ensuite, $P(X = 0) = 0,968^{50} \approx 0,1967$ et

$P(X = 1) = 50 \times 0,032 \times 0,968^{49} \approx 0,3251$. Ainsi $E(X) = 1,6$,

$V(X) = 1,5488$, $P(X = 0) \approx 0,197$ et

$P(X \geq 2) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) \approx 0,478$.

6. On a $C = 20X$. Par linéarité, $E(C) = 20 \times 1,6 = 32$. Ensuite,

$V(C) = 400 V(X) = 619,52$. Donc $E(C) = 32$ euros et

$\sigma(C) = \sqrt{619,52} \approx 24,89$ euros.

7. Notons Z « aucune des 10 pièces contrôlées n'est défectueuse ». Sachant la machine, les pièces sont indépendantes, donc $P_A(Z) = 0,98^{10} \approx 0,81707$ et

$P_B(Z) = 0,95^{10} \approx 0,59874$. Par la formule de Bayes :

$$P_Z(A) = \frac{0,6 \times 0,98^{10}}{0,6 \times 0,98^{10} + 0,4 \times 0,95^{10}} \approx \frac{0,49024}{0,49024 + 0,23949} \approx 0,6718.$$

La probabilité que le lot vienne de A vaut environ 0,672 . Le contrôle sans défaut renforce donc un peu la confiance en la machine A , qui passe de 0,6 à 0,672 .

Point de méthode : dans un problème à plusieurs étapes, on identifie à chaque question le bon système complet de causes, puis on enchaîne probabilités totales et formule de Bayes.

[Revenir aux énoncés des exercices](#)

Pour aller plus loin en L1

- Le cours : [probabilités finies, cours de maths en L1](#)
- Les énoncés : [exercices de maths en L1 sur probabilités finies](#)
- À maîtriser avant : [Entiers naturels, récurrence et dénombrement](#)

- Chapitre précédent : [Géométrie du plan et de l'espace](#)
- Tester vos connaissances : [QCM de maths en L1 par chapitre](#)
- Le sommaire : [tous les chapitres de maths de L1](#) et la [licence de maths de L1 à L3](#)