

Probabilités

Exercice 2 :

Restitution organisée de connaissance

Pour n et p entiers naturels quelconques avec $p \leq n$, on a :

$$\begin{aligned}
 \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p} &= \frac{(n-1)!}{(p-1)!(n-1-(p-1))!} + \frac{(n-1)!}{p!(n-1-p)!} \\
 &= \frac{p(n-1)!}{p!(n-p)!} + \frac{(n-p)(n-1)!}{p!(n-p)!} \\
 &= \frac{(n-1)!(p+n-p)}{p!(n-p)!} \\
 &= \frac{n!}{p!(n-p)!} \\
 &= \binom{n}{p}
 \end{aligned}$$

Partie II

1. (a) Les jetons sont indiscernables au toucher donc on peut légitimement supposer qu'on se trouve dans une situation d'équiprobabilité.
 Il y a $\binom{10}{2}$ manières de choisir 2 jetons parmi 10 et il y a $\binom{7}{2}$ manières de choisir 2 jetons blancs parmi les 7 jetons blancs. Donc

$$p(A) = \frac{\binom{7}{2}}{\binom{10}{2}} = \frac{7}{15}$$

- (b) De même, 6 jetons portent des numéros impairs donc $p(B) = \frac{\binom{6}{2}}{\binom{10}{2}} = \frac{1}{3}$.

- (c) De même, 4 jetons blancs portent des numéros impairs donc $p(A \cap B) = \frac{\binom{4}{2}}{\binom{10}{2}} = \frac{2}{15}$.

Ainsi, $p(A) \times p(B) = \frac{7}{15} \times \frac{1}{3} = \frac{7}{45}$ alors que $p(A \cap B) = \frac{2}{15} = \frac{6}{45}$ donc $p(A) \times p(B) \neq p(A \cap B)$.
 Donc les événements A et B ne sont pas indépendants.

2. (a) La variable aléatoire X peut valoir 0, 1 ou 2.

$$p(X=0) = \frac{\binom{7}{0} \times \binom{3}{2}}{\binom{10}{2}} = \frac{1}{15},$$

$$p(X=1) = \frac{\binom{7}{1} \times \binom{3}{1}}{\binom{10}{2}} = \frac{7}{15},$$

$$p(X=2) = \frac{\binom{7}{2} \times \binom{3}{0}}{\binom{10}{2}} = \frac{7}{15}. \text{ D'où :}$$

k	0	1	2
$p(X=k)$	$\frac{1}{15}$	$\frac{7}{15}$	$\frac{7}{15}$

(b) $E(X) = 0 \times \frac{1}{15} + 1 \times \frac{7}{15} + 2 \times \frac{7}{15} = \frac{7}{5} ; E(X) = \frac{7}{5}$

Exercice 3 :

Commun à tous les candidats

Les justifications n'étaient pas demandées, elles sont données ici à titre purement pédagogique.

1. On tire au hasard une carte d'un jeu de 32 cartes.

Dans un tel jeu, il y a 8 piques et 4 as, dont l'as de pique, le nombre de cartes qui ne sont ni des as ni des piques est donc $32 - (8 + 4 - 1) = 21$. Comme il y a équiprobabilité sur les 32 cartes, la probabilité de n'obtenir ni un as, ni un pique, est donc égale à :

$$\frac{21}{32} \quad \text{Réponse B}$$

2. On tire au hasard et simultanément deux cartes d'un jeu de 32 cartes.

Il y a cette fois-ci équiprobabilité sur les $\binom{32}{2}$ façons de tirer simultanément 2 cartes parmi 32. La probabilité de n'obtenir ni un as, ni un pique, est donc égale à :

$$\frac{\binom{21}{2}}{\binom{32}{2}} = \frac{\frac{21 \times 20}{2 \times 1}}{\frac{32 \times 31}{2 \times 1}} = \frac{105}{248} \quad \text{Réponses A et B}$$

3. La durée d'attente à un guichet de service, exprimée en heure, suit la loi uniforme sur l'intervalle $[0; 1]$.

La probabilité que la durée d'attente d'une personne prise au hasard soit comprise entre 15 min (soit $\frac{1}{4}$ h) et 20 min (soit $\frac{1}{3}$ h) est, d'après le cours :

$$\frac{\frac{1}{3} - \frac{1}{4}}{1 - 0} = \frac{1}{12} \quad \text{Réponse C}$$

4. On considère 10 appareils identiques, de même garantie, fonctionnant indépendamment les uns des autres. La probabilité pour chaque appareil de tomber en panne durant la période de garantie est égale à 0,15. On est donc dans le cadre d'un schéma de Bernoulli. Notons X le nombre d'appareils tombant en panne durant la période de garantie. Alors X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(10; 0,15)$. La probabilité pour qu'exactly 9 appareils soient en parfait état de marche à l'issue de la période de garantie est donc égale à celle qu'il y ait exactement 1 appareil en panne, soit :

$$p(X = 1) = \binom{10}{1} 0,15^1 \times 0,85^9 = 10 \times 0,15 \times 0,85^9 \simeq 0,35 \text{ à } 10^{-2} \text{ près.}$$

Réponses A et D.