

## Polynômes

### Exercice 1 : Degré, coefficient dominant et composition

Dans cet exercice,  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

1. Déterminer le degré et le coefficient dominant de  $A = (X^2+1)^3 - (X^3-1)^2$ .
2. Soit  $P$  un polynôme de degré  $n \geq 1$  et de coefficient dominant  $a$ . Déterminer le degré et le coefficient dominant de  $P(X+1) - P(X)$ .
3. Soient  $P$  et  $Q$  de degrés  $p \geq 1$  et  $q \geq 1$ , de coefficients dominants  $a$  et  $b$ . Montrer que  $\deg(P \circ Q) = pq$  et préciser le coefficient dominant de  $P \circ Q$ .
4. Existe-t-il  $P \in \mathbb{C}[X]$  tel que  $P^2 = X^3 + 1$  ? Tel que  $P \circ P = X^2 + 1$  ?

### Exercice 2 : Deux divisions euclidiennes

1. Effectuer la division euclidienne de  $A = X^5 - X^3 + 2X^2 + 1$  par  $B = X^2 - X + 1$  dans  $\mathbb{R}[X]$ .
2. Effectuer la division euclidienne de  $2X^3 - 3X^2 + 4X - 1$  par  $2X - 1$ . Contrôler le reste par une évaluation.
3. Déterminer le réel  $a$  pour lequel  $X^2 - X + 1$  divise  $X^4 + aX^2 + 1$ .

### Exercice 3 : Restes par évaluation

Soit  $n \in \mathbb{N}$  avec  $n \geq 2$ . Sans effectuer de division posée, déterminer :

1. le reste de la division de  $X^n$  par  $(X-1)(X-2)$  ;
2. le reste de la division de  $X^n$  par  $(X-1)^2$  ;
3. le reste de la division de  $X^{2027}$  par  $X^2 + 1$  ;
4. le reste de la division de  $X^n$  par  $X^3 - X$ .

### Exercice 4 : Racine évidente et factorisation

1. Soit  $P = 2X^3 - 3X^2 - 3X + 2$ . Vérifier que 2 est racine de  $P$ , puis factoriser  $P$  en produit de polynômes de degré 1.
2. Soit  $Q = X^4 - X^3 - 7X^2 + X + 6$ . Chercher deux racines évidentes, puis factoriser complètement  $Q$  dans  $\mathbb{R}[X]$ .
3. En déduire les solutions réelles de l'inéquation  $2x^3 - 3x^2 - 3x + 2 \geq 0$ .

### Exercice 5 : Méthode de Horner et changement de variable

Soit  $P = 2X^4 - 5X^3 + X^2 + 3X - 1$ .

1. Calculer  $P(1)$  et  $P(-1)$  par la méthode de Horner. En déduire le quotient de  $P$  par  $X - 1$ .
2. Combien de multiplications la méthode de Horner utilise-t-elle pour un polynôme de degré  $n$  ? Comparer avec le calcul direct de  $\sum a_k X^k$ , où chaque puissance est calculée séparément.

3. En appliquant plusieurs fois la méthode de Horner en  $-1$ , déterminer les coefficients de  $P(X+1)$ .
4. Retrouver le résultat précédent à l'aide de la formule de Taylor en  $-1$ .

### Exercice 6 : Multiplicité d'une racine par les dérivées

1. Soit  $P = X^5 - 6X^4 + 13X^3 - 14X^2 + 12X - 8$ . Déterminer la multiplicité de la racine  $2$ . Factoriser  $P$  dans  $\mathbb{R}[X]$ , puis dans  $\mathbb{C}[X]$ .
2. Soit  $n \geq 2$  et  $Q = X^{2n} - nX^{n+1} + nX^{n-1} - 1$ . Déterminer la multiplicité de  $1$  comme racine de  $Q$ .

### Exercice 7 : Racine double imposée

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ .

1. Déterminer les réels  $a$  et  $b$  tels que  $(X-1)^2$  divise  $P = aX^{n+1} + bX^n + 1$ .
2. Pour ces valeurs, montrer que  $1$  est exactement racine double de  $P$ .
3. Déterminer le réel  $\lambda$  pour lequel  $X^3 - 3X + \lambda$  admet une racine double, puis factoriser le polynôme obtenu (on trouvera deux valeurs de  $\lambda$ ).

### Exercice 8 : Divisibilité, polynômes associés et racines de l'unité

1. Soient  $A$  et  $B$  deux polynômes unitaires tels que  $A \mid B$  et  $B \mid A$ . Montrer que  $A = B$ .
2. On note  $j = e^{2i\pi/3}$ . Montrer que, pour tous  $n, m \in \mathbb{N}$ , le polynôme  $X^2 + X + 1$  divise

$$X^{3n+1} + X^{3m+2} + 1.$$

3. Soient  $a, b \in \mathbb{N}^*$  avec  $a \mid b$ . Montrer que  $X^a - 1$  divise  $X^b - 1$ .
4. Plus généralement, on écrit  $b = aq + r$  avec  $0 \leq r < a$ . Déterminer le reste de la division de  $X^b - 1$  par  $X^a - 1$ .

### Exercice 9 : Relations coefficients-racines en degré 3

On note  $x_1, x_2, x_3$  les racines complexes, comptées avec multiplicité, de  $P = X^3 - 2X^2 + 3X - 5$ .

1. Donner  $\sigma_1 = x_1 + x_2 + x_3$ ,  $\sigma_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$  et  $\sigma_3 = x_1x_2x_3$ .
2. Calculer  $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ . Les trois racines peuvent-elles être réelles ?
3. Calculer  $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3}$ .
4. Calculer  $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3$ .
5. Calculer  $(1 + x_1)(1 + x_2)(1 + x_3)$ .

### Exercice 10 : Systèmes symétriques et racines liées

1. Résoudre dans  $\mathbb{C}^3$  le système

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ xy + yz + zx = -1 \\ xyz = -2 \end{cases}$$

2. Déterminer les réels  $\lambda$  pour lesquels le polynôme  $X^3 - 7X + \lambda$  possède deux racines dont l'une est le double de l'autre. Donner alors ses trois racines.

### Exercice 11 : Produit de sinus par les racines de l'unité

Soit  $n \geq 2$  et  $\omega = e^{2i\pi/n}$ .

1. Justifier que  $X^n - 1 = \prod_{k=0}^{n-1} (X - \omega^k)$ . En déduire  $\sum_{k=0}^{n-1} \omega^k$  et  $\prod_{k=0}^{n-1} \omega^k$ .
2. Montrer que  $1 + X + \dots + X^{n-1} = \prod_{k=1}^{n-1} (X - \omega^k)$ . En déduire la valeur de  $\prod_{k=1}^{n-1} (1 - \omega^k)$ .
3. Montrer que, pour tout réel  $\theta$ ,  $|1 - e^{i\theta}| = 2 \left| \sin \frac{\theta}{2} \right|$ .
4. En déduire que  $\prod_{k=1}^{n-1} \sin \frac{k\pi}{n} = \frac{n}{2^{n-1}}$ . Vérifier directement la formule pour  $n = 4$ .

### Exercice 12 : Formule de Leibniz et somme des carrés des coefficients binomiaux

1. Soient  $n, k \in \mathbb{N}$ . Calculer la dérivée  $k$ -ième de  $X^n$ .
2. En appliquant la formule de Leibniz à  $X^{2n} = X^n \times X^n$ , montrer que  $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$ .
3. Soit  $P = (X - \alpha)^m Q$  avec  $m \geq 1$  et  $Q(\alpha) \neq 0$ . Calculer  $P'$  et en déduire que  $\alpha$  est racine de multiplicité exactement  $m - 1$  de  $P'$ .
4. Calculer la dérivée  $n$ -ième de  $X^2(1+X)^n$ , puis sa valeur en  $-1$ .

### Exercice 13 : Formule de Taylor polynomiale

1. Écrire  $P = X^3 + X^2 - 4$  comme combinaison des puissances de  $(X+1)$ .
2. En déduire, sans division posée, le reste de la division de  $P$  par  $(X+1)^2$ .
3. Déterminer le polynôme  $Q \in \mathbb{R}_3[X]$  tel que  $Q(1) = 2$ ,  $Q'(1) = -1$ ,  $Q''(1) = 4$  et  $Q'''(1) = 6$ . L'écrire en puissances de  $X$ .

### Exercice 14 : Racines simples de l'exponentielle tronquée

Soit  $n \geq 1$  et  $P_n = \sum_{k=0}^n \frac{X^k}{k!}$ .

1. Calculer  $P_n - P'_n$ .
2. Montrer que toutes les racines complexes de  $P_n$  sont simples.
3. On suppose  $n$  pair. Montrer que  $P_n(x) > 0$  pour tout réel  $x$ . On pourra étudier le minimum de la fonction  $x \rightarrow P_n(x)$  sur  $\mathbb{R}$ .

### Exercice 15 : Montrer qu'un polynôme est nul

1. Soit  $P \in \mathbb{R}[X]$  tel que  $P(x+1) = P(x)$  pour tout réel  $x$ . Montrer que  $P$  est constant.
2. Montrer que la fonction cosinus n'est pas une fonction polynomiale sur  $\mathbb{R}$ .
3. Soit  $P \in \mathbb{R}[X]$  tel que  $P(-x) = P(x)$  pour tout  $x \in [0,1]$ . Montrer que  $P$  est pair, c'est-à-dire que ses coefficients d'indice impair sont nuls.
4. Soit  $P \in \mathbb{R}[X]$  tel que  $P(k) = k^2$  pour tout  $k \in \mathbb{N}$ . Déterminer  $P$ .

### Exercice 16 : Équations polynomiales fonctionnelles

Déterminer tous les polynômes  $P \in \mathbb{C}[X]$  qui vérifient :

1.  $P(2X) = 2P(X)$  ;
2.  $P \circ P = P$  ;
3.  $P(X^2) = (X^2 + 1)P(X)$  .

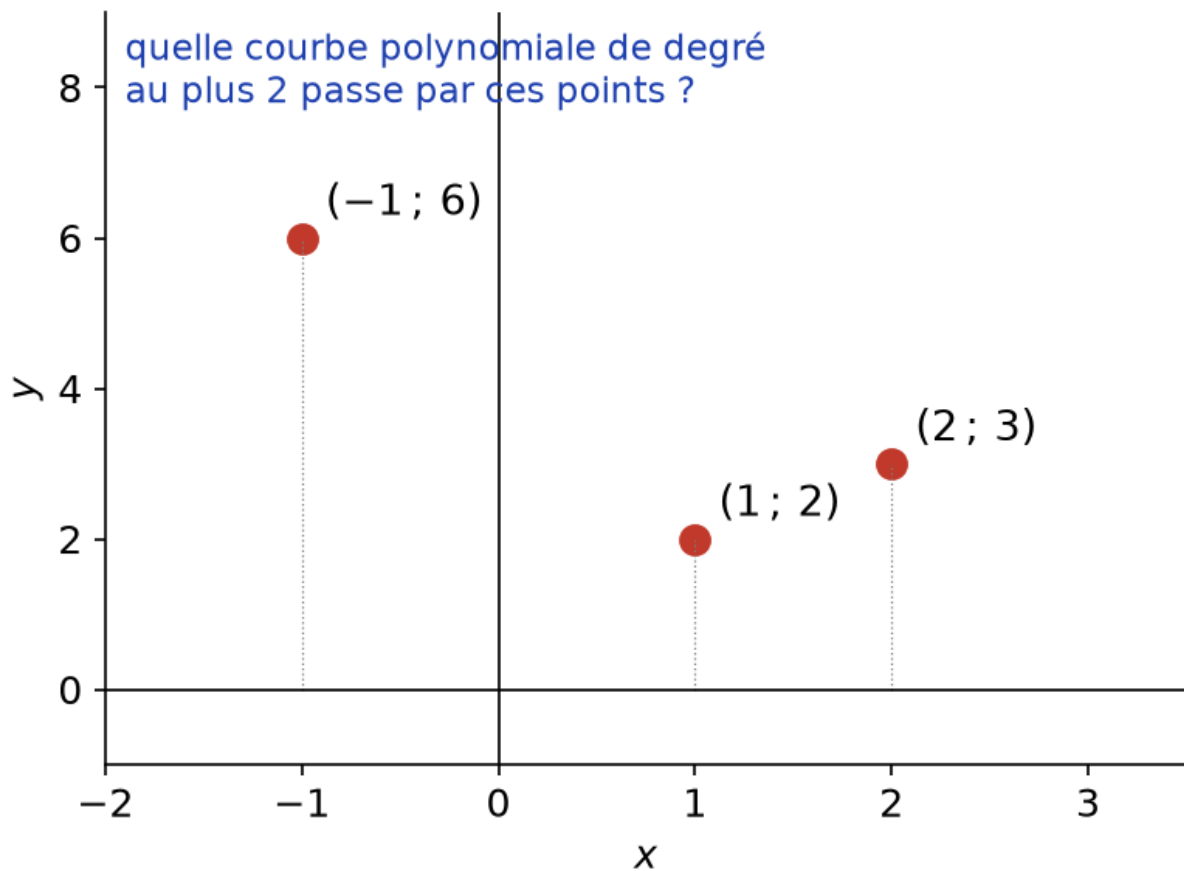
### Exercice 17 : Polynômes de degré au plus $n$ et polynôme réciproque

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Pour  $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k \in \mathbb{K}_n[X]$ , on pose  $P^* = \sum_{k=0}^n a_{n-k} X^k$ . Pour tout  $x \neq 0$ , on a donc  $P^*(x) = x^n P\left(\frac{1}{x}\right)$ .

1. Montrer que  $\mathbb{K}_n[X]$  est stable par dérivation et par  $P \rightarrow P(X+1)$ , mais pas par  $P \rightarrow XP$ .
2. Montrer que  $(P^*)^* = P$  et que  $(\lambda P + Q)^* = \lambda P^* + Q^*$  pour  $P, Q \in \mathbb{K}_n[X]$  et  $\lambda \in \mathbb{K}$ .
3. Soit  $\alpha \neq 0$  une racine de  $P$ . Montrer que  $\frac{1}{\alpha}$  est racine de  $P^*$ .
4. On dit que  $P$  est réciproque si  $P^* = P$ . Montrer que si  $n$  est impair et  $P$  réciproque, alors  $-1$  est racine de  $P$ .
5. Application : factoriser  $2X^3 + 3X^2 + 3X + 2$  dans  $\mathbb{C}[X]$  et vérifier que ses racines non réelles sont de module 1.

### Exercice 18 : Interpolation de Lagrange sur trois points

On cherche une courbe polynomiale passant par les trois points représentés ci-dessous.



1. Écrire les polynômes de Lagrange  $L_0, L_1, L_2$  associés aux points  $-1, 1$  et  $2$ .
2. En déduire l'unique  $P \in \mathbb{R}_2[X]$  tel que  $P(-1) = 6$ ,  $P(1) = 2$  et  $P(2) = 3$ . Le développer.
3. Décrire tous les polynômes  $Q \in \mathbb{R}[X]$  qui prennent les mêmes valeurs en  $-1, 1$  et  $2$ .
4. Déterminer l'unique  $Q \in \mathbb{R}_3[X]$  qui vérifie ces trois conditions et  $Q(0) = 0$ .

### Exercice 19 : Interpolation d'une fonction et propriétés des $L_i$

1. Déterminer le polynôme  $P \in \mathbb{R}_2[X]$  qui coïncide avec la fonction sinus en  $0, \frac{\pi}{2}$  et  $\pi$ .

Comparer  $P\left(\frac{\pi}{6}\right)$  et  $\sin\frac{\pi}{6}$ .

Dans la suite,  $n \geq 1$ , les réels  $x_0, \dots, x_n$  sont deux à deux distincts,  $L_0, \dots, L_n$  sont les polynômes de Lagrange associés et  $W = \prod_{j=0}^n (X - x_j)$ .

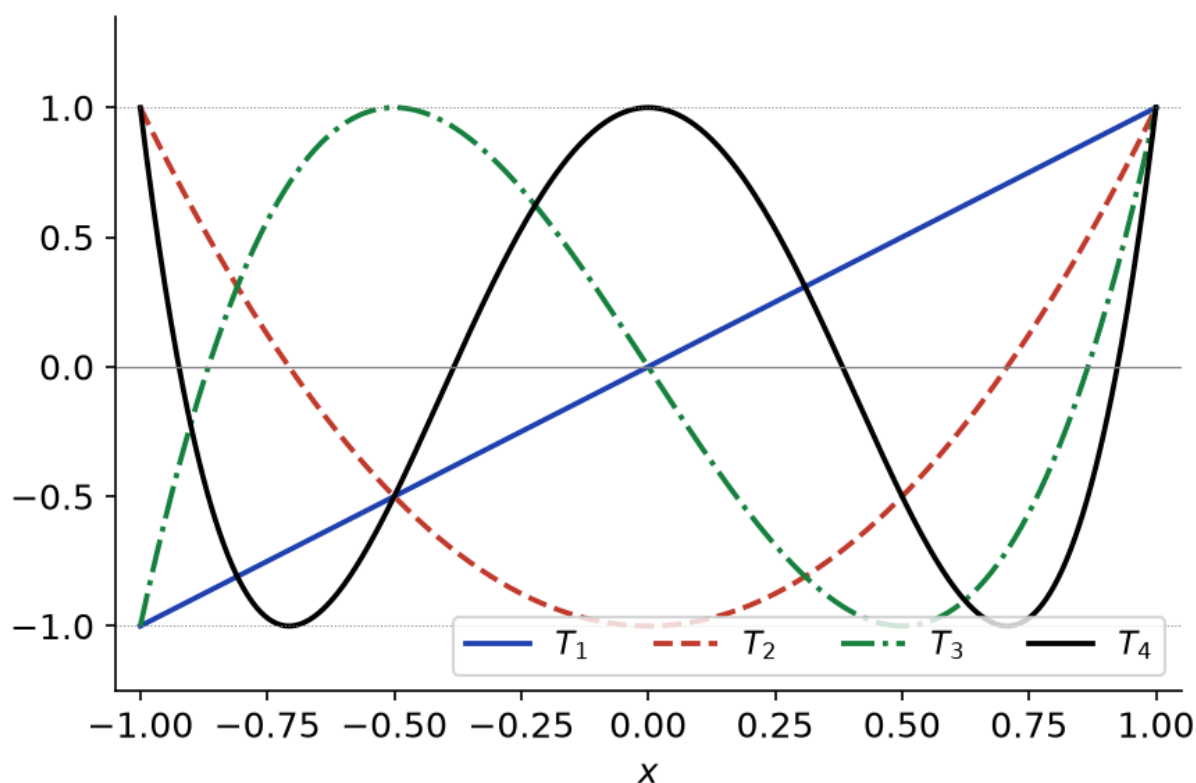
2. Montrer que  $\sum_{i=0}^n L_i = 1$  et que  $\sum_{i=0}^n x_i L_i = X$ .

3. Montrer que  $W'(x_i) = \prod_{j \neq i} (x_i - x_j)$ , puis que  $L_i = \frac{W}{(X - x_i)W'(x_i)}$ .

4. En déduire que  $\sum_{i=0}^n \frac{1}{W'(x_i)} = 0$ .

### Exercice 20 : Polynômes de Tchebychev

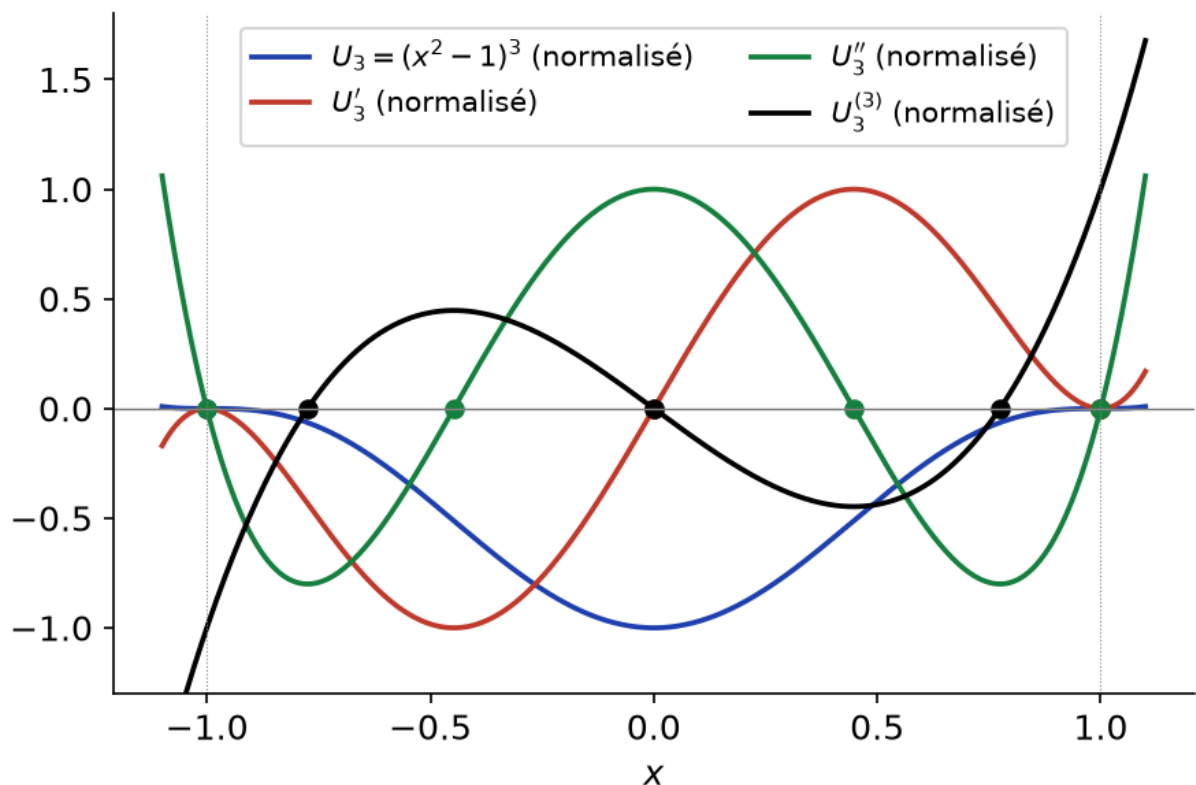
On définit la suite  $(T_n)$  de  $\mathbb{R}[X]$  par  $T_0 = 1$ ,  $T_1 = X$  et  $T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . La figure montre  $T_1$  à  $T_4$  sur  $[-1,1]$ .



1. Calculer  $T_2$ ,  $T_3$  et  $T_4$ .
2. Montrer que, pour  $n \geq 1$ ,  $T_n$  est de degré  $n$  et de coefficient dominant  $2^{n-1}$ .
3. Montrer que  $T_n(\cos t) = \cos(nt)$  pour tout réel  $t$  et tout  $n \in \mathbb{N}$ .
4. Montrer que  $T_n$  est l'unique polynôme vérifiant la propriété de la question 3.
5. Montrer que  $T_n(-X) = (-1)^n T_n$ .
6. Pour  $n \geq 1$ , déterminer les racines de  $T_n$  dans  $[-1, 1]$ . En déduire que  $T_n$  est scindé à racines simples sur  $\mathbb{R}$ , et écrire sa factorisation.
7. Pour  $n = 2p$  pair, en déduire la valeur de  $\prod_{k=0}^{n-1} \cos \frac{(2k+1)\pi}{2n}$ .

### Exercice 21 : Problème : polynômes de Legendre

Pour  $n \geq 1$ , on pose  $U_n = (X^2 - 1)^n$  et  $L_n = U_n^{(n)}$ . La figure illustre le cas  $n = 3$  : chaque dérivée de  $U_3$  a une racine de plus dans  $] -1, 1[$ .



1. Montrer que  $L_n$  est de degré  $n$  et de coefficient dominant  $\frac{(2n)!}{n!}$ .
2. Montrer que  $L_n(-X) = (-1)^n L_n$ .
3. En écrivant  $U_n = (X-1)^n(X+1)^n$ , calculer  $L_n(1)$  et  $L_n(-1)$ .
4. Montrer que, pour  $0 \leq k \leq n-1$ ,  $U_n^{(k)}(1) = U_n^{(k)}(-1) = 0$ .
5. Montrer par récurrence que, pour  $1 \leq k \leq n$ ,  $U_n^{(k)}$  admet au moins  $k$  racines distinctes dans  $] -1, 1[$ .
6. En déduire que  $L_n$  est scindé sur  $\mathbb{R}$ , à racines simples, toutes situées dans  $] -1, 1[$ .
7. Soit  $Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ . Montrer que  $\int_{-1}^1 L_n(x) Q(x) dx = 0$ .

### Exercice 22 : Factorisation de $X^4+1$ et de $X^6-1$

1. Soit  $P \in \mathbb{R}[X]$  et  $z \in \mathbb{C}$  une racine de  $P$  de multiplicité  $m$ . Montrer que  $\bar{z}$  est aussi racine de  $P$ , de même multiplicité.
2. Déterminer les racines complexes de  $X^4 + 1$ . Factoriser  $X^4 + 1$  dans  $\mathbb{C}[X]$ , puis dans  $\mathbb{R}[X]$  en produit de deux polynômes de degré 2.
3. Factoriser  $X^6 - 1$  dans  $\mathbb{C}[X]$ , puis dans  $\mathbb{R}[X]$ .
4. En déduire une factorisation de  $X^4 + X^2 + 1$  dans  $\mathbb{R}[X]$ .

### Exercice 23 : Problème : interpolation d'Hermite

1. Montrer qu'il existe au plus un polynôme  $P \in \mathbb{R}_3[X]$  tel que  $P(0) = 0$ ,  $P'(0) = 1$ ,  $P(1) = 1$  et  $P'(1) = 0$ .
2. Déterminer ce polynôme.

Soient maintenant  $n \geq 1$ , des réels  $x_0, \dots, x_n$  deux à deux distincts, et  $L_0, \dots, L_n$  les polynômes de Lagrange associés. On pose, pour  $0 \leq i \leq n$ ,

$$H_i = (1 - 2L'_i(x_i)(X - x_i))L_i^2 \text{ et } K_i = (X - x_i)L_i^2.$$

3. Calculer  $H_i(x_j)$ ,  $H'_i(x_j)$ ,  $K_i(x_j)$  et  $K'_i(x_j)$  pour tous  $i, j$ .
4. Soient des réels  $y_0, \dots, y_n$  et  $z_0, \dots, z_n$ . Montrer qu'il existe un unique  $P \in \mathbb{R}_{2n+1}[X]$  tel que  $P(x_i) = y_i$  et  $P'(x_i) = z_i$  pour tout  $i$ , et l'exprimer à l'aide des  $H_i$  et  $K_i$ .
5. Retrouver le résultat de la question 2 avec  $n = 1$ ,  $x_0 = 0$  et  $x_1 = 1$ .

## Le corrigé des exercices

---

Chaque exercice est corrigé en détail, question par question, sur la page suivante.



## Pour aller plus loin en maths sup

---

- Le cours : [polynômes, cours de maths sup](#)
- À maîtriser avant : [Nombres complexes et exponentielle complexe](#), [Structures algébriques usuelles : groupes, anneaux, corps](#)
- Chapitre précédent : [Calcul matriciel et systèmes linéaires](#)
- Chapitre suivant : [Arithmétique des polynômes et fractions rationnelles](#)
- Le même thème en L1 : [polynômes, exercices de maths en L1](#)
- Tester vos connaissances : [QCM de maths sup par chapitre](#)
- Le sommaire : [tous les chapitres de maths sup](#) et les [chapitres de maths spé](#)