Polynômes

Exercice 1 : Degré, coefficient dominant et intégrité

Dans cet exercice, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1. Déterminez le degré et le coefficient dominant de $P = (X+1)^5 - (X-1)^5$.
2. Soient $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P^2 = XQ^2$. En comparant les degrés, montrez que $P = Q = 0$.
3. Déterminez tous les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $(P')^2 = 4P$.

Exercice 2 : Divisions euclidiennes

1. Effectuez la division euclidienne de $A = X^4 + 2X^3 - X + 3$ par $B = X^2 + X + 1$.
2. Effectuez la division euclidienne de $A = 2X^5 - X^3 + X + 1$ par $B = X^3 - X + 1$.
3. Soient $A, B \in \mathbb{R}[X]$ avec $B \neq 0$. Justifiez que le quotient et le reste de la division de A par B sont les mêmes, que l'on divise dans $\mathbb{R}[X]$ ou dans $\mathbb{C}[X]$.

Exercice 3 : Racines et factorisation par X − a

1. Vérifiez que 1 est racine de $P = X^4 + X^3 - 7X^2 - X + 6$, puis factorisez entièrement

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

P dans $\mathbb{R}[X]$.

2. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(x+1) = P(x)$ pour tout réel x. Montrez que P est constant. On pourra considérer $P - P(0)$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Existe-t-il un polynôme P de degré au plus n, non nul, qui s'annule en $0, 1, \ldots, n$? Et un polynôme de degré $n+1$? Justifiez.

Exercice 4 : Multiplicité d'une racine

On considère $P = X^5 - 5X^3 + 5X^2 - 1$.

1. Montrez que 1 est racine de P et déterminez sa multiplicité.

2. Factorisez P dans $\mathbb{R}[X]$.

3. Soit $n \geq 1$. Déterminez les réels a et b tels que $(X-1)^2$ divise $aX^{n+1} + bX^n + 1$.

Exercice 5 : Reste d'une division par évaluation

Soit $n \geq 2$ un entier.

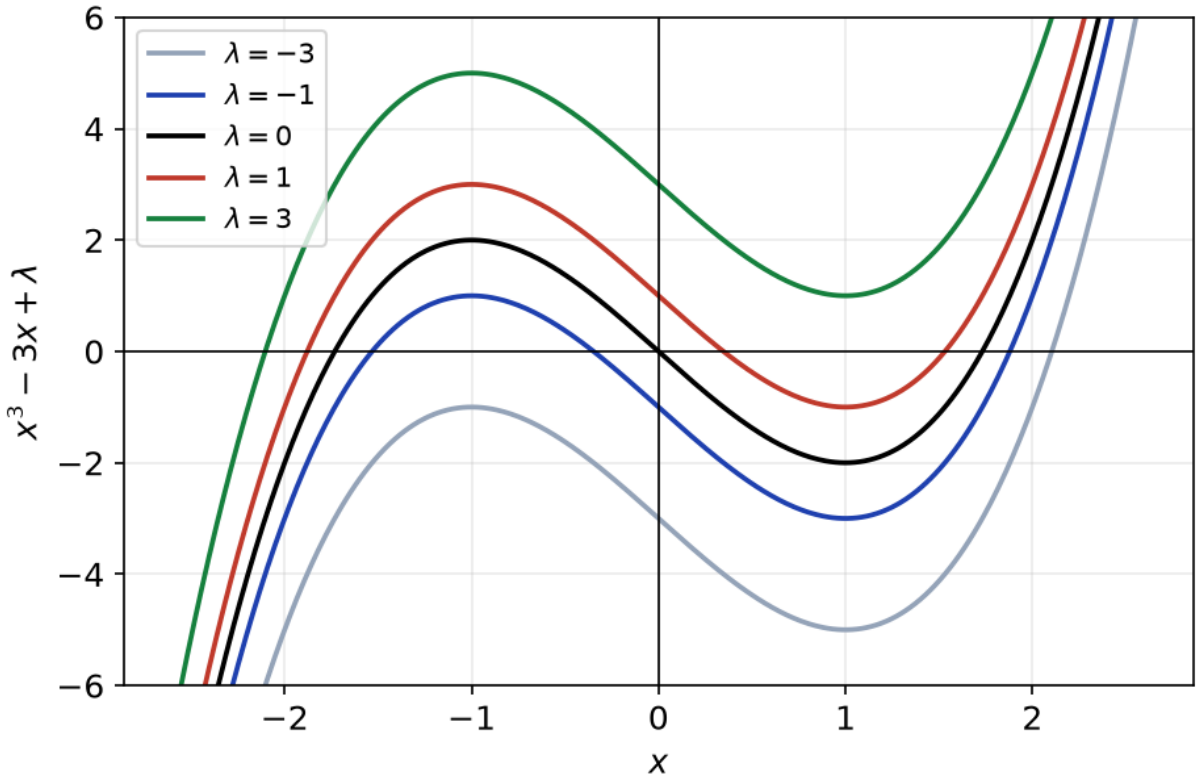
1. Déterminez le reste de la division de X^n par $(X-1)(X-2)$.

2. Déterminez le reste de la division de X^n par $(X-1)^2$.

3. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Déterminez le reste de la division de $(\cos\theta + X\sin\theta)^n$ par X^2+1.

Exercice 6 : Racine double et paramètre

Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, on pose $P_\lambda = X^3 - 3X + \lambda$. La figure ci-dessous représente quelques fonctions $x \to P_\lambda(x)$.



1. Déterminez les valeurs de λ pour lesquelles P_λ possède une racine multiple.
2. Pour chacune de ces valeurs, factorisez P_λ.
3. Sans calcul supplémentaire, déduisez-en le nombre de racines réelles distinctes de P_λ selon λ.

Exercice 7 : Polynômes à racines simples

Pour $n \geq 1$, on pose $P_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{X^k}{k!}$.

1. Calculez $P_n - P_n'$.

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

2. Montrez que P_n n'a que des racines simples dans $\mathbb{C}$.

3. Soit $a \in \mathbb{C}$ non nul. Montrez de même que $X^n - a$ n'a que des racines simples.

Exercice 8 : Factorisations dans C[X] et R[X]

1. Factorisez $X^4 + 1$ en produit d'irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$, puis dans $\mathbb{R}[X]$.

2. Factorisez $X^6 - 1$ dans $\mathbb{C}[X]$, puis dans $\mathbb{R}[X]$.

3. Déduisez de la question 2 la factorisation de $X^4 + X^2 + 1$ dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 9 : Racines conjuguées d'un polynôme réel

1. Vérifiez que $1 + i$ est racine de $P = X^4 - 2X^3 + 3X^2 - 2X + 2$.

2. Déduisez-en la factorisation de P dans $\mathbb{R}[X]$ puis dans $\mathbb{C}[X]$.

3. Déterminez le polynôme réel unitaire de plus petit degré qui admet i comme racine double et 1 comme racine simple.

Exercice 10 : Relations entre coefficients et racines

On note x_1, x_2, x_3 les racines complexes de $P = X^3 - 3X^2 + X + 2$.

1. Sans calculer les racines, déterminez $x_1 + x_2 + x_3$, $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$ et $x_1x_2x_3$.

2. Déduisez-en $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$, $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3}$ et $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3$.

3. Vérifiez que 2 est racine de P, calculez les trois racines et contrôlez les résultats précédents.

Exercice 11 : Systèmes symétriques et racines en progression

1. Résolvez dans $\mathbb{C}^3$ le système $x+y+z=2$, $xy+yz+zx=-1$, $xyz=-2$.
2. On admet que les racines de $P=X^3-9X^2+23X-15$ sont en progression arithmétique. Déterminez-les.
3. Soient a,b,c les racines de X^3+pX+q, avec $q\neq 0$. Calculez $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}$ en fonction de p et q.

Exercice 12 : PGCD et relation de Bézout

On pose $A=X^4-1$ et $B=X^3+2X^2+2X+1$.

1. Calculez $A\wedge B$ par l'algorithme d'Euclide.
2. Déterminez deux polynômes U et V tels que $AU+BV=A\wedge B$.
3. Retrouvez le PGCD en factorisant A et B dans $\mathbb{C}[X]$.

Exercice 13 : PGCD de X^n − 1 et X^m − 1

Soient n et m deux entiers naturels non nuls. On note $d=n\wedge m$ leur PGCD dans $\mathbb{Z}$.

1. Montrez que si m divise k, alors X^m-1 divise X^k-1.
2. On écrit $n=qm+r$ avec $0\leq r<m$. Montrez que le reste de la division de X^n-1 par X^m-1 est X^r-1.

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

3. Déduisez-en que $(X^n - 1) \wedge (X^m - 1) = X^d - 1$.

4. Application : calculez $(X^{12} - 1) \wedge (X^{18} - 1)$.

Exercice 14 : Irréductibles et analogie avec les entiers

1. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ de degré 2 ou 3. Montrez que P est irréductible dans $\mathbb{K}[X]$ si et seulement s'il n'a pas de racine dans $\mathbb{K}$.

2. Montrez que $X^3 - 2$ est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$. On admettra qu'une racine rationnelle $\frac{p}{q}$ irréductible d'un polynôme unitaire à coefficients entiers vérifie $q = 1$ et p divise le coefficient constant.

3. Montrez que $X^4 + 4$ n'a aucune racine réelle, mais qu'il n'est pas irréductible dans $\mathbb{R}[X]$ ni même dans $\mathbb{Q}[X]$.

4. Soit P irréductible et A quelconque dans $\mathbb{K}[X]$. Montrez que soit P divise A, soit $P \wedge A = 1$.

Exercice 15 : Partie entière et pôles d'une fraction rationnelle

On considère $F = \frac{X^3 + 2X^2}{X^2 - 1}$.

1. Déterminez les pôles de F et leur multiplicité, ainsi que ses racines.

2. Calculez la partie entière de F.

3. Décomposez F en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$.

4. Interprétez la partie entière pour la courbe de $x \to F(x)$.

Exercice 16 : Pôles simples dans C(X)

On note $j = e^{2i\pi/3}$.

1. Décomposez $\frac{1}{X^3-1}$ en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$.
2. Déduisez-en sa décomposition dans $\mathbb{R}(X)$.
3. Plus généralement, pour $n \geq 1$ et $\omega_k = e^{2ik\pi/n}$, montrez que $\frac{1}{X^n-1} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\omega_k}{X-\omega_k}$.

Exercice 17 : Pôle double et dérivées successives

On considère $F = \frac{2X+1}{X(X-1)^2}$.

1. Écrivez la forme de la décomposition en éléments simples de F dans $\mathbb{R}(X)$, puis calculez ses coefficients.
2. Vérifiez le résultat en un point bien choisi.
3. Pour $n \in \mathbb{N}$, calculez la dérivée n-ième de la fonction $f : x \to F(x)$ sur $]1, +\infty[$.

Exercice 18 : Décomposition dans R(X)

1. Décomposez $F = \frac{X}{(X-1)(X^2+1)}$ en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$.
2. Décomposez la même fraction dans $\mathbb{C}(X)$ et vérifiez la cohérence avec la question 1.

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

3. Décomposez $G = \dfrac{X^4}{X^2+X+1}$ dans $\mathbb{R}(X)$.

Exercice 19 : Somme télescopique

1. Décomposez $\dfrac{1}{X(X+1)(X+2)}$ en éléments simples.
2. Déduisez-en, pour $n \geq 1$, une expression simple de $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$.
3. Déterminez la limite de S_n quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 20 : Dérivée logarithmique

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ non constant, de racines distinctes $z_1, \dots, z_r$ de multiplicités $m_1, \dots, m_r$.

1. Montrez que $\dfrac{P'}{P} = \sum_{k=1}^{r} \dfrac{m_k}{X - z_k}$.
2. On suppose $P \in \mathbb{R}[X]$ scindé sur $\mathbb{R}$ à racines simples. Montrez que $(P')^2 - PP'' > 0$ sur $\mathbb{R}$.
3. Soit $n \geq 2$ et $\omega = e^{2i\pi/n}$. Calculez $\sum_{k=1}^{n-1} \dfrac{1}{1-\omega^k}$.

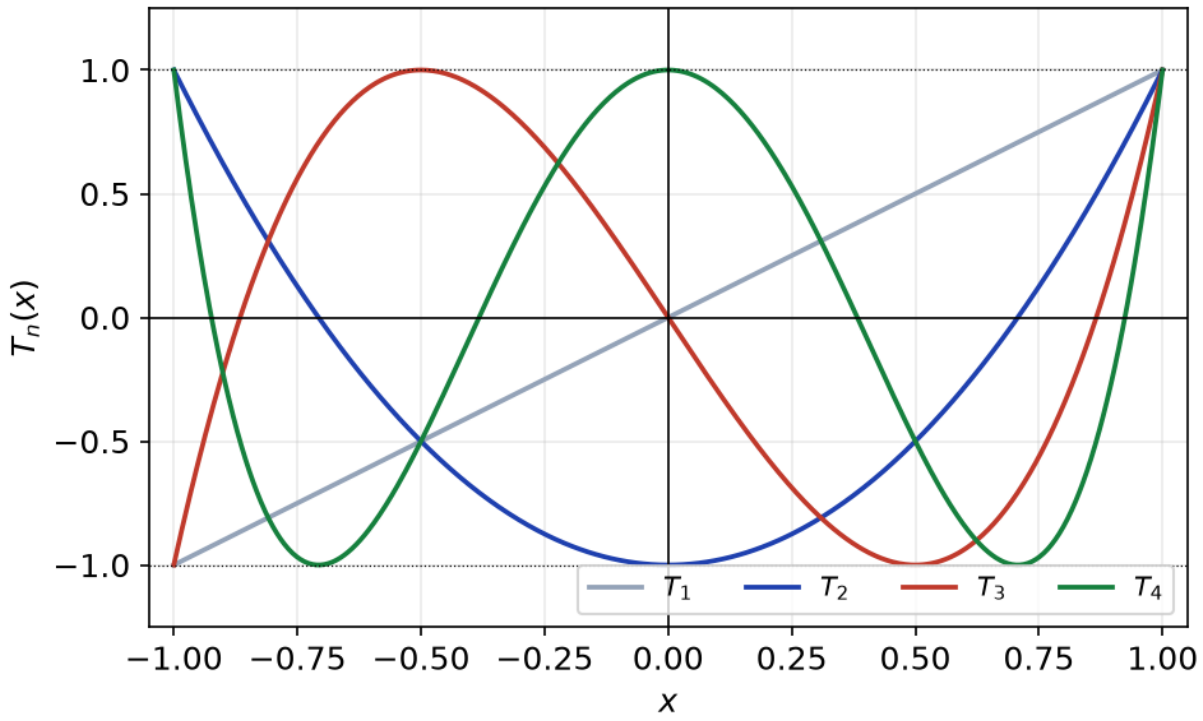
Exercice 21 : Factorisation de X^n − 1 et produit de sinus

Soit $n \geq 2$ et $\omega_k = e^{2ik\pi/n}$ pour $0 \leq k \leq n-1$.

1. Écrivez la factorisation de $X^n - 1$ dans $\mathbb{C}[X]$.
2. Donnez sa factorisation en irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$, en distinguant n pair et n impair.
3. Montrez que $\prod_{k=1}^{n-1} (1 - \omega_k) = n$.
4. Déduisez-en que $\prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \frac{n}{2^{n-1}}$.

Exercice 22 : Problème : polynômes de Tchebychev

On définit une suite de polynômes par $T_0 = 1$, $T_1 = X$ et $T_{n+1} = 2XT_n - T_{n-1}$ pour $n \geq 1$. La figure ci-dessous représente T_1, T_2, T_3 et T_4 sur $[-1, 1]$.



1. Calculez T_2, T_3 et T_4.

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

2. Montrez que, pour $n \geq 1$, T_n est de degré n et de coefficient dominant 2^{n-1}. Montrez aussi que T_n a la parité de n.

3. Montrez que $T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta)$ pour tout réel θ et tout $n \in \mathbb{N}$.

4. Pour $n \geq 1$, déterminez n racines distinctes de T_n dans $[-1, 1]$. Déduisez-en la factorisation de T_n dans $\mathbb{R}[X]$ et la simplicité de ses racines.

5. À l'aide des relations entre coefficients et racines, calculez $\sum_{k=0}^{n-1} \cos\frac{(2k+1)\pi}{2n}$ pour $n \geq 2$.

6. Pour n pair, calculez $\prod_{k=0}^{n-1} \cos\frac{(2k+1)\pi}{2n}$.

Le corrigé des exercices

Chaque exercice est corrigé en détail, question par question, sur la page suivante.

Pour aller plus loin en L1

- Le cours : polynômes, cours de maths en L1
- À maîtriser avant : Nombres complexes et trigonométrie, Arithmétique des entiers
- Chapitre précédent : Arithmétique des entiers
- Chapitre suivant : Systèmes linéaires et calcul matriciel
- Tester vos connaissances : QCM de maths en L1 par chapitre

- Le sommaire : tous les chapitres de maths de L1 et la licence de maths de L1 à L3

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.