

Polynômes d'endomorphismes

Exercice 1 : Polynômes minimaux de matrices simples

Déterminer le polynôme minimal de chacune des matrices suivantes, puis préciser si elle est diagonalisable.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer $(A - 2I_3)(A - 3I_3)$ et $(A - 2I_3)^2(A - 3I_3)$. En déduire π_A .
2. Calculer J^2 en fonction de J . En déduire π_J et $\dim \mathbb{R}[J]$.
3. Déterminer π_C .

Exercice 2 : Sous-algèbre engendrée par un projecteur

Soit p un projecteur d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E de dimension finie, avec $p \neq 0$ et $p \neq \text{id}_E$.

1. Montrer que $\pi_p = X^2 - X$. En déduire une base de $\mathbb{K}[p]$.
2. Soient $a, b \in \mathbb{K}$. Montrer que $a \text{id}_E + b p$ est inversible si et seulement si $a \neq 0$ et $a + b \neq 0$.
3. Dans ce cas, déterminer son inverse sous la forme $c \text{id}_E + d p$.

Exercice 3 : Un polynôme annulateur de degré 2

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 - 3A + 2I_n = 0$, avec $A \neq I_n$ et $A \neq 2I_n$.

1. Déterminer π_A et $\text{Sp}(A)$.
2. Montrer que A est diagonalisable.
3. Montrer que A est inversible et exprimer A^{-1} comme polynôme en A .
4. Pour $k \in \mathbb{N}$, exprimer A^k comme combinaison linéaire de A et I_n .

Exercice 4 : Inverse par Cayley-Hamilton

On considère les matrices

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A = I_3 + P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer P^2 et P^3 . En déduire $(A - I_3)^3$.
2. Montrer que $\chi_A = X^3 - 3X^2 + 3X - 2$ et vérifier le théorème de Cayley-Hamilton.
3. En déduire que A est inversible et calculer A^{-1} .

Exercice 5 : Cayley-Hamilton en dimension 2

1. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$. Vérifier par le calcul que $A^2 - \text{tr}(A)A + \det(A)I_2 = 0$.
2. Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ nilpotente. Montrer que $A^2 = 0$.
3. Déterminer toutes les matrices $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $A^2 = -I_2$, en fonction de leur trace et de leur déterminant.

Exercice 6 : Puissances par division euclidienne

Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer χ_A . La matrice A est-elle diagonalisable ?
2. Pour $n \in \mathbb{N}$, déterminer le reste de la division euclidienne de X^n par χ_A . En déduire A^n .
3. On définit deux suites par $u_0 = 1$, $v_0 = 0$ et, pour tout n , $u_{n+1} = 3u_n - v_n$, $v_{n+1} = u_n + v_n$. Exprimer u_n et v_n en fonction de n .

Exercice 7 : Matrices nilpotentes

Soit $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ nilpotente, d'indice p : $N^p = 0$ et $N^{p-1} \neq 0$.

1. Déterminer π_N . En déduire que $p \leq n$, puis que $N^n = 0$.
2. Montrer que $\text{Sp}(N) = \{0\}$, puis que $\chi_N = X^n$ et $\text{tr}(N) = 0$.
3. Montrer qu'une matrice nilpotente et diagonalisable est nulle.
4. Montrer que $I_n - N$ est inversible et que son inverse est un polynôme en N que l'on précisera.

Exercice 8 : Matrice compagnon

Soient $n \geq 2$ et $Q = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_1X + a_0 \in \mathbb{K}[X]$. On note C la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont la colonne k est e_{k+1} pour $1 \leq k \leq n-1$, et dont la dernière colonne est $(-a_0, -a_1, \dots, -a_{n-1})$, où $(e_1, \dots, e_n)$ est la base canonique de $\mathbb{K}^n$.

1. Montrer que $C^k e_1 = e_{k+1}$ pour $0 \leq k \leq n-1$. En déduire que $\deg \pi_C \geq n$.
2. Montrer que $Q(C)e_1 = 0$, puis que $Q(C) = 0$.
3. En déduire que $\pi_C = \chi_C = Q$.
4. Construire une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ de polynôme minimal $X^3 - 2X + 1$. Est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$?

Exercice 9 : Polynôme minimal et spectre

Soit $A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ de polynôme minimal $\pi_A = (X - 1)^2 (X + 2)$.

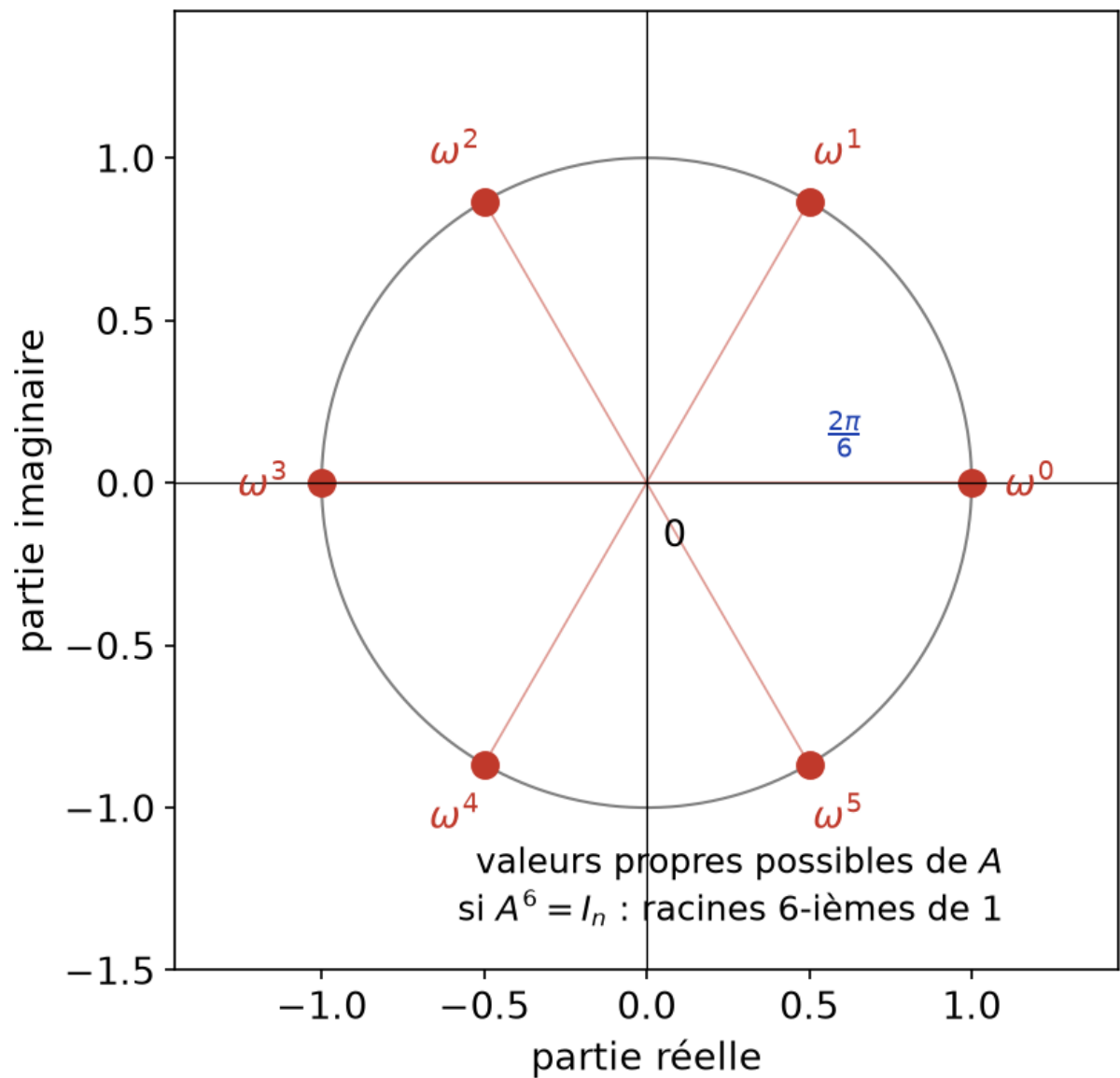
1. Déterminer $\text{Sp}(A)$. La matrice A est-elle diagonalisable ?
2. Déterminer les polynômes caractéristiques possibles de A , et la trace correspondante.
3. Développer π_A . En déduire que A est inversible et exprimer A^{-1} comme polynôme en A .
4. Donner une matrice A diagonale par blocs qui réalise chacun des cas trouvés à la question 2.

Exercice 10 : Inversibilité et polynôme minimal

1. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, avec E de dimension finie. Montrer que u est inversible si et seulement si $\pi_u(0) \neq 0$, et que dans ce cas $u^{-1} \in \mathbb{K}[u]$.
2. Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. En écrivant $M = J - I_3$, où J a tous ses coefficients égaux à 1, déterminer π_M .
3. En déduire que M est inversible et calculer M^{-1} .

Exercice 11 : Racines de l'unité et diagonalisabilité

Soit $p \geq 2$ un entier. La figure ci-dessous représente les racines 6-ièmes de l'unité dans le plan complexe.



1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $A^p = I_n$. Montrer que A est diagonalisable et que ses valeurs propres sont des racines p -ièmes de l'unité.
2. Soit $R = \begin{pmatrix} -1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix}$. Vérifier que $R^3 = I_2$. La matrice R est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$? dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$?
3. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 = A$. Montrer que A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 12 : Un endomorphisme annulé par $X^2(X-1)$

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2(A - I_n) = 0$.

1. Montrer que A est trigonalisable et que $\text{Sp}(A) \subset \{0, 1\}$.
2. Montrer que $\mathbb{R}^n = \ker A^2 \oplus \ker(A - I_n)$.
3. Montrer que A est diagonalisable si et seulement si $A^2 = A$.
4. Montrer que $\text{tr}(A) = \dim \ker(A - I_n)$.
5. Vérifier que $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ vérifie $B^2(B - I_3) = 0$ sans être diagonalisable.

Exercice 13 : Lemme des noyaux et projecteurs

Soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel E de dimension finie tel que $u^3 = u$.

1. Montrer que $E = \ker u \oplus \ker(u - \text{id}_E) \oplus \ker(u + \text{id}_E)$.
2. Exprimer les trois projecteurs p_0 , p_1 , p_{-1} associés à cette décomposition comme polynômes en u .
3. Pour $k \geq 1$, simplifier u^{2k} et u^{2k+1} .
4. Montrer que $\text{rg}(u) = \text{tr}(u^2)$.

Exercice 14 : Un endomorphisme annulé par $(X-1)(X^2+1)$

Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension n , et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u^3 - u^2 + u - \text{id}_E = 0$.

1. Factoriser $X^3 - X^2 + X - 1$ dans $\mathbb{R}[X]$. En déduire $E = \ker(u - \text{id}_E) \oplus \ker(u^2 + \text{id}_E)$.
2. Montrer que u est inversible et exprimer u^{-1} comme polynôme en u .
3. Soit $F = \ker(u^2 + \text{id}_E)$. Montrer que F est stable par u et que $\dim F$ est paire.
4. En déduire que si n est impair, alors 1 est valeur propre de u .

Exercice 15 : Polynôme minimal d'une matrice diagonale par blocs

Soient $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_q(\mathbb{K})$ et $M = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$.

1. Montrer que, pour tout polynôme P , $P(M) = \begin{pmatrix} P(A) & 0 \\ 0 & P(B) \end{pmatrix}$.
2. En déduire que π_M est le ppcm de π_A et π_B .
3. Montrer que M est diagonalisable si et seulement si A et B le sont.
4. Application : déterminer π_M pour $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Exercice 16 : Sous-espaces caractéristiques d'une matrice 3x3

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

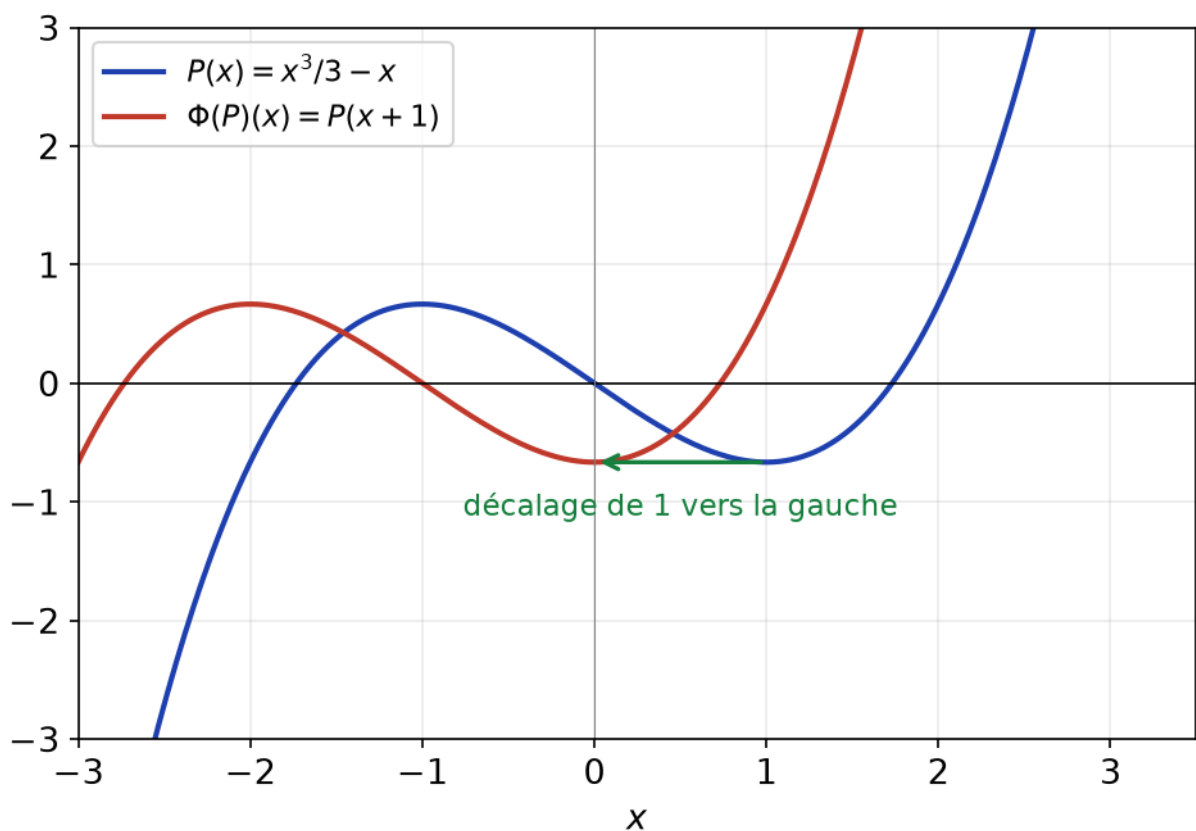
1. Calculer χ_A . Déterminer les sous-espaces propres. La matrice A est-elle diagonalisable ? Donner π_A .
2. Déterminer les sous-espaces caractéristiques $F_1 = \ker(A - I_3)^2$ et

$$F_2 = \ker(A - 2I_3).$$

3. Trouver une base (f_1, f_2, f_3) adaptée à $\mathbb{R}^3 = F_1 \oplus F_2$, avec f_1 vecteur propre et $(A - I_3)f_2 = f_1$. Écrire la matrice T de l'endomorphisme canoniquement associé à A dans cette base.
4. En déduire A^n pour $n \in \mathbb{N}$.
5. Exprimer le projecteur sur F_2 parallèlement à F_1 comme polynôme en A .

Exercice 17 : L'endomorphisme de translation sur $\mathbb{R}_n[X]$

Soit $n \geq 1$. On définit Φ sur $\mathbb{R}_n[X]$ par $\Phi(P) = P(X + 1)$, et on pose $\Delta = \Phi - \text{id}$. La figure ci-dessous représente un polynôme et son image par Φ .



1. Montrer que Φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$, et que Δ fait baisser le degré de 1 pour

tout polynôme non constant.

2. En déduire que $\Delta^{n+1} = 0$ et calculer $\Delta^n(X^n)$.
3. Déterminer π_Φ et χ_Φ . L'endomorphisme Φ est-il diagonalisable ?
4. Exprimer Φ^{-1} comme polynôme en Δ .

Exercice 18 : Endomorphisme induit et codiagonalisation

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie.

1. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ diagonalisable et F un sous-espace stable par u . Montrer que l'endomorphisme induit u_F est diagonalisable.
2. Soient $u, v \in \mathcal{L}(E)$ diagonalisables tels que $u \circ v = v \circ u$. Montrer que les sous-espaces propres de u sont stables par v .
3. En déduire qu'il existe une base de E formée de vecteurs propres communs à u et à v .
4. Montrer que $u + v$ et $u \circ v$ sont alors diagonalisables.

Exercice 19 : Commutant d'une matrice à valeurs propres distinctes

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ possédant n valeurs propres distinctes $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. On note

$$\mathcal{C}(A) = \left\{ B \in {}_n(\mathbb{K}\mathbb{K}), \begin{matrix} AB = BA \end{matrix} \right\}.$$

1. Montrer que $\pi_A = \chi_A$ et que $\dim \mathbb{K}[A] = n$.
2. Soit $B \in \mathcal{C}(A)$. Montrer que tout vecteur propre de A est vecteur propre de B .
3. En déduire que $\mathcal{C}(A) = \mathbb{K}[A]$, à l'aide des polynômes d'interpolation de Lagrange.

4. Donner la dimension de $\mathcal{C}(A)$.

Exercice 20 : Racines carrées d'une matrice

Soit $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -6 & 7 \end{pmatrix}$. On cherche les matrices $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $B^2 = A$.

1. Déterminer les valeurs propres de A et une base de vecteurs propres.
2. Soit B telle que $B^2 = A$. Montrer que B commute avec A , puis que $B \in \mathbb{R}[A]$.
3. Écrire $B = aA + bI_2$ et déterminer les quatre solutions.
4. Montrer que $C = \begin{pmatrix} -6 & 5 \\ -10 & 9 \end{pmatrix}$ n'a aucune racine carrée dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Exercice 21 : Problème : l'endomorphisme $M \mapsto M + \text{tr}(M)I_n$

Soit $n \geq 2$. On définit u sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par $u(M) = M + \text{tr}(M)I_n$, et on pose $v = u - \text{id}$.

1. Montrer que u est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Calculer u^2 en fonction de u .
2. En déduire un polynôme annulateur de u , puis π_u .
3. Montrer que u est diagonalisable. Déterminer ses sous-espaces propres et leurs dimensions.
4. Exprimer les projecteurs P et Q sur ces sous-espaces propres comme polynômes en u . Décrire $p(M)$ et $q(M)$.
5. Pour $k \in \mathbb{N}$, calculer $u^k(M)$. Calculer $\text{tr}(u)$ et $\det(u)$.
6. Montrer que u est inversible, calculer u^{-1} et résoudre l'équation $M + \text{tr}(M)I_n = B$ d'inconnue M .

7. Plus généralement, pour $\alpha \in \mathbb{R}$, soit $u_\alpha(M) = M + \alpha \operatorname{tr}(M) I_n$. Pour quelles valeurs de α l'endomorphisme u_α est-il inversible ? Que dire de u_α pour $\alpha = -1/n$?

Le corrigé des exercices

Chaque exercice est corrigé en détail, question par question, sur la page suivante.



Pour aller plus loin en maths spé

- Le cours : [polynômes d'endomorphismes, cours de maths spé](#)
- À maîtriser avant : [Diagonalisation, trigonalisation et nilpotence](#), [Anneaux, idéaux, \$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\$ et algèbres](#)
- Chapitre précédent : [Diagonalisation, trigonalisation et nilpotence](#)
- Chapitre suivant : [Normes, espaces vectoriels normés et suites](#)
- Tester vos connaissances : [QCM de maths spé par chapitre](#)
- Le sommaire : [tous les chapitres de maths spé](#) et les [chapitres de maths sup](#)