

Polynômes d'endomorphismes

I. Polynômes d'endomorphismes : le morphisme d'algèbres

Dans tout le chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et E est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. Sauf mention contraire, E est de dimension finie $n \geq 1$. On fixe un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$. L'idée directrice est simple : on remplace l'indéterminée X par u , et le produit par la composition.

1. Définition et règles de calcul

Définition :

Pour $P = \sum_{k=0}^d a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$, on pose $P(u) = \sum_{k=0}^d a_k u^k$, avec la convention $u^0 = \text{id}_E$. De même, pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on pose $P(A) = \sum_{k=0}^d a_k A^k$ avec $A^0 = I_n$.

Ainsi, pour $P = X^2 - 3X + 2$, on obtient $P(u) = u^2 - 3u + 2 \text{id}_E$. Attention à ne jamais oublier l'identité devant le terme constant.

Théorème :

L'application $\varphi_u : \mathbb{K}[X] \rightarrow \mathcal{L}(E)$, $P \mapsto P(u)$, est un morphisme d'algèbres. Autrement dit, pour tous $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{K}$:

$$(\lambda P + Q)(u) = \lambda P(u) + Q(u), (PQ)(u) = P(u) \circ Q(u), 1(u) = \text{id}_E.$$

Démonstration :

La linéarité est immédiate. Pour le produit, il suffit par bilinéarité de traiter $P = X^i$ et $Q = X^j$. Or $(X^{i+j})(u) = u^{i+j} = u^i \circ u^j$. Le résultat s'étend donc à tous les polynômes.

Une conséquence est très utile : deux polynômes en u commutent. En effet, $P(u) \circ Q(u) = (PQ)(u) = (QP)(u) = Q(u) \circ P(u)$. De plus, si v commute avec u , alors v commute avec tout $P(u)$. Par conséquent, $\ker P(u)$ et $\text{Im } P(u)$ sont stables par u .

Remarque :

Si A est la matrice de u dans une base $\mathcal{B}$, alors $P(A)$ est la matrice de $P(u)$ dans $\mathcal{B}$. Par ailleurs, si $B = Q^{-1} A Q$, alors $P(B) = Q^{-1} P(A) Q$. Tout ce qui suit vaut donc aussi pour les matrices.

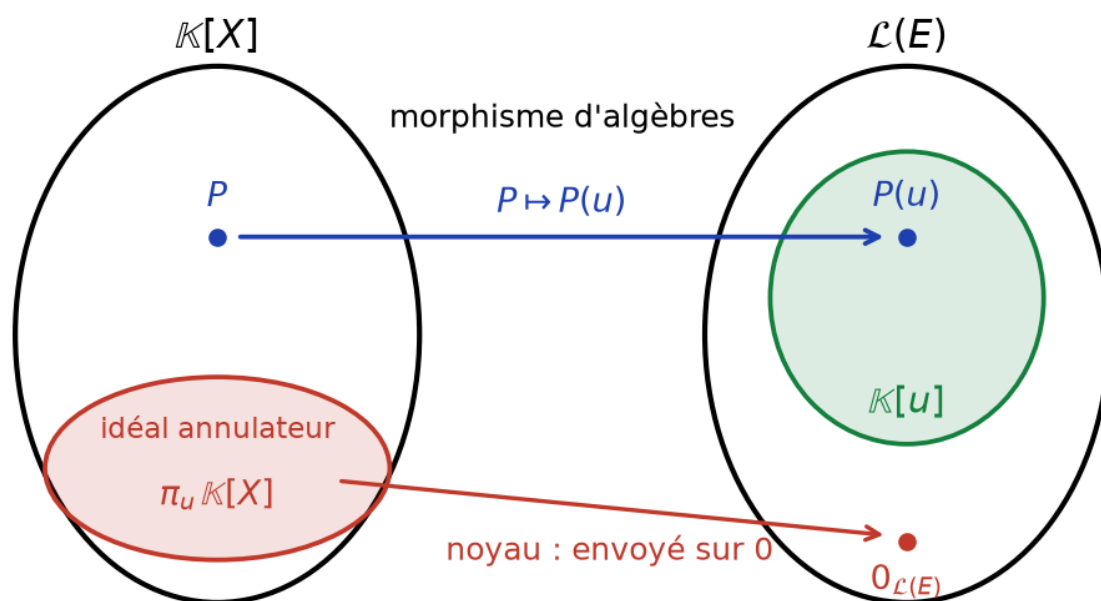
2. Idéal annulateur et sous-algèbre $\mathbb{K}[u]$

Le noyau d'un morphisme d'anneaux est un idéal. D'autre part, l'image d'un morphisme d'algèbres est une sous-algèbre. On obtient ainsi deux objets fondamentaux, résumés par la figure ci-dessous.

Définition :

Un polynôme P est dit **annulateur** de u si $P(u) = 0$. L'ensemble $\ker \varphi_u$ des polynômes annulateurs est un idéal de $\mathbb{K}[X]$, appelé **idéal annulateur** de u . L'image

$$\mathbb{K}[u] = \left\{ P(u), P \in \mathbb{K}[X] \right\} \text{ est une sous-algèbre commutative de } \mathcal{L}(E).$$



Exemple :

Soit p un projecteur de E . Comme $p^2 = p$, le polynôme $X^2 - X$ annule p . Ensuite, pour tout P , la division euclidienne $P = (X^2 - X)Q + aX + b$ donne $P(p) = ap + b \text{id}_E$. Ainsi, $K[p] = \text{Vect}(\text{id}_E, p)$.

II. Polynôme minimal d'un endomorphisme

1. Existence et définition

En dimension finie, l'espace $\mathcal{L}(E)$ est de dimension n^2 . La famille $(\text{id}_E, u, \dots, u^{n^2})$ compte $n^2 + 1$ éléments ; elle est donc liée. Par conséquent, u possède un polynôme annulateur non nul. L'idéal annulateur n'est donc pas réduit à $\{0\}$.

Définition :

Tout idéal de $\mathbb{K}[X]$ est principal. Il existe donc un unique polynôme unitaire π_u tel que l'idéal annulateur de u soit $\pi_u \mathbb{K}[X]$. On l'appelle **polynôme minimal** de u . Pour une matrice A , on note de même π_A .

Concrètement, π_u est le polynôme annulateur unitaire de plus petit degré. De plus, un polynôme P annule u si et seulement si π_u divise P . Enfin, deux matrices semblables ont le même polynôme minimal.

Exemple :

Pour une homothétie λid_E , on a $\pi = X - \lambda$. Pour un projecteur P différent de 0 et de id_E , aucun polynôme de degré 1 ne l'annule, donc $\pi_P = X^2 - X$. Pour $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, on trouve $N \neq 0$ et $N^2 = 0$, donc $\pi_N = X^2$.

2. Une base de $\mathbb{K}[u]$

Théorème :

Soit $d = \deg \pi_u$. Alors la famille $(\text{id}_E, u, \dots, u^{d-1})$ est une base de $\mathbb{K}[u]$. En particulier, $\dim \mathbb{K}[u] = \deg \pi_u$.

Démonstration :

D'abord, la famille est libre. En effet, une relation $\sum_{k=0}^{d-1} c_k u^k = 0$ fournit un polynôme annulateur de degré au plus $d-1$. Il est donc nul par minimalité. Ensuite, elle est génératrice. Pour tout P , on écrit $P = \pi_u Q + R$ avec $\deg R < d$. Alors $P(u) = R(u)$, qui est combinaison de $\text{id}_E, \dots, u^{d-1}$.

Méthode :

Pour déterminer le polynôme minimal d'une matrice A : 1) trouver un polynôme annulateur P (par un calcul de A^2 , par une relation évidente ou par Cayley-Hamilton) ; 2) factoriser P ; 3) tester les diviseurs unitaires de P par degré croissant. Le premier diviseur qui annule A est π_A . On sait en outre que π_A contient toutes les valeurs propres comme racines, ce qui limite beaucoup les essais.

Exemple :

Soit $J \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, avec $n \geq 2$, la matrice dont tous les coefficients valent 1. Un calcul direct donne $J^2 = nJ$. Ainsi, $X^2 - nX = X(X - n)$ annule J . Or J n'est ni nulle ni égale à nI_n . Aucun diviseur de degré 1 ne convient, donc $\pi_J = X(X - n)$ et $\dim \mathbb{K}[J] = 2$.

III. Polynômes annulateurs et valeurs propres

Un polynôme annulateur renseigne immédiatement sur le spectre. C'est souvent la première chose à exploiter dans un exercice théorique.

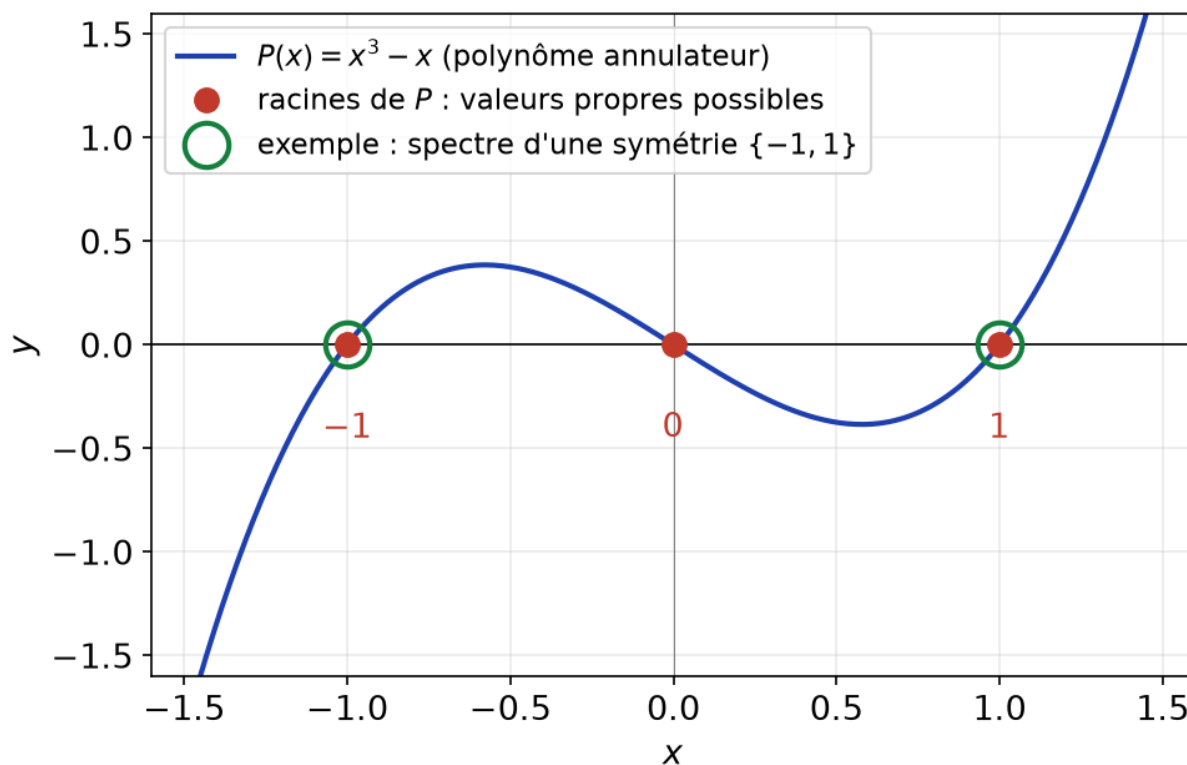
Proposition :

Si $u(x) = \lambda x$, alors $P(u)(x) = P(\lambda)x$ pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$. Par conséquent, si P annule u , toute valeur propre de u est racine de P : $\text{Sp}(u) \subset \{\text{racines de } P\}$.

Démonstration :

Par récurrence, $u^k(x) = \lambda^k x$ pour tout k . Par linéarité, $P(u)(x) = P(\lambda)x$. Si $P(u) = 0$ et $x \neq 0$, on obtient $P(\lambda)x = 0$, donc $P(\lambda) = 0$.

Attention, l'inclusion est en général stricte. Par exemple, $X^3 - X$ annule toute symétrie s , dont le spectre est inclus dans $\{-1, 1\}$. Le réel 0 est racine du polynôme sans être valeur propre de s . La figure ci-dessous illustre cette situation.



Théorème :

Les racines du polynôme minimal π_u dans $\mathbb{K}$ sont exactement les valeurs propres de u .

Démonstration :

D'une part, les valeurs propres sont racines de π_u , qui annule u . D'autre part, soit λ une racine de π_u . On écrit $\pi_u = (X - \lambda) Q$ avec $\deg Q < \deg \pi_u$. Alors $Q(u) \neq 0$ par minimalité. Or $(u - \lambda \text{id}_E) \circ Q(u) = 0$. Ainsi, $u - \lambda \text{id}_E$ s'annule sur $\text{Im } Q(u) \neq \{0\}$. Elle n'est donc pas injective, et λ est valeur propre.

Méthode :

Pour localiser le spectre à partir d'une relation comme $A^3 = 2A^2 - A$: on écrit le polynôme annulateur $P = X^3 - 2X^2 + X = X(X-1)^2$, puis on conclut $\text{Sp}(A) \subset \{0, 1\}$. Pour savoir quelles racines sont effectivement valeurs propres, on étudie les noyaux $\ker(A - \lambda I_n)$.

Corollaire :

L'endomorphisme u est inversible si et seulement si $\pi_u(0) \neq 0$. Dans ce cas, $u^{-1} \in \mathbb{K}[u]$.
Précisément, si $\pi_u = XQ + c$ avec $c \neq 0$, alors $u^{-1} = -\frac{1}{c}Q(u)$.

IV. Le lemme de décomposition des noyaux

Ce lemme est l'arme principale des exercices théoriques de réduction. Il transforme une factorisation de polynôme en une décomposition de l'espace en somme directe.

Théorème :

Soient $P_1, \dots, P_r$ des polynômes deux à deux premiers entre eux, et $P = P_1 P_2 \dots P_r$.
Alors :

$$\ker P(u) = \ker P_1(u) \oplus \ker P_2(u) \oplus \dots \oplus \ker P_r(u).$$

De plus, les projecteurs associés à cette décomposition sont des polynômes en u .

Démonstration :

Traitons $r = 2$; une récurrence donne le cas général. Par le théorème de Bézout, il existe

U, V tels que $U P_1 + V P_2 = 1$. Évaluons en u :

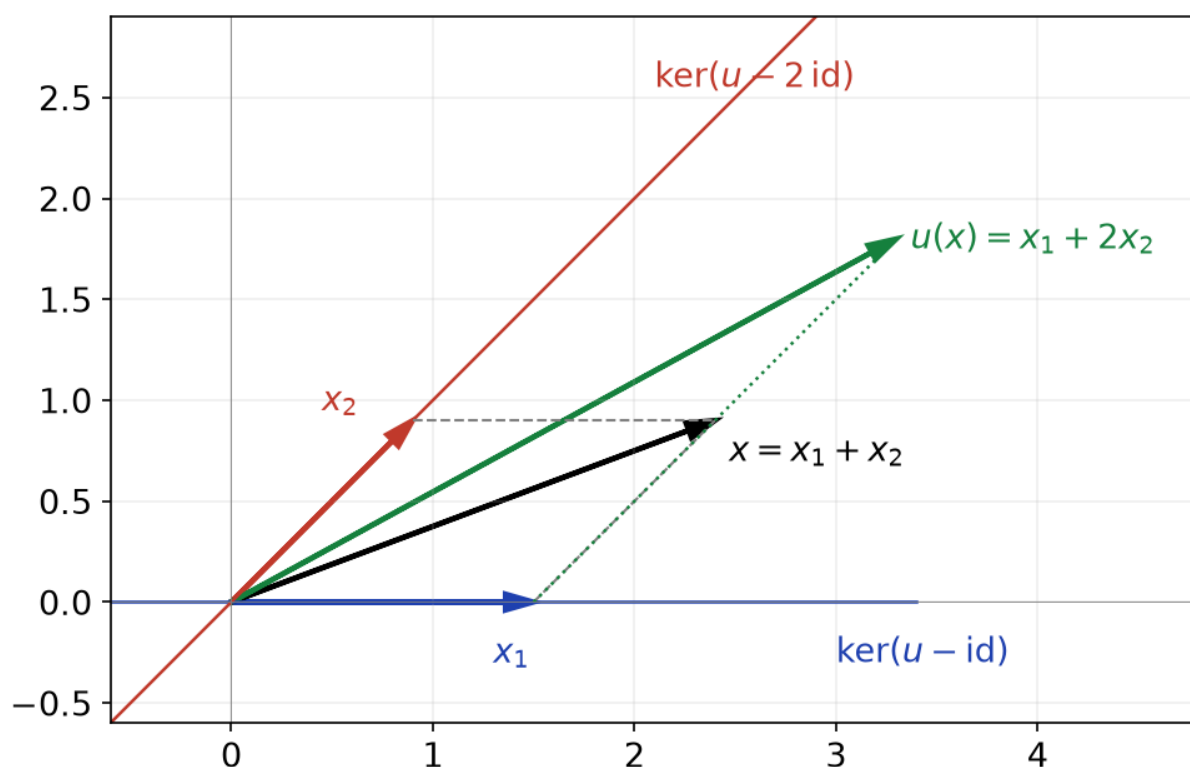
$U(u) P_1(u) + V(u) P_2(u) = \text{id}_E$. Soit $x \in \ker P(u)$. Posons $x_1 = V(u) P_2(u)(x)$ et $x_2 = U(u) P_1(u)(x)$. D'abord, $x = x_1 + x_2$. Ensuite,

$P_1(u)(x_1) = V(u) P(u)(x) = 0$, donc $x_1 \in \ker P_1(u)$. De même, $x_2 \in \ker P_2(u)$.

Enfin, si $x \in \ker P_1(u) \cap \ker P_2(u)$, la relation de Bézout donne $x = 0$. La somme est donc directe.

Dans le cas le plus fréquent, P annule u , donc $\ker P(u) = E$. On obtient alors

$E = \ker P_1(u) \oplus \dots \oplus \ker P_r(u)$, avec des facteurs stables par u . Comme le montre la figure ci-dessous, on décompose chaque vecteur en morceaux sur lesquels u agit simplement.



Exemple :

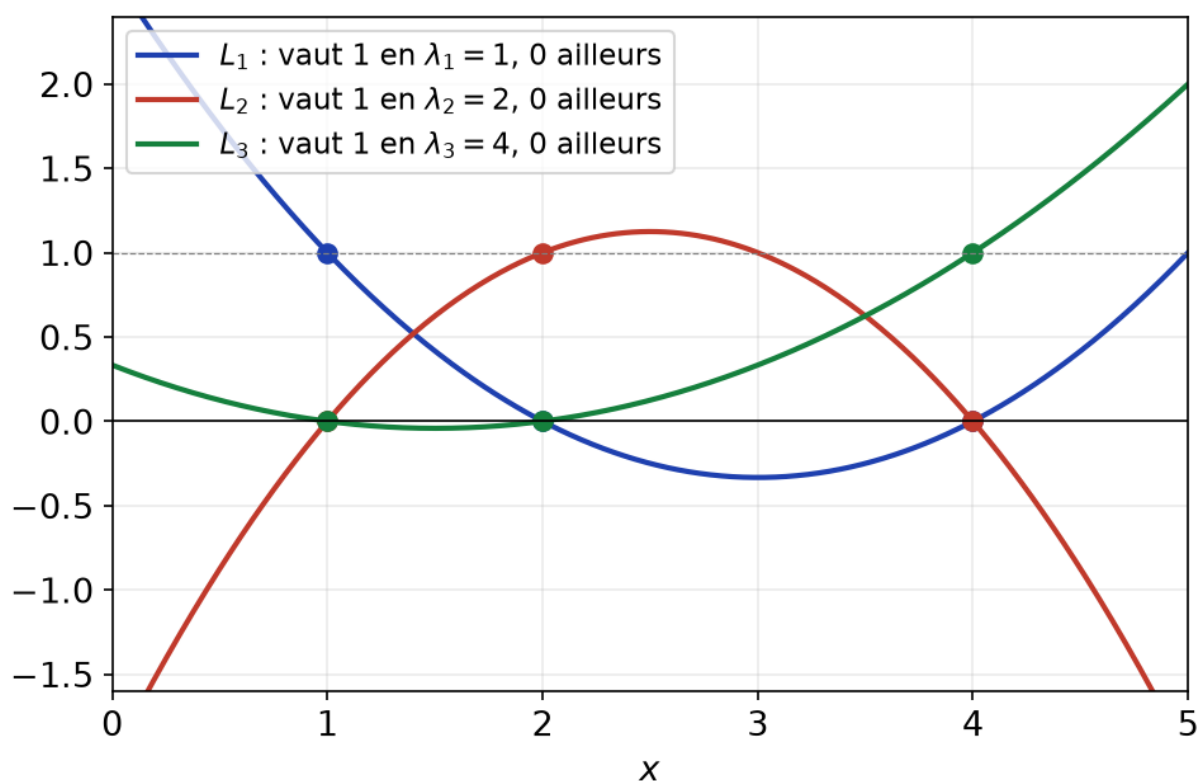
Soit u tel que $u^2 - 3u + 2 \text{id}_E = 0$. Les facteurs $X - 1$ et $X - 2$ sont premiers entre eux. Ainsi, $E = \ker(u - \text{id}_E) \oplus \ker(u - 2 \text{id}_E)$. La relation $1 = (X - 1) - (X - 2)$ fournit les projecteurs : $p_2 = u - \text{id}_E$ projette sur $\ker(u - 2 \text{id}_E)$, et $p_1 = 2 \text{id}_E - u$

projette sur $\ker(u - \text{id}_E)$.

Méthode :

Pour appliquer le lemme des noyaux : 1) exhiber un polynôme annulateur ; 2) le factoriser en facteurs premiers entre eux ; 3) écrire E comme somme directe des noyaux ; 4) si besoin, obtenir les projecteurs par une relation de Bézout. Quand les racines $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ sont simples, les polynômes d'interpolation de Lagrange L_i donnent directement les projecteurs $p_i = L_i(u)$.

La figure suivante montre ces polynômes de Lagrange pour $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ et $\lambda_3 = 4$. Chacun vaut 1 en une valeur propre et 0 aux autres ; c'est pourquoi $L_i(u)$ agit comme l'identité sur $\ker(u - \lambda_i \text{id}_E)$ et comme zéro sur les autres noyaux.



V. Diagonalisabilité, trigonalisabilité et polynômes annulateurs

1. Critère de diagonalisabilité

On dit qu'un polynôme est **simplement scindé** sur $\mathbb{K}$ s'il est scindé sur $\mathbb{K}$ à racines simples.

Théorème :

Les propriétés suivantes sont équivalentes : (i) u est diagonalisable ; (ii) u annule un polynôme simplement scindé ; (iii) π_u est simplement scindé. Dans ce cas, $\pi_u = \prod_{\lambda \in \text{Sp}(u)} (X - \lambda)$.

Démonstration :

(i) implique (ii) : dans une base de vecteurs propres, $\prod_{\lambda \in \text{Sp}(u)} (X - \lambda)$ annule chaque vecteur de base. (ii) implique (i) : si $P = \prod_{i=1}^r (X - \lambda_i)$ annule u avec les λ_i distincts, le lemme des noyaux donne $E = \bigoplus_i \ker(u - \lambda_i \text{id}_E)$. C'est une somme de sous-espaces propres (éventuellement nuls). Donc u est diagonalisable. Enfin, (ii) équivaut à (iii) car π_u divise tout polynôme annulateur, et un diviseur d'un polynôme simplement scindé l'est aussi.

Exemple :

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ vérifie $A^m = I_n$, alors $X^m - 1$ annule A . Ce polynôme a m racines distinctes dans $\mathbb{C}$, donc A est diagonalisable. En revanche, sur $\mathbb{R}$, la conclusion peut échouer : une rotation d'angle $2\pi/3$ vérifie $R^3 = I_2$ sans être diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

2. Critère de trigonalisabilité

Théorème :

L'endomorphisme u est trigonalisable si et seulement s'il annule un polynôme scindé sur $\mathbb{K}$, si et seulement si π_u est scindé. En particulier, tout endomorphisme d'un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension finie est trigonalisable.

Le sens direct découle du théorème de Cayley-Hamilton (partie VI) : si u est trigonalisable, χ_u est scindé et annule u . Pour la réciproque, on applique le lemme des noyaux au polynôme scindé $\prod (X - \lambda_i)^{m_i}$. Sur chaque facteur $\ker(u - \lambda_i \text{id}_E)^{m_i}$, l'endomorphisme $u - \lambda_i \text{id}$ est nilpotent. Or un nilpotent se trigonalise dans une base adaptée à la suite croissante de ses noyaux itérés. On recolle enfin les bases obtenues.

3. Endomorphisme induit

Proposition :

Soit F un sous-espace stable par u , et u_F l'endomorphisme induit. Pour tout P , on a $P(u_F) = P(u)_F$. Par conséquent, π_{u_F} divise π_u . En particulier, si u est diagonalisable (resp. trigonalisable), alors u_F l'est aussi.

Démonstration :

Comme $\pi_u(u) = 0$, sa restriction à F est nulle, donc π_u annule u_F . Ainsi π_{u_F} divise π_u . Si π_u est simplement scindé, son diviseur π_{u_F} l'est aussi, et u_F est diagonalisable. Le cas trigonalisable est identique.

Remarque :

Ce résultat est la clé de la codiagonalisation. Si u et v sont diagonalisables et commutent, chaque sous-espace propre de u est stable par v . L'endomorphisme induit par v y est diagonalisable, ce qui fournit une base commune de vecteurs propres.

VI. Le théorème de Cayley-Hamilton

Théorème :

Le polynôme caractéristique annule l'endomorphisme : $\chi_u(u) = 0$. De même, $\chi_A(A) = 0$ pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Par conséquent, π_u divise χ_u et $\deg \pi_u \leq n$.

Démonstration :

Soit $x \neq 0$. Notons p le plus grand entier tel que $(x, u(x), \dots, u^{p-1}(x))$ soit libre. Le sous-espace F qu'elle engendre est stable par u , car $u^p(x) = -\sum_{k=0}^{p-1} a_k u^k(x)$. Dans cette base, u_F a pour matrice la matrice compagnon de $Q = X^p + \sum_{k=0}^{p-1} a_k X^k$. Un développement du déterminant selon la dernière colonne donne $\chi_{u_F} = Q$. Or χ_{u_F} divise χ_u , car la matrice de u dans une base adaptée à F est triangulaire par blocs. Enfin, $Q(u)(x) = 0$ par construction. Donc $\chi_u(u)(x) = 0$ pour tout x .

Exemple :

En dimension 2, on a $\chi_A = X^2 - \text{tr}(A)X + \det(A)$. Ainsi, $A^2 - \text{tr}(A)A + \det(A)I_2 = 0$ pour toute $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$. Si $\det A \neq 0$, on en déduit

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} (\text{tr}(A) I_2 - A).$$

Méthode :

Pour calculer A^{-1} : on écrit $\chi_A = X^n + c_{n-1}X^{n-1} + \dots + c_1X + c_0$, avec $c_0 = (-1)^n \det A \neq 0$. Alors $A^{-1} = -\frac{1}{c_0}(A^{n-1} + c_{n-1}A^{n-2} + \dots + c_1I_n)$. Pour calculer A^k : on effectue la division euclidienne $X^k = PQ_k + R_k$ par un polynôme annulateur P de degré d . Il vient $A^k = R_k(A)$, avec $\deg R_k < d$. On trouve les coefficients de R_k en évaluant aux racines de P , et en dérivant aux racines multiples.

Exemple :

Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. On a $\chi_A = X^2 - 4X + 4 = (X - 2)^2$. Écrivons $X^k = (X - 2)^2 Q_k + a_k X + b_k$. En évaluant en 2, puis en dérivant et en évaluant en 2, on obtient $2a_k + b_k = 2^k$ et $a_k = k 2^{k-1}$. Donc $A^k = k 2^{k-1} A + (1 - k) 2^k I_2$.

VII. Sous-espaces caractéristiques et réduction en blocs

On suppose désormais χ_u scindé : $\chi_u = \prod_{i=1}^r (X - \lambda_i)^{m_i}$, où les λ_i sont distincts et m_i est la multiplicité de λ_i .

Définition :

Le **sous-espace caractéristique** de u associé à λ_i est $F_{\lambda_i} = \ker(u - \lambda_i \text{id}_E)^{m_i}$. Il contient le sous-espace propre $E_{\lambda_i}(u)$ et il est stable par u .

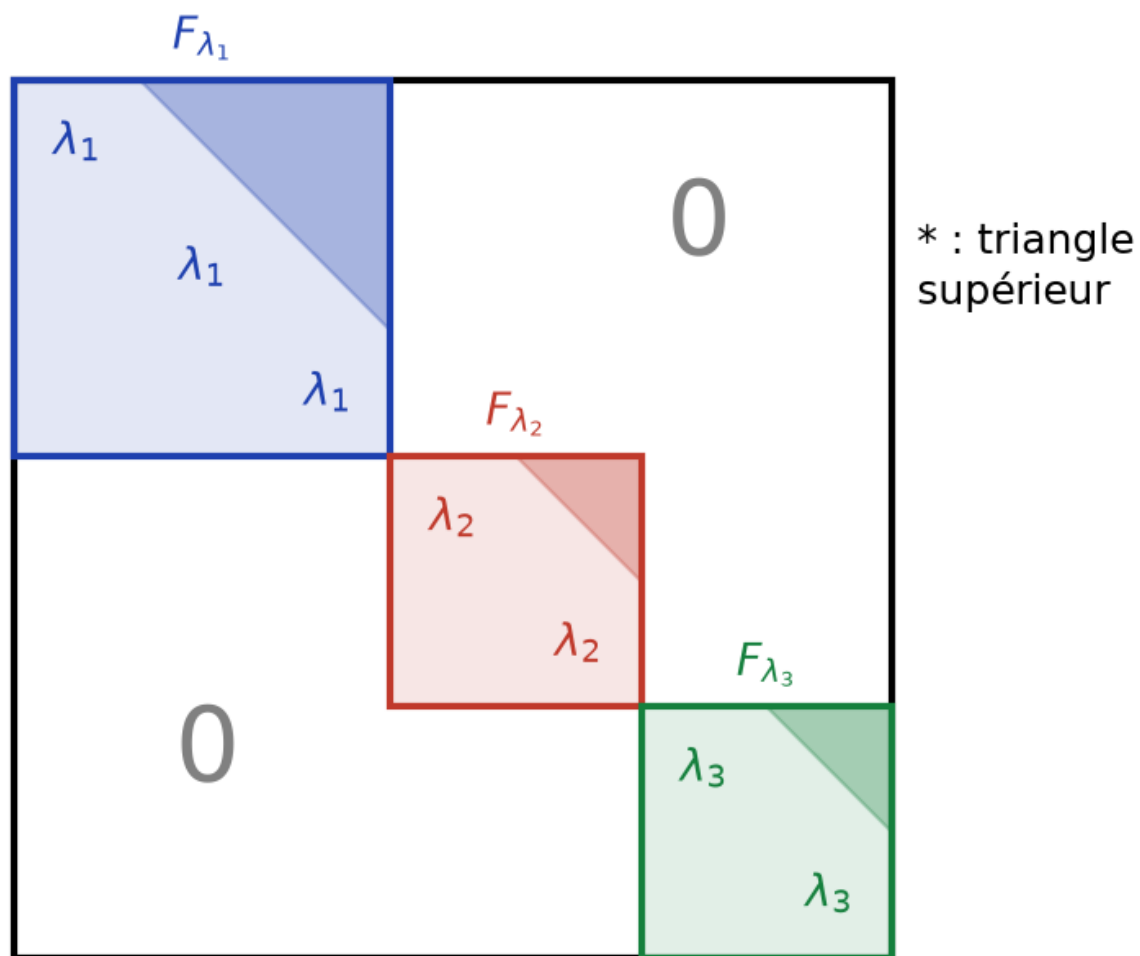
Théorème :

Si χ_u est scindé, alors $E = F\lambda_1 \oplus \dots \oplus F\lambda_r$ et $\dim F\lambda_i = m_i$. De plus, l'endomorphisme induit par u sur $F\lambda_i$ s'écrit $\lambda_i \text{id} + n_i$, avec n_i nilpotent.

Démonstration :

Les facteurs $(X - \lambda_i)^{m_i}$ sont premiers entre eux, et leur produit χ_u annule u par Cayley-Hamilton. Le lemme des noyaux donne la somme directe. Ensuite, sur $F\lambda_i$, $u - \lambda_i \text{id}$ est nilpotent, donc l'induit u_i a pour seule valeur propre λ_i . Ainsi, $\chi_{u_i} = (X - \lambda_i)^{d_i}$ avec $d_i = \dim F\lambda_i$. Or $\chi_u = \prod_i \chi_{u_i}$, puisque la matrice de u est diagonale par blocs. Par unicité de la factorisation, $d_i = m_i$.

En choisissant dans chaque $F\lambda_i$ une base qui trigonalise u_i , on obtient une matrice diagonale par blocs. Chaque bloc est triangulaire supérieur, de taille m_i , avec λ_i sur la diagonale. La figure ci-dessous représente cette forme réduite.



Corollaire :

Si χ_u est scindé, u est diagonalisable si et seulement si $F_{\lambda_i} = E_{\lambda_i}(u)$ pour tout i , c'est-à-dire si et seulement si $\dim E_{\lambda_i}(u) = m_i$ pour tout i .

Exemple :

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. On a $\chi_A = (X-1)^2(X-2)$. Le sous-espace caractéristique $F_1 = \ker(A - I_3)^2$ est le plan $\text{Vect}(e_1, e_2)$. En revanche, $E_1 = \text{Vect}(e_1)$ est seulement une droite. Par conséquent, A n'est pas diagonalisable, et $\pi_A = (X-1)^2(X-2)$.

Attention :

La multiplicité de λ dans π_u n'est pas la dimension de F_λ . C'est le plus petit entier k tel que $\ker(u - \lambda \operatorname{id}_E)^k = F_\lambda$, autrement dit l'indice de nilpotence de $u - \lambda \operatorname{id}$ sur F_λ .

Ce qu'il faut retenir

- $P \rightarrow P(u)$ est un morphisme d'algèbres : les polynômes en u commutent entre eux, et leurs noyaux et images sont stables par u .
- L'idéal annulateur est engendré par le polynôme minimal π_u ; $P(u) = 0$ équivaut à $\pi_u \mid P$.
- $\dim \mathbb{K}[u] = \deg \pi_u$, avec la base $(\operatorname{id}_E, u, \dots, u^{d-1})$.
- Les valeurs propres sont racines de tout polynôme annulateur, et exactement les racines de π_u .
- Lemme des noyaux : si $P_1, \dots, P_r$ sont premiers entre eux deux à deux,
 $\ker (P_1 \dots P_r)(u) = \bigoplus \ker P_i(u)$, avec des projecteurs polynomiaux en u .
- u diagonalisable si et seulement si u annule un polynôme simplement scindé ; trigonalisable si et seulement si u annule un polynôme scindé.
- Un endomorphisme induit par un diagonalisable sur un sous-espace stable est diagonalisable.
- Cayley-Hamilton : $\chi_u(u) = 0$, donc $\pi_u \mid \chi_u$; on en tire inverses et puissances par division euclidienne.
- Si χ_u est scindé, E est somme directe des sous-espaces caractéristiques, de dimensions égales aux multiplicités, d'où une réduction en blocs triangulaires.

Questions fréquentes sur polynômes d'endomorphismes

Quelle différence entre polynôme minimal et polynôme caractéristique ?

Le polynôme minimal π_u est le polynôme unitaire annulateur de plus petit degré, tandis que X_u se calcule par un déterminant. Par Cayley-Hamilton, π_u divise X_u , et les deux ont les mêmes racines, les valeurs propres. Seules les multiplicités diffèrent : celle dans X_u est la dimension du sous-espace caractéristique.

Comment prouver qu'une matrice est diagonalisable sans calculer ses sous-espaces propres ?

Il suffit de trouver un polynôme annulateur scindé à racines simples. Par exemple, si $A^2 = A$ ou $A^p = I_n$ sur $\mathbb{C}$, la matrice est diagonalisable. Ce critère est souvent le plus rapide dans les exercices théoriques.

Quand utiliser le lemme des noyaux ?

Dès qu'un polynôme annulateur se factorise en facteurs premiers entre eux. On obtient alors une décomposition de l'espace en somme directe de sous-espaces stables. Les projecteurs associés sont des polynômes en u , obtenus par une relation de Bézout.

Peut-on démontrer Cayley-Hamilton en remplaçant X par A dans $\det(XI - A)$?

Non, cet argument est faux : on ne peut pas substituer une matrice à un scalaire à l'intérieur d'un déterminant. La démonstration du programme passe par les sous-espaces cycliques et les matrices compagnons. Aux oraux, cette fausse preuve est régulièrement sanctionnée.

Pour aller plus loin en maths spé

- Les énoncés : [exercices de maths spé sur polynômes d'endomorphismes](#)
- À maîtriser avant : [Diagonalisation, trigonalisation et nilpotence](#), [Anneaux, idéaux, \$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\$ et algèbres](#)
- Chapitre précédent : [Diagonalisation, trigonalisation et nilpotence](#)
- Chapitre suivant : [Normes, espaces vectoriels normés et suites](#)
- Tester vos connaissances : [QCM de maths spé par chapitre](#)
- Le sommaire : [tous les chapitres de maths spé](#) et les [chapitres de maths sup](#)

