

Polynômes d'endomorphismes

Corrigé de l'exercice 1 : Polynômes minimaux de matrices simples

1. On a $A - 2I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $A - 3I_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Le produit vaut

$$(A - 2I_3)(A - 3I_3) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0.$$

Ensuite, $(A - 2I_3)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Sa seule ligne non nulle est la troisième. Or la troisième ligne de $A - 3I_3$ est nulle. Donc $(A - 2I_3)^2 (A - 3I_3) = 0$. Par conséquent, π_A divise $(X - 2)^2 (X - 3)$. De plus, 2 et 3 sont valeurs propres (matrice triangulaire), donc racines de π_A . Le seul autre candidat, $(X - 2)(X - 3)$, n'annule pas A . **Ainsi**
 $\pi_A = (X - 2)^2 (X - 3)$, et A n'est pas diagonalisable car π_A a une racine double.

À partir de la question 2

2. Chaque coefficient de J^2 vaut $1 + 1 + 1 = 3$. Donc $J^2 = 3J$, et $X(X - 3)$ annule J . D'autre part, $J \neq 0$ et $J \neq 3I_3$. Aucun polynôme unitaire de degré 1 n'annule donc J . **On obtient** $\pi_J = X(X - 3)$ et $\dim \mathbb{R}[J] = 2$. Ce polynôme est simplement scindé, donc J est diagonalisable.

3. On a $C = E_{13}$, et $E_{13} E_{13} = 0$ car $3 \neq 1$. Ainsi $C^2 = 0$ alors que $C \neq 0$. **Donc**

$\pi_C = X^2$, et C n'est pas diagonalisable.

Point de méthode : on teste les diviseurs du polynôme annulateur qui contiennent toutes les valeurs propres, par degré croissant.

Corrigé de l'exercice 2 : Sous-algèbre engendrée par un projecteur

1. Comme $p^2 = p$, le polynôme $X^2 - X = X(X - 1)$ annule p . Ses diviseurs unitaires de degré 1 sont X et $X - 1$. Or $p \neq 0$ et $p \neq \text{id}_E$. Donc $\pi_p = X^2 - X$. D'après le cours, $\dim \mathbb{K}[p] = \deg \pi_p = 2$. **Une base de $\mathbb{K}[p]$ est (id_E, p) .**
2. On sait que $E = \ker p \oplus \text{Im } p$, avec $\ker p \neq \{0\}$ (car $p \neq \text{id}_E$) et $\text{Im } p \neq \{0\}$ (car $p \neq 0$). Sur $\ker p$, l'endomorphisme $a \text{id}_E + bp$ agit comme $a \text{id}$. Sur $\text{Im } p$, il agit comme $(a + b) \text{id}$. Dans une base adaptée, sa matrice est diagonale avec les coefficients a et $a + b$, qui apparaissent tous deux. **Il est donc inversible si et seulement si $a \neq 0$ et $a + b \neq 0$.**
3. Cherchons l'inverse dans $\mathbb{K}[p]$, ce qui est légitime d'après le cours. En utilisant $p^2 = p$:
$$(a \text{id} + bp)(c \text{id} + dp) = ac \text{id} + (ad + bc + bd)p.$$

On veut $ac = 1$ et $ad + bc + bd = 0$. Ainsi $c = \frac{1}{a}$, puis $d(a + b) = -\frac{b}{a}$. **Donc**
 $(a \text{id}_E + bp)^{-1} = \frac{1}{a} \text{id}_E - \frac{b}{a(a+b)} p$.

Corrigé de l'exercice 3 : Un polynôme annulateur de degré 2

1. Le polynôme $X^2 - 3X + 2 = (X - 1)(X - 2)$ annule A . Donc π_A le divise. Comme $A \neq I_n$ et $A \neq 2I_n$, aucun diviseur de degré 1 ne convient. **Ainsi**
 $\pi_A = (X - 1)(X - 2)$ **et** $\text{Sp}(A) = \{1, 2\}$, puisque les valeurs propres sont exactement les racines de π_A .

2. Le polynôme π_A est scindé à racines simples. **D'après le critère du cours, A est diagonalisable.**
3. On réécrit la relation : $A(3I_n - A) = 2I_n$. Ainsi $A \cdot \frac{1}{2}(3I_n - A) = I_n$. **Donc A est inversible et $A^{-1} = \frac{1}{2}(3I_n - A)$.**
4. Effectuons la division euclidienne $X^k = (X-1)(X-2)Q_k + a_k X + b_k$. En évaluant en 1 puis en 2, on obtient $a_k + b_k = 1$ et $2a_k + b_k = 2^k$. Par soustraction, $a_k = 2^k - 1$, puis $b_k = 2 - 2^k$. **Ainsi $A^k = (2^k - 1)A + (2 - 2^k)I_n$.** On vérifie pour $k = 0$: $0 \cdot A + I_n = I_n$.

Corrigé de l'exercice 4 : Inverse par Cayley-Hamilton

1. La matrice P envoie e_1 sur e_3 , e_2 sur e_1 et e_3 sur e_2 . On calcule $P^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, puis $P^3 = I_3$. En effet, appliquer trois fois la permutation circulaire ramène chaque vecteur à lui-même. **Donc $(A - I_3)^3 = P^3 = I_3$.**
2. Développons : $(A - I_3)^3 - I_3 = 0$, c'est-à-dire $A^3 - 3A^2 + 3A - 2I_3 = 0$. Calculons ensuite χ_A directement. Par la règle de Sarrus,

$$\det(XI_3 - A) = \begin{vmatrix} X-1 & -1 & 0 \\ 0 & X-1 & 1 \\ -1 & 0 & X-1 \end{vmatrix} = (X-1)^3 + (-1)(-1)(-1) = (X-1)^3 - 1.$$

Donc $\chi_A = X^3 - 3X^2 + 3X - 2$, et la relation précédente est exactement $\chi_A(A) = 0$, conformément au théorème de Cayley-Hamilton.

3. La relation s'écrit $A(A^2 - 3A + 3I_3) = 2I_3$. Donc A est inversible et $A^{-1} = \frac{1}{2}(A^2 - 3A + 3I_3)$. Or $A^2 = I_3 + 2P + P^2$. Ainsi $A^2 - 3A + 3I_3 = I_3 - P + P^2$. On en déduit

$$A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

On contrôle : $(I_3 + P)(I_3 - P + P^2) = I_3 + P^3 = 2I_3$. **Le résultat est donc juste.**

Corrigé de l'exercice 5 : Cayley-Hamilton en dimension 2

- On calcule $A^2 = \begin{pmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ca + dc & cb + d^2 \end{pmatrix}$ et $(a+d)A = \begin{pmatrix} a^2 + ad & ab + bd \\ ac + dc & ad + d^2 \end{pmatrix}$. Par différence, $A^2 - (a+d)A = (bc - ad)I_2 = -\det(A)I_2$. **Donc** $A^2 - \operatorname{tr}(A)A + \det(A)I_2 = 0$.
- Si $A^k = 0$, alors X^k annule A , donc 0 est la seule valeur propre complexe de A . Ainsi $\chi_A = X^2$, ce qui donne $\operatorname{tr}(A) = 0$ et $\det(A) = 0$. Par la question 1, $A^2 = 0$.
- Notons $t = \operatorname{tr}(A)$ et $d = \det(A)$. D'après la question 1, $A^2 = tA - dI_2$. L'équation $A^2 = -I_2$ équivaut donc à $tA = (d-1)I_2$. Si $A = \lambda I_2$ est scalaire, on aurait $\lambda^2 = -1$, ce qui est impossible dans $\mathbb{R}$. Donc A n'est pas scalaire, et l'égalité $tA = (d-1)I_2$ impose $t = 0$, puis $d = 1$. Réciproquement, si $t = 0$ et $d = 1$, on a bien $A^2 = -I_2$. **Les solutions sont les matrices de trace nulle et de déterminant 1, soit** $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$ **avec** $a^2 + bc = -1$.

Corrigé de l'exercice 6 : Puissances par division euclidienne

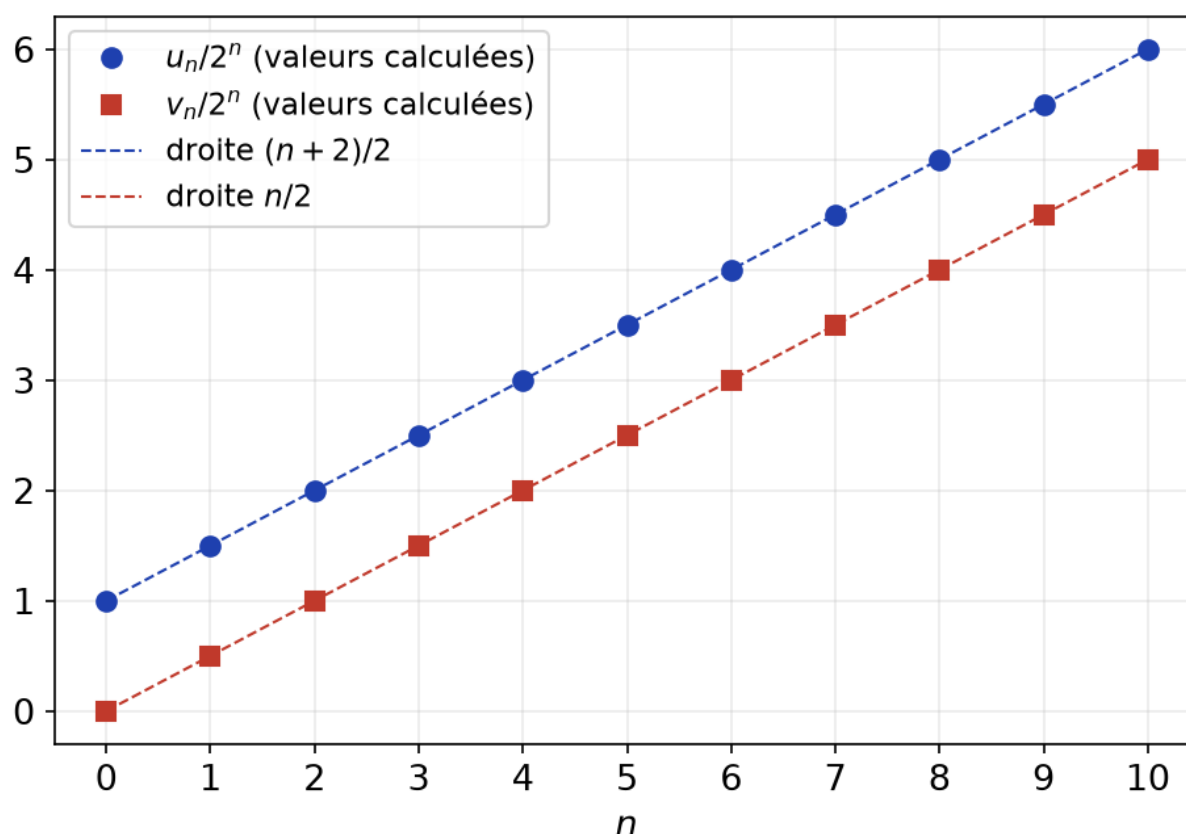
- On a $\operatorname{tr}(A) = 4$ et $\det(A) = 3 + 1 = 4$. **Donc** $\chi_A = X^2 - 4X + 4 = (X-2)^2$. La seule valeur propre est 2. Si A était diagonalisable, elle serait semblable à $2I_2$, donc égale à $2I_2$. Ce n'est pas le cas : **A n'est pas diagonalisable.**
- Écrivons $X^n = (X-2)^2 Q_n + a_n X + b_n$. En évaluant en 2 : $2^n = 2a_n + b_n$. En dérivant puis en évaluant en 2, le terme $(X-2)^2 Q_n$ a une dérivée nulle en 2, d'où $n 2^{n-1} = a_n$. Ainsi $b_n = 2^n - n 2^n = (1-n) 2^n$. Par Cayley-Hamilton, $\chi_A(A) = 0$, donc $A^n = a_n A + b_n I_2$. Il vient

$$A^n = 2^{n-1}(nA + (2-2n)I_2) = 2^{n-1} \begin{pmatrix} n+2 & -n \\ n & 2-n \end{pmatrix}.$$

On vérifie pour $n = 2$: $2 \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$, ce qui est bien A^2 . **La formule est valable pour tout $n \in \mathbb{N}$.**

À partir de la question 3

3. Posons $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$. La récurrence s'écrit $X_{n+1} = A X_n$, donc $X_n = A^n X_0$. Or $X_0 = e_1$, donc X_n est la première colonne de A^n . On obtient $u_n = 2^{n-1}(n+2)$ et $v_n = n 2^{n-1}$. Ainsi $u_n / 2^n = (n+2)/2$ et $v_n / 2^n = n/2$ sont affines en n , comme le confirme la figure ci-dessous, construite à partir des valeurs calculées par la récurrence.



Point de méthode : pour une racine double λ du polynôme annulateur, on dérive l'égalité de division euclidienne et on évalue en λ .

Corrigé de l'exercice 7 : Matrices nilpotentes

1. Le polynôme X^p annule N , donc π_N divise X^p : $\pi_N = X^k$ avec $k \leq p$. Comme

$N^{p-1} \neq 0$, on a $k = p$. **Donc** $\pi_N = X^p$. Ensuite, $\deg \pi_N \leq n$ par Cayley-Hamilton, donc $p \leq n$. Enfin, $N^n = N^p N^{n-p} = 0$.

- Les valeurs propres complexes de N sont les racines de $\pi_N = X^p$. Donc $\text{Sp}(N) = \{0\}$. Or χ_N est scindé sur $\mathbb{C}$, unitaire de degré n , et sa seule racine est 0. **Ainsi** $\chi_N = X^n$, et $\text{tr}(N) = 0$, puisque la trace est l'opposé du coefficient de X^{n-1} .
- Si N est de plus diagonalisable, π_N est simplement scindé. Or $\pi_N = X^p$, donc $p = 1$. **Ainsi** $\pi_N = X$, c'est-à-dire $N = 0$.
- On calcule $(I_n - N)(I_n + N + \dots + N^{p-1}) = I_n - N^p = I_n$, par télescopage. **Donc** $I_n - N$ est inversible, d'inverse $\sum_{k=0}^{p-1} N^k$, qui est bien un polynôme en N .

Corrigé de l'exercice 8 : Matrice compagnon

- Par définition, $C e_k = e_{k+1}$ pour $1 \leq k \leq n-1$. Par récurrence, $C^k e_1 = e_{k+1}$ pour $0 \leq k \leq n-1$. Soit maintenant $R = \sum_{k=0}^{n-1} c_k X^k$ tel que $R(C) = 0$. Alors $R(C) e_1 = \sum_{k=0}^{n-1} c_k e_{k+1} = 0$. La famille $(e_1, \dots, e_n)$ étant libre, tous les c_k sont nuls. **Aucun polynôme non nul de degré au plus $n-1$ n'annule C , donc $\deg \pi_C \geq n$.**
- La dernière colonne de C donne $C e_n = -\sum_{k=0}^{n-1} a_k e_{k+1}$. Donc $C^n e_1 = C e_n = -\sum_{k=0}^{n-1} a_k C^k e_1$. Ainsi $Q(C) e_1 = 0$. Ensuite, pour tout k , $Q(C) e_{k+1} = Q(C) C^k e_1 = C^k Q(C) e_1 = 0$, car deux polynômes en C commutent. **L'endomorphisme $Q(C)$ s'annule sur une base, donc $Q(C) = 0$.**

À partir de la question 3

- D'après la question 2, π_C divise Q , qui est de degré n . D'après la question 1,

$\deg \pi_C \geq n$. Les deux polynômes sont unitaires, donc $\pi_C = Q$. De plus, π_C divise χ_C , unitaire de degré n . **Ainsi** $\pi_C = \chi_C = Q$.

4. Pour $Q = X^3 - 2X + 1$, on a $a_0 = 1$, $a_1 = -2$, $a_2 = 0$. La matrice compagnon est

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \pi_C = X^3 - 2X + 1.$$

Or $Q(1) = 0$, et $Q = (X - 1)(X^2 + X - 1)$. Les racines sont 1 et $\frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$, réelles et distinctes. **Le polynôme minimal est simplement scindé sur $\mathbb{R}$, donc C est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.**

Corrigé de l'exercice 9 : Polynôme minimal et spectre

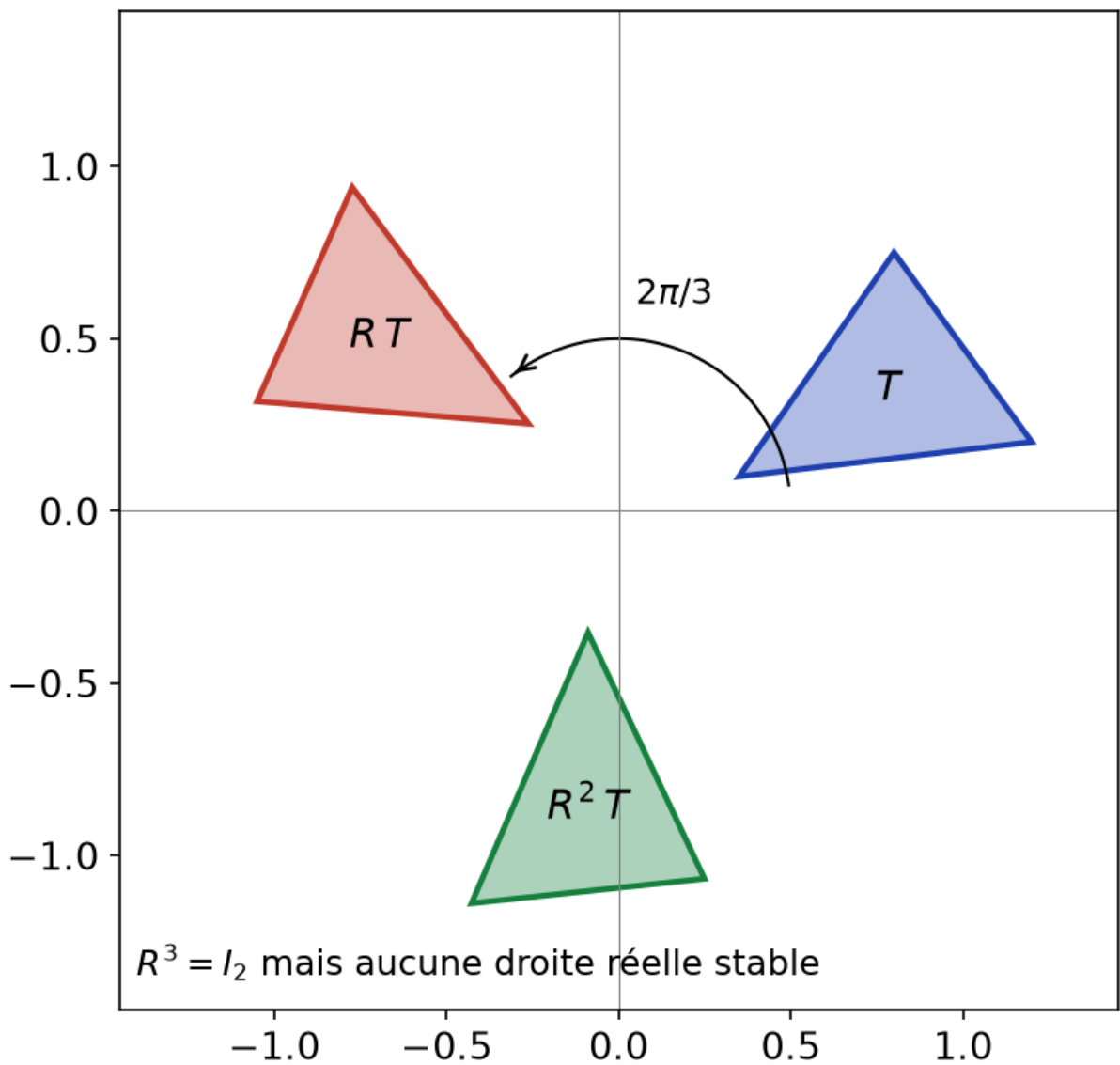
- Les valeurs propres sont les racines de π_A . **Donc** $\text{Sp}(A) = \{1, -2\}$. Par ailleurs, π_A possède la racine double 1. Il n'est pas simplement scindé : **A n'est pas diagonalisable.**
- Le polynôme χ_A est unitaire de degré 4. Par Cayley-Hamilton, π_A divise χ_A . De plus, χ_A a les mêmes racines que π_A (les valeurs propres). Donc $\chi_A = (X - 1)^\alpha (X + 2)^\beta$ avec $\alpha \geq 2$, $\beta \geq 1$ et $\alpha + \beta = 4$. **Deux cas : $\chi_A = (X - 1)^3 (X + 2)$, de trace $3 - 2 = 1$; ou $\chi_A = (X - 1)^2 (X + 2)^2$, de trace $2 - 4 = -2$.**
- On développe
 $(X^2 - 2X + 1)(X + 2) = X^3 + 2X^2 - 2X^2 - 4X + X + 2 = X^3 - 3X + 2$. Ainsi $A^3 - 3A + 2I_4 = 0$, soit $A(3I_4 - A^2) = 2I_4$. **Donc A est inversible et $A^{-1} = \frac{1}{2}(3I_4 - A^2)$.** C'est cohérent avec $\pi_A(0) = 2 \neq 0$.
- Notons $J_2 = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 1 \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right)$, de polynôme minimal $(X - 1)^2$. La matrice $\text{diag}(J_2, 1, -2)$ a pour polynôme caractéristique $(X - 1)^3 (X + 2)$. La matrice $\text{diag}(J_2, -2, -2)$ a pour polynôme caractéristique $(X - 1)^2 (X + 2)^2$. Par le résultat de l'exercice 15, leur polynôme minimal est le ppcm des polynômes minimaux des blocs. **Dans les deux cas, on trouve $(X - 1)^2 (X + 2)$.**

Corrigé de l'exercice 10 : Inversibilité et polynôme minimal

1. D'abord, u est inversible si et seulement si 0 n'est pas valeur propre (dimension finie). Or les valeurs propres sont exactement les racines de π_u . Donc u est inversible si et seulement si $\pi_u(0) \neq 0$. Dans ce cas, écrivons $\pi_u = XQ + c$, avec $c = \pi_u(0) \neq 0$. La relation $\pi_u(u) = 0$ donne $u \circ Q(u) = -c \operatorname{id}_E$. Ainsi $u^{-1} = -\frac{1}{c} Q(u) \in \mathbb{K}[u]$.
2. On a $J^2 = 3J$, et $J = M + I_3$. Donc $(M + I_3)^2 = 3(M + I_3)$, soit $M^2 + 2M + I_3 = 3M + 3I_3$. Il vient $M^2 - M - 2I_3 = 0$, c'est-à-dire $(M - 2I_3)(M + I_3) = 0$. La matrice M n'est pas scalaire, donc aucun polynôme de degré 1 ne l'annule. Ainsi $\pi_M = (X - 2)(X + 1)$.
3. Comme $\pi_M(0) = -2 \neq 0$, M est inversible. La relation $M(M - I_3) = 2I_3$ donne $M^{-1} = \frac{1}{2}(M - I_3)$. Ainsi $M^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. On vérifie un coefficient : la première ligne de M fois la première colonne donne $\frac{1}{2}(0 + 1 + 1) = 1$.

Corrigé de l'exercice 11 : Racines de l'unité et diagonalisabilité

1. Le polynôme $X^p - 1$ annule A . Ses racines complexes sont les $\omega^k = e^{2ik\pi/p}$, pour $0 \leq k \leq p-1$. Elles sont p et distinctes, donc $X^p - 1 = \prod_{k=0}^{p-1} (X - \omega^k)$ est simplement scindé sur $\mathbb{C}$. **Par le critère du cours, A est diagonalisable, et $\operatorname{Sp}(A)$ est inclus dans l'ensemble des racines p -ièmes de l'unité.**
2. La matrice R est la rotation d'angle $2\pi/3$. Donc R^3 est la rotation d'angle 2π , soit $R^3 = I_2$. Par ailleurs, $\chi_R = X^2 - \operatorname{tr}(R)X + \det(R) = X^2 + X + 1$. Son discriminant vaut $-3 < 0$. Ainsi R n'a aucune valeur propre réelle : **R n'est pas diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$** . En revanche, sur $\mathbb{C}$, elle a deux valeurs propres distinctes $j = e^{2i\pi/3}$ et $\bar{j}$. **Elle est donc diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$** . La figure ci-dessous montre qu'aucune droite réelle n'est stable par R .



3. Le polynôme $X^3 - X = X(X-1)(X+1)$ annule A . Il est scindé sur $\mathbb{R}$, à racines simples $-1, 0, 1$. **Donc A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.**

Point de méthode : le critère « annule un polynôme simplement scindé » dépend du corps ; on vérifie toujours que les racines sont dans $\mathbb{K}$.

Corrigé de l'exercice 12 : Un endomorphisme annulé par

$X^2(X-1)$

1. Le polynôme $P = X^2(X-1)$ annule A et il est scindé sur $\mathbb{R}$. **Donc A est trigonalisable.** Les valeurs propres sont racines de P , d'où $\text{Sp}(A) \subset \{0, 1\}$.
2. Les polynômes X^2 et $X-1$ sont premiers entre eux, car ils n'ont pas de racine commune. Le lemme des noyaux donne $\ker P(A) = \ker A^2 \oplus \ker(A - I_n)$. Or $P(A) = 0$, donc $\mathbb{R}^n = \ker A^2 \oplus \ker(A - I_n)$.
3. Supposons A diagonalisable. Alors π_A est simplement scindé et divise $X^2(X-1)$. Il divise donc $X(X-1)$, ce qui donne $A^2 = A$. Réciproquement, si $A^2 = A$, alors $X(X-1)$ annule A . Ce polynôme est simplement scindé. **Ainsi A est diagonalisable si et seulement si $A^2 = A$.**

À partir de la question 4

4. Posons $F = \ker A^2$ et $G = \ker(A - I_n)$, stables par A . Dans une base adaptée à $\mathbb{R}^n = F \oplus G$, la matrice de A est $\text{diag}(N, I_r)$, où $r = \dim G$. Le bloc N représente l'induit sur F , qui vérifie $N^2 = 0$. Il est nilpotent, donc de trace nulle (exercice 7). **Ainsi $\text{tr}(A) = \text{tr}(N) + r = \dim \ker(A - I_n)$.**
5. On calcule $B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. La seule ligne non nulle de B^2 est e_3^T . Or la troisième ligne de $B - I_3$ est nulle. Donc $B^2(B - I_3) = 0$. En revanche, $B^2 \neq B$, car leurs coefficients en position $(1, 2)$ diffèrent. **Par la question 3, B n'est pas diagonalisable.** On vérifie aussi $\text{tr}(B) = 1 = \dim \ker(B - I_3)$.

Corrigé de l'exercice 13 : Lemme des noyaux et projecteurs

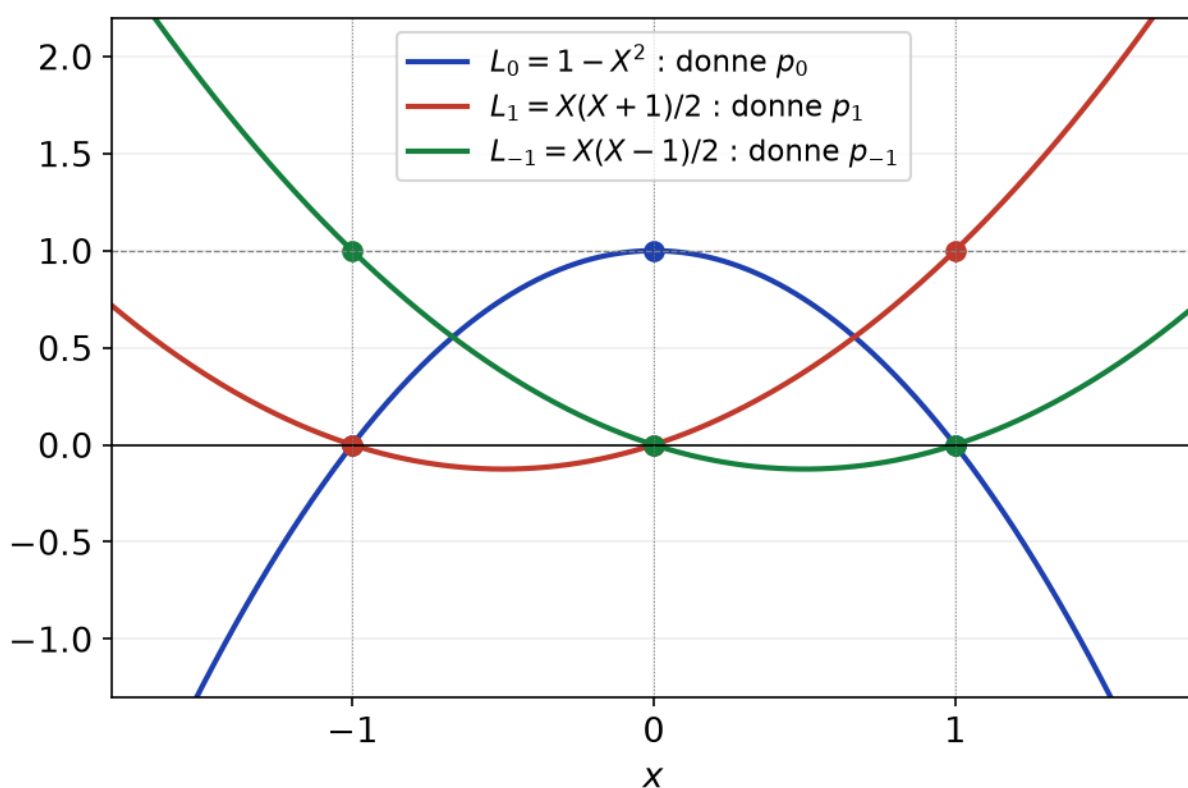
1. Le polynôme $X^3 - X = X(X-1)(X+1)$ annule u . Ses trois facteurs sont deux à deux premiers entre eux. **Par le lemme des noyaux,**
 $E = \ker u \oplus \ker(u - \text{id}_E) \oplus \ker(u + \text{id}_E)$.

2. On utilise les polynômes d'interpolation de Lagrange aux points $0, 1, -1$:

$$L_0 = 1 - X^2, \quad L_1 = \frac{X(X+1)}{2}, \quad L_{-1} = \frac{X(X-1)}{2}.$$

Ils vérifient $L_0 + L_1 + L_{-1} = 1$. Soit $x = x_0 + x_1 + x_{-1}$ décomposé selon la question

1. Pour $x_\lambda \in \ker(u - \lambda \text{id}_E)$, on a $L_\mu(u)(x_\lambda) = L_\mu(\lambda) x_\lambda$, qui vaut x_λ si $\mu = \lambda$ et 0 sinon. Ainsi $L_\mu(u)(x) = x_\mu$. **Donc** $p_0 = \text{id}_E - u^2$, $p_1 = \frac{1}{2}(u^2 + u)$ **et** $p_{-1} = \frac{1}{2}(u^2 - u)$. La figure ci-dessous montre que chaque L_μ vaut 1 en μ et 0 aux deux autres points.



3. De $u^3 = u$, on tire $u^{k+2} = u^k$ pour $k \geq 1$. Par récurrence, $u^{2k+1} = u$ **et** $u^{2k} = u^2$ **pour tout** $k \geq 1$.

4. Dans une base adaptée à la décomposition, u est diagonale avec des coefficients dans $\{0, 1, -1\}$. Ainsi u^2 est diagonale avec 0 sur $\ker u$ et 1 ailleurs. Donc $\text{tr}(u^2) = \dim \ker(u - \text{id}_E) + \dim \ker(u + \text{id}_E) = n - \dim \ker u$. **Par le théorème du rang**, $\text{tr}(u^2) = \text{rg}(u)$.

Corrigé de l'exercice 14 : Un endomorphisme annulé par $(X-1)(X^2+1)$

1. On factorise par groupement :

$X^3 - X^2 + X - 1 = X^2(X - 1) + (X - 1) = (X - 1)(X^2 + 1)$. Le facteur $X^2 + 1$ est irréductible sur $\mathbb{R}$ et ne s'annule pas en 1. Les deux facteurs sont donc premiers entre eux. **Par le lemme des noyaux**, $E = \ker(u - \text{id}_E) \oplus \ker(u^2 + \text{id}_E)$.

2. La relation s'écrit $u \circ (u^2 - u + \text{id}_E) = \text{id}_E$. **Donc u est inversible et $u^{-1} = u^2 - u + \text{id}_E$.**

3. Le sous-espace F est le noyau d'un polynôme en u , qui commute avec u . Il est donc stable par u . Soit $v = u|_F$ l'endomorphisme induit, et $d = \dim F$. On a $v^2 = -\text{id}_F$. En passant au déterminant : $\det(v)^2 = \det(-\text{id}_F) = (-1)^d$. Or $\det(v)^2 \geq 0$ et $\det(v)^2 \neq 0$. **Donc $(-1)^d = 1$, et d est pair.** Si $d = 0$, la conclusion reste vraie.

4. On a $n = \dim \ker(u - \text{id}_E) + d$, avec d pair. Si n est impair, alors $\dim \ker(u - \text{id}_E)$ est impaire, donc non nulle. **Ainsi 1 est valeur propre de u .**

Corrigé de l'exercice 15 : Polynôme minimal d'une matrice diagonale par blocs

1. Le produit par blocs donne $M^k = \text{diag}(A^k, B^k)$ par récurrence. Par linéarité, $P(M) = \text{diag}(P(A), P(B))$ **pour tout polynôme P .**
2. D'après la question 1, $P(M) = 0$ si et seulement si $P(A) = 0$ et $P(B) = 0$. Autrement dit, P annule M si et seulement si $\pi_A | P$ et $\pi_B | P$, c'est-à-dire si et seulement si $\text{ppcm}(\pi_A, \pi_B) | P$. L'idéal annulateur de M est donc engendré par ce ppcm unitaire. **Ainsi $\pi_M = \text{ppcm}(\pi_A, \pi_B)$.**
3. Si A et B sont diagonalisables, π_A et π_B sont simplement scindés. Leur ppcm est alors le produit des $X - \lambda$ pour λ racine de l'un ou de l'autre, donc il est simplement scindé. Réciproquement, si π_M est simplement scindé, ses diviseurs π_A et π_B le sont aussi. **Donc M est diagonalisable si et seulement si A et B le sont.**

4. On a $\pi_A = (X-1)^2$, car $A \neq I_2$ et $(A - I_2)^2 = 0$. De plus $\pi_B = (X-1)(X-2)$. **Donc** $\pi_M = (X-1)^2(X-2)$, et M n'est pas diagonalisable.

Corrigé de l'exercice 16 : Sous-espaces caractéristiques d'une matrice 3x3

1. La troisième colonne de A est $(0, 0, 2)$. En développant $\det(XI_3 - A)$ selon cette colonne :

$$\chi_A = (X-2) \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & X-2 \end{vmatrix} = (X-2)(X^2 - 2X + 1) = (X-1)^2(X-2).$$

Pour $\lambda = 1$, $A - I_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Le système donne $y = x$ et $z = 0$, donc

$$E_1 = \text{Vect}((1, 1, 0)). \text{ Pour } \lambda = 2, A - 2I_3 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}. \text{ On obtient } x = 0,$$

puis $y = 0$, donc $E_2 = \text{Vect}(e_3)$. Comme $\dim E_1 = 1 < 2$, **A n'est pas diagonalisable, et** $\pi_A = \chi_A = (X-1)^2(X-2)$.

2. On calcule $(A - I_3)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. **Donc** F_1 est le plan d'équation $x - y + z = 0$, et $F_2 = E_2 = \text{Vect}(e_3)$. Les dimensions valent 2 et 1, soit les multiplicités, comme prévu par le cours.

À partir de la question 3

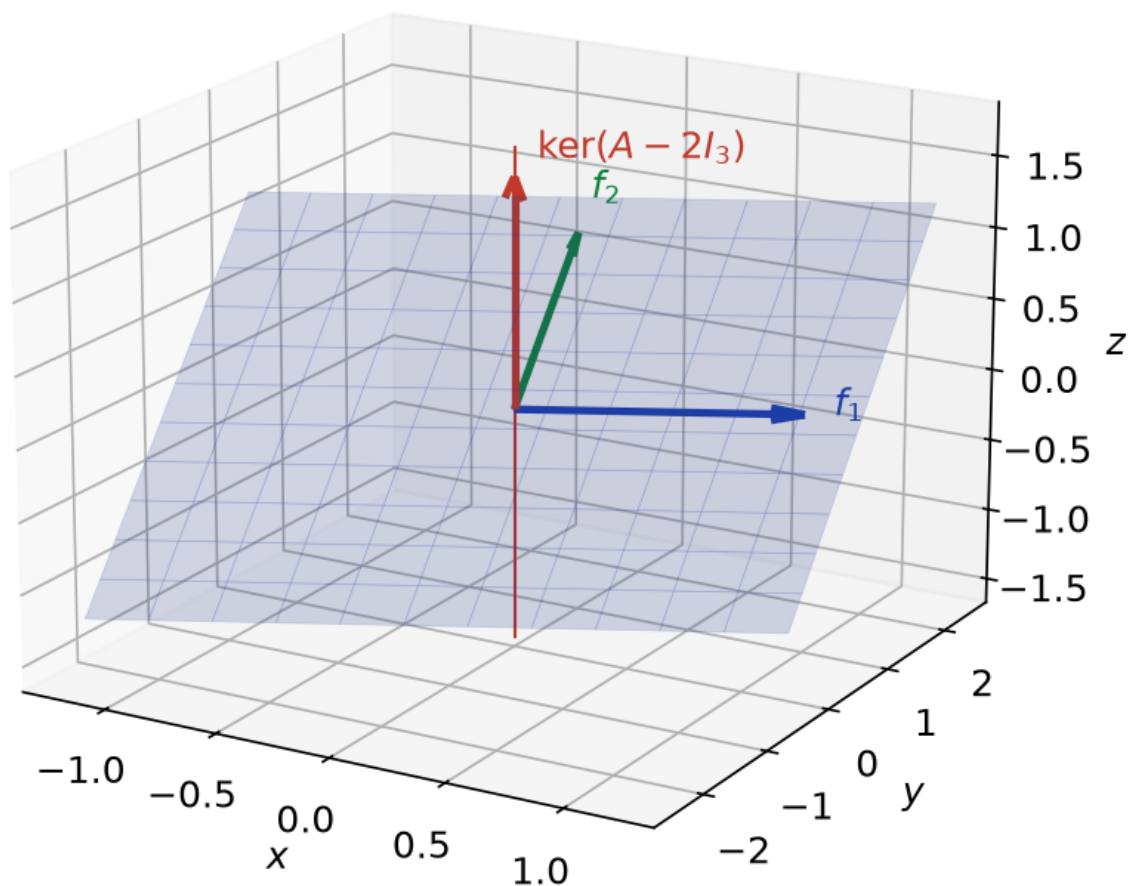
3. On prend $f_1 = (1, 1, 0)$, vecteur propre. On cherche $f_2 \in F_1$ tel que $(A - I_3)f_2 = f_1$. Le vecteur $f_2 = (0, 1, 1)$ convient : il vérifie $0 - 1 + 1 = 0$, et $(A - I_3)f_2 = (1, 1, -1 + 1) = (1, 1, 0)$. Enfin $f_3 = e_3$. Comme $Af_2 = f_2 + f_1$, on obtient

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A = Q T Q^{-1}.$$

La matrice est bien diagonale par blocs triangulaires. La figure ci-dessous représente le plan F_1 , la droite F_2 et les vecteurs f_1, f_2 .

plan $\ker(A - I_3)^2 : x - y + z = 0$

$f_1 = (1, 1, 0)$ vecteur propre, $f_2 = (0, 1, 1)$



4. On a $T^n = \begin{pmatrix} 1 & n & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$, car $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Par ailleurs,
- $$Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$
- Le produit $Q T^n Q^{-1}$ donne

$$A^n = \begin{pmatrix} 1-n & n & 0 \\ -n & n+1 & 0 \\ 2^n-1 & 1 & 2^n \end{pmatrix}.$$

Pour $n = 1$, on retrouve bien A . Pour $n = 2$, on obtient $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}$, qui est bien A^2 .

À partir de la question 5

5. On cherche une relation de Bézout entre $(X-1)^2$ et $X-2$. On a $(X-1)^2 - X(X-2) = 1$. Le projecteur sur $F_2 = \ker(A - 2I_3)$ parallèlement à F_1 est donc $q = (A - I_3)^2$. En effet, il est nul sur F_1 et vaut l'identité sur F_2 , puisque $-A(A - 2I_3)$ s'y annule. **Ainsi** $q = (A - I_3)^2$, **soit** $q(x, y, z) = (0, 0, x - y + z)$. On vérifie $q(e_3) = e_3$.

Corrigé de l'exercice 17 : L'endomorphisme de translation sur $\mathbb{R}_n[X]$

- Si $\deg P \leq n$, alors $\deg P(X+1) \leq n$. De plus, $P \rightarrow P(X+1)$ est linéaire. Donc Δ est un endomorphisme. Pour $k \geq 1$, la formule du binôme donne $\Delta(X^k) = (X+1)^k - X^k = kX^{k-1} + \dots$, de degré $k-1$. Si P est de degré $k \geq 1$, de coefficient dominant c , alors $\Delta(P)$ est de degré $k-1$, de coefficient dominant kc . **Donc** Δ fait baisser le degré de 1, et Δ annule les constantes.
- Chaque application de Δ fait baisser le degré, jusqu'à obtenir une constante, puis 0. Pour $\deg P \leq n$, $\Delta^{n+1}(P) = 0$. Ainsi $\Delta^{n+1} = 0$. Ensuite, le coefficient dominant est multiplié par le degré à chaque étape. **Donc** $\Delta^n(X^n) = n! \neq 0$.

À partir de la question 3

3. D'après la question 2, Δ est nilpotent d'indice $n+1$, donc $\pi_{\Delta} = X^{n+1}$. Comme $\Phi = \text{id} + \Delta$, un polynôme P annule Φ si et seulement si $P(X+1)$ annule Δ . Ainsi $\pi_{\Phi} = (X-1)^{n+1}$. Par ailleurs, $\dim \mathbb{R}_n[X] = n+1$, donc χ_{Φ} est unitaire de degré $n+1$ et divisible par π_{Φ} . D'où $\chi_{\Phi} = (X-1)^{n+1}$. Comme $n \geq 1$, π_{Φ} a une racine multiple : Φ n'est pas diagonalisable. Son seul sous-espace propre est $\ker \Delta$, c'est-à-dire les polynômes constants.
4. Comme Δ et id commutent, on a
- $$(\text{id} + \Delta) \circ \sum_{k=0}^n (-1)^k \Delta^k = \text{id} - (-1)^{n+1} \Delta^{n+1} = \text{id}. \text{ Donc}$$
- $$\Phi^{-1} = \sum_{k=0}^n (-1)^k \Delta^k, \text{ et } \Phi^{-1}(P) = P(X-1).$$
- La figure de l'énoncé illustre Φ comme un décalage du graphe ; Φ^{-1} le décale en sens inverse.

Corrigé de l'exercice 18 : Endomorphisme induit et codiagonalisation

1. Pour tout polynôme P et tout $x \in F$, on a $P(u_F)(x) = P(u)(x)$. En particulier, $\pi_u(u_F) = 0$, donc π_{u_F} divise π_u . Comme u est diagonalisable, π_u est simplement scindé, et son diviseur π_{u_F} aussi. Donc u_F est diagonalisable.
2. Soit $\lambda \in \text{Sp}(u)$ et $x \in E_{\lambda}(u)$. Alors $u(v(x)) = v(u(x)) = \lambda v(x)$. Donc $v(x) \in E_{\lambda}(u)$: chaque sous-espace propre de u est stable par v .
3. On écrit $E = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(u)} E_{\lambda}(u)$, car u est diagonalisable. Chaque $E_{\lambda}(u)$ est stable par v , et v est diagonalisable. Par la question 1, l'induit de v sur $E_{\lambda}(u)$ est diagonalisable. On choisit dans chaque $E_{\lambda}(u)$ une base de vecteurs propres de cet induit. Ce sont des vecteurs propres de v , et aussi de u (pour la valeur λ). En les réunissant, on obtient une base de E formée de vecteurs propres communs.
4. Dans cette base commune, u et v ont des matrices diagonales D et D' . Les matrices de $u+v$ et de $u \circ v$ sont alors $D + D'$ et DD' , diagonales. Donc $u+v$ et $u \circ v$ sont diagonalisables.

Corrigé de l'exercice 19 : Commutant d'une matrice à valeurs propres distinctes

1. La matrice A a n valeurs propres distinctes, qui sont toutes racines de π_A . Donc $\deg \pi_A \geq n$. Or π_A divise χ_A , de degré n , et les deux sont unitaires. **Ainsi**
$$\pi_A = \chi_A = \prod_{i=1}^n (X - \lambda_i) \text{ et } \dim \mathbb{K}[A] = n.$$
2. Soit x un vecteur propre de A pour λ_i . Comme $AB = BA$, on a $A(Bx) = \lambda_i Bx$, donc $Bx \in E_{\lambda_i}(A)$. Or ce sous-espace propre est une droite, car il y a n valeurs propres distinctes en dimension n . **Donc** $Bx = \mu_i x$ **pour un scalaire** μ_i : x **est vecteur propre de** B .
3. Soit $(x_1, \dots, x_n)$ une base de vecteurs propres de A . Par la question 2, $Bx_i = \mu_i x_i$. Soit L le polynôme d'interpolation de Lagrange tel que $L(\lambda_i) = \mu_i$ pour tout i ; il existe car les λ_i sont distincts. Alors $L(A)x_i = L(\lambda_i)x_i = \mu_i x_i = Bx_i$. Les matrices $L(A)$ et B coïncident sur une base, donc $B = L(A) \in \mathbb{K}[A]$. L'inclusion inverse est claire, car tout polynôme en A commute avec A . **Ainsi** $\mathcal{C}(A) = \mathbb{K}[A]$.
4. Par les questions 1 et 3, $\dim \mathcal{C}(A) = \dim \mathbb{K}[A] = n$.

Corrigé de l'exercice 20 : Racines carrées d'une matrice

1. On a $\text{tr}(A) = 5$ et $\det(A) = -14 + 18 = 4$. Donc
 $\chi_A = X^2 - 5X + 4 = (X - 1)(X - 4)$. On vérifie $A(1, 1) = (1, 1)$ et $A(1, 2) = (-2 + 6, -6 + 14) = (4, 8)$. **Ainsi** $\text{Sp}(A) = \{1, 4\}$, **avec les vecteurs propres** $x_1 = (1, 1)$ **et** $x_2 = (1, 2)$.
2. Si $B^2 = A$, alors $AB = B^3 = BA$. La matrice A a deux valeurs propres distinctes en dimension 2. **Par l'exercice 19**, $B \in \mathbb{R}[A]$, c'est-à-dire $B = aA + bI_2$ car $\dim \mathbb{R}[A] = 2$.
3. Alors $Bx_1 = (a + b)x_1$ et $Bx_2 = (4a + b)x_2$. La condition $B^2 = A$ équivaut à $(a + b)^2 = 1$ et $(4a + b)^2 = 4$, puisque (x_1, x_2) est une base. On pose $a + b = \varepsilon_1$

et $4a + b = 2\varepsilon_2$, avec $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \{-1, 1\}$. Il vient $a = \frac{2\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{3}$ et $b = \frac{4\varepsilon_1 - 2\varepsilon_2}{3}$.
 Pour $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1$: $B = \frac{1}{3}(A + 2I_2)$. Pour $\varepsilon_1 = 1, \varepsilon_2 = -1$: $B = -A + 2I_2$.

Les quatre solutions sont

$$\pm \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \text{ et } \pm \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 6 & -5 \end{pmatrix}.$$

Vérifions la première : $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -6 & 7 \end{pmatrix} = A$.

À partir de la question 4

4. On a $\text{tr}(C) = 3$ et $\det(C) = -54 + 50 = -4$, donc
 $\chi_C = X^2 - 3X - 4 = (X + 1)(X - 4)$. De plus, $C(1, 1) = (-1, -1)$, donc
 $x_1 = (1, 1)$ est propre pour -1 . Supposons $B^2 = C$ avec B réelle. Comme à la question
 2, B commute avec C , et x_1 est vecteur propre de B : $Bx_1 = \mu x_1$ avec $\mu \in \mathbb{R}$.
 Alors $Cx_1 = B^2x_1 = \mu^2 x_1$, d'où $\mu^2 = -1$. **C'est impossible dans $\mathbb{R}$: C n'a pas
 de racine carrée réelle.**

Point de méthode : une matrice qui commute avec A laisse stables ses sous-espaces propres ; quand
 ils sont des droites, elle est diagonale dans la même base.

Corrigé de l'exercice 21 : Problème : l'endomorphisme $M \mapsto M + \text{tr}(M)I_n$

- La trace est linéaire, donc u est linéaire. De plus, $u(M) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Ainsi u est un
 endomorphisme. Ensuite, $v(M) = \text{tr}(M)I_n$. Comme $\text{tr}(I_n) = n$, on obtient
 $v^2(M) = \text{tr}(\text{tr}(M)I_n)I_n = n \text{tr}(M)I_n$. **Donc** $v^2 = n v$.
- On remplace v par $u - \text{id}$: $(u - \text{id})^2 - n(u - \text{id}) = 0$, soit
 $(u - \text{id}) \circ (u - (n+1)\text{id}) = 0$. Le polynôme $(X - 1)(X - n - 1)$ annule donc u . Or
 $u \neq \text{id}$, car $v(I_n) = nI_n \neq 0$. Et $u \neq (n+1)\text{id}$, car $u(E_{12}) = E_{12}$ puisque

$\text{tr}(E_{12}) = 0$ (ici $n \geq 2$ sert). **Ainsi** $\pi_u = (X - 1)(X - n - 1)$.

3. Le polynôme π_u est simplement scindé, car $n + 1 \neq 1$. **Donc** u est diagonalisable.

D'abord, $\ker(u - \text{id}) = \ker v = \ker(\text{tr})$, hyperplan de dimension $n^2 - 1$. Ensuite,

$u(M) = (n + 1)M$ équivaut à $\text{tr}(M) I_n = nM$, donc M est scalaire ;

réciroquement $u(I_n) = (n + 1) I_n$. **Ainsi** $E_{n+1}(u) = \text{Vect}(I_n)$, de dimension 1, et $E_1(u) = \ker(\text{tr})$, de dimension $n^2 - 1$.

4. Avec les polynômes de Lagrange aux points 1 et $n + 1$, on obtient

$$p = \frac{u - (n + 1) \text{id}}{-n}, \quad q = \frac{u - \text{id}}{n}.$$

Ici p projette sur $\ker(\text{tr})$ et q sur $\text{Vect}(I_n)$. Concrètement, $q(M) = \frac{\text{tr}(M)}{n} I_n$ et $p(M) = M - \frac{\text{tr}(M)}{n} I_n$. On retrouve la décomposition classique d'une matrice en partie de trace nulle et partie scalaire.

À partir de la question 5

5. On a $u = p + (n + 1)q$, avec $p^2 = p$, $q^2 = q$ et $pq = qp = 0$. Par récurrence, $u^k = p + (n + 1)^k q$. **Ainsi** $u^k(M) = M + \frac{(n + 1)^k - 1}{n} \text{tr}(M) I_n$. Pour $k = 1$, on retrouve bien $u(M)$. Ensuite, dans une base de vecteurs propres, la matrice de u est diagonale avec $n^2 - 1$ coefficients égaux à 1 et un coefficient égal à $n + 1$. **Donc** $\text{tr}(u) = n^2 - 1 + n + 1 = n^2 + n$ et $\det(u) = n + 1$.

6. Comme $\det(u) = n + 1 \neq 0$, l'endomorphisme u est inversible. La formule de la question 5 reste valable pour $k = -1$, car $p + (n + 1)^{-1} q$ est l'inverse de $p + (n + 1) q$. On

obtient $u^{-1}(M) = M + \frac{(n + 1)^{-1} - 1}{n} \text{tr}(M) I_n$. Or

$$\frac{(n + 1)^{-1} - 1}{n} = \frac{-n}{n(n + 1)} = -\frac{1}{n + 1}. \text{ Ainsi } u^{-1}(M) = M - \frac{\text{tr}(M)}{n + 1} I_n, \text{ et l'unique}$$

solution de l'équation est $M = B - \frac{\text{tr}(B)}{n + 1} I_n$. Vérification :

$$\text{tr}(M) = \text{tr}(B) - \frac{n}{n + 1} \text{tr}(B) = \frac{\text{tr}(B)}{n + 1}, \text{ donc } M + \text{tr}(M) I_n = B.$$

À partir de la question 7

7. Posons $v_\alpha = u_\alpha - \text{id}$, de sorte que $v_\alpha(M) = a \text{tr}(M) I_n$. Le même calcul donne $v_\alpha^2 = na v_\alpha$, d'où $(u_\alpha - \text{id})(u_\alpha - (1 + na)\text{id}) = 0$. Les valeurs propres de u_α sont 1 sur $\ker(\text{tr})$ et $1 + na$ sur $\text{Vect}(I_n)$, car $u_\alpha(I_n) = (1 + na) I_n$. **Donc u_α est inversible si et seulement si $a \neq -\frac{1}{n}$.** Pour $a = -\frac{1}{n}$, on a $u_\alpha(M) = M - \frac{\text{tr}(M)}{n} I_n$. **C'est le projecteur p sur $\ker(\text{tr})$ parallèlement à $\text{Vect}(I_n)$.**

Point de méthode : dès qu'un endomorphisme s'écrit $\text{id} + v$ avec v de rang 1, on cherche une relation $v^2 = cv$; elle fournit un polynôme annulateur de degré 2.

[Revenir aux énoncés des exercices](#)

Pour aller plus loin en maths spé

- Le cours : [polynômes d'endomorphismes, cours de maths spé](#)
- Les énoncés : [exercices de maths spé sur polynômes d'endomorphismes](#)
- À maîtriser avant : [Diagonalisation, trigonalisation et nilpotence](#), [Anneaux, idéaux, \$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\$ et algèbres](#)
- Chapitre précédent : [Diagonalisation, trigonalisation et nilpotence](#)
- Chapitre suivant : [Normes, espaces vectoriels normés et suites](#)
- Tester vos connaissances : [QCM de maths spé par chapitre](#)
- Le sommaire : [tous les chapitres de maths spé](#) et les [chapitres de maths sup](#)