

Polynômes

I. L'anneau des polynômes $\mathbb{K}[X]$

Dans tout le chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Un polynôme n'est pas une fonction : c'est d'abord une suite de coefficients. Ce point de vue formel permet de dériver, de diviser et de factoriser sans parler de variable réelle. Ensuite, on relie ce point de vue à la fonction polynomiale associée.

Définition :

Un polynôme à coefficients dans $\mathbb{K}$ est une suite $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathbb{K}$ nulle à partir d'un certain rang. On le note $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$. L'ensemble de ces polynômes est noté $\mathbb{K}[X]$.

La somme se fait coefficient par coefficient ; le produit est défini par

$$\left(\sum_i a_i X^i \right) \left(\sum_j b_j X^j \right) = \sum_k \left(\sum_{i+j=k} a_i b_j \right) X^k.$$

Muni de ces deux lois, $\mathbb{K}[X]$ est un anneau commutatif. Son neutre additif est le polynôme nul, et son neutre multiplicatif est le polynôme constant 1.

Définition :

Soit $P = \sum a_k X^k$ non nul. Le **degré** de P est le plus grand entier n tel que $a_n \neq 0$; on le note $\deg P$. Le coefficient a_n est le **coefficient dominant**. Le polynôme est dit **unitaire** si $a_n = 1$. Par convention, $\deg 0 = -\infty$.

Proposition :

Pour tous $P, Q \in \mathbb{K}[X]$: $\deg(P+Q) \leq \max(\deg P, \deg Q)$ et $\deg(PQ) = \deg P + \deg Q$. En particulier, $\mathbb{K}[X]$ est intègre : si $PQ = 0$, alors $P = 0$ ou $Q = 0$. De plus, les inversibles de $\mathbb{K}[X]$ sont exactement les constantes non nulles.

Démonstration :

Si P et Q sont non nuls, de coefficients dominants a_n et b_m , le coefficient de X^{n+m} dans PQ vaut $a_n b_m$. En effet, les autres produits $a_i b_j$ avec $i+j = n+m$ contiennent un facteur nul. Or $a_n b_m \neq 0$ car $\mathbb{K}$ est un corps. Donc $\deg(PQ) = n+m$, et $PQ \neq 0$. Enfin, si $PQ = 1$, alors $\deg P + \deg Q = 0$, donc P et Q sont constants.

On définit aussi le **polynôme dérivé** de façon purement algébrique : si $P = \sum a_k X^k$, alors $P' = \sum_{k \geq 1} k a_k X^{k-1}$. Les règles usuelles restent vraies : $(PQ)' = P'Q + PQ'$, et $\deg P' = \deg P - 1$ si $\deg P \geq 1$.

Exemple :

Soit $P = (X+1)^5 - (X-1)^5$. Par la formule du binôme, les termes de degré impair s'annulent. Ainsi, $P = 2(5X^4 + 10X^2 + 1)$. Par conséquent, $\deg P = 4$ et son coefficient dominant vaut 10, alors que chaque terme est de degré 5.

II. Division euclidienne des polynômes

La division euclidienne est l'outil central du chapitre. Elle joue dans $\mathbb{K}[X]$ le même rôle que dans $\mathbb{Z}$. Le degré y remplace simplement la valeur absolue.

Théorème :

Soient $A, B \in \mathbb{K}[X]$ avec $B \neq 0$. Il existe un unique couple (Q, R) de polynômes tel que $A = BQ + R$ et $\deg R < \deg B$. On appelle Q le quotient et R le reste.

Démonstration :

Unicité. Si $A = BQ_1 + R_1 = BQ_2 + R_2$, alors $B(Q_1 - Q_2) = R_2 - R_1$. Le membre de droite est de degré strictement inférieur à $\deg B$. Donc $Q_1 - Q_2 = 0$, sinon le membre de gauche serait de degré au moins $\deg B$. Il vient ensuite $R_1 = R_2$.

Existence. On raisonne par récurrence forte sur $n = \deg A$. Si $n < \deg B$, le couple $(0, A)$ convient. Sinon, notons a et b les coefficients dominants de A et B , et $m = \deg B$. Le polynôme $A_1 = A - \frac{a}{b} X^{n-m} B$ est de degré strictement inférieur à n . Par hypothèse de récurrence, $A_1 = BQ_1 + R_1$ avec $\deg R_1 < m$. Finalement, $A = B\left(Q_1 + \frac{a}{b} X^{n-m}\right) + R_1$.

La preuve d'existence est un algorithme : on élimine à chaque étape le terme de plus haut degré. C'est exactement la « division posée » apprise au lycée pour les entiers.

Méthode :

Pour diviser A par B : divisez le terme dominant de A par celui de B , ce qui donne un monôme du quotient. Multipliez B par ce monôme et soustrayez le résultat de A . Recommencez avec le nouveau polynôme tant que son degré est au moins $\deg B$. Enfin, vérifiez toujours le résultat en développant $BQ + R$.

Exemple :

Divisons $A = X^4 + 2X^3 - X + 3$ par $B = X^2 + X + 1$. D'abord,

$A - X^2 B = X^3 - X^2 - X + 3$. Ensuite, on retranche XB : il reste $-2X^2 - 2X + 3$. Enfin, on ajoute $2B$: il reste 5 . Donc $Q = X^2 + X - 2$ et $R = 5$.

Définition :

On dit que B **divise** A , et on note $B \mid A$, s'il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $A = BQ$. Lorsque $B \neq 0$, cela revient à dire que le reste de la division de A par B est nul.

Deux polynômes qui se divisent mutuellement sont dits **associés** : ils diffèrent d'une constante non nulle. Ainsi, dans chaque classe d'associés, il existe un unique polynôme unitaire. Il joue le rôle de l'entier positif dans $\mathbb{Z}$. Le tableau ci-dessous résume cette analogie, qui guide tout le chapitre.

Notion	Entiers $\mathbb{Z}$	Polynômes $\mathbb{K}[X]$
Division euclidienne	$a = bq + r, 0 \leq r < b $	$A = BQ + R, \deg R < \deg B$
Taille	valeur absolue $ n $	degré $\deg P$
Inversibles	± 1	constantes non nulles
Éléments « premiers »	nombres premiers $2, 3, 5, \dots$	polynômes irréductibles
Normalisation	entier positif	polynôme unitaire
PGCD et Bézout	$au + bv = \text{pgcd}(a, b)$	$AU + BV = \text{pgcd}(A, B)$
Décomposition	produit de nombres premiers	produit d'irréductibles

III. Racines, multiplicité et polynôme dérivé

1. Racines et factorisation par $X - a$

À tout polynôme $P = \sum a_k X^k$ on associe sa fonction polynomiale $x \rightarrow \sum a_k x^k$. On note encore $P(a)$ la valeur en $a \in \mathbb{K}$. On dit que a est une **racine** de P si $P(a) = 0$.

Théorème :

Soient $P \in \mathbb{K}[X]$ et $a \in \mathbb{K}$. Le reste de la division de P par $X - a$ est la constante $P(a)$. Par conséquent, a est racine de P si et seulement si $(X - a) \mid P$.

Démonstration :

On écrit $P = (X - a)Q + R$ avec $\deg R < 1$. Le reste R est donc une constante c . En évaluant en a , on obtient $P(a) = 0 \cdot Q(a) + c = c$. Le résultat s'en déduit.

Corollaire :

Un polynôme non nul de degré n possède au plus n racines distinctes. Par conséquent, un polynôme de degré au plus n qui s'annule en $n + 1$ points distincts est le polynôme nul. De même, un polynôme qui a une infinité de racines est nul.

Démonstration :

Si $a_1, \dots, a_p$ sont des racines distinctes de P , on montre par récurrence que $(X - a_1) \dots (X - a_p)$ divise P . En effet, si $P = (X - a_1) \dots (X - a_{p-1}) S$, on évalue en a_p . Le produit des $a_p - a_i$ est non nul, donc $S(a_p) = 0$ et $X - a_p$ divise S . Ainsi, $p \leq \deg P$.

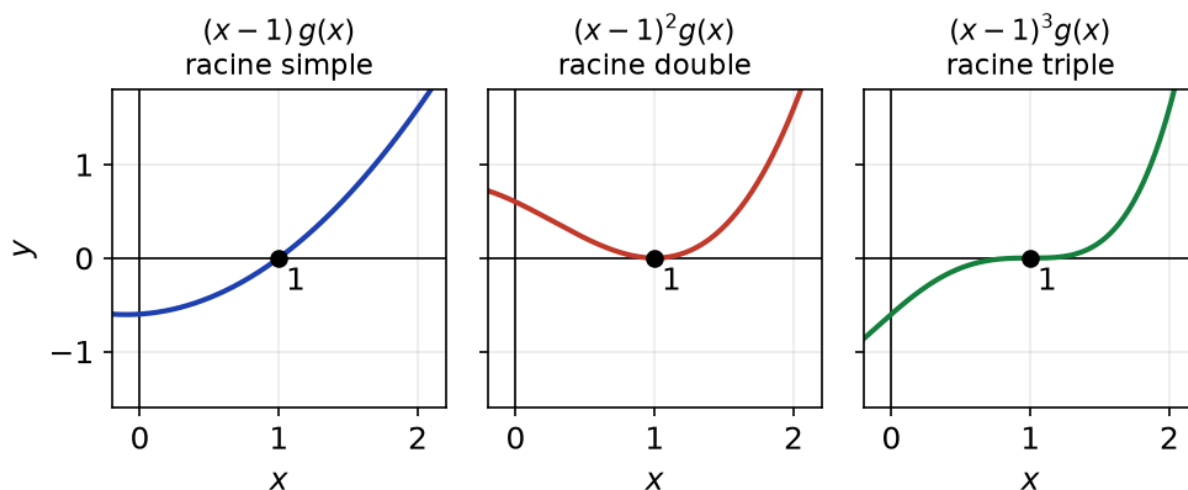
Ce corollaire justifie une identification commode. Deux polynômes qui coïncident en une infinité de points sont égaux. On peut donc confondre polynôme et fonction polynomiale sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

2. Multiplicité d'une racine

Définition :

Soient P non nul et $a \in \mathbb{K}$. La **multiplicité** de a dans P est le plus grand entier m tel que $(X - a)^m \mid P$. Autrement dit, $P = (X - a)^m Q$ avec $Q(a) \neq 0$. On parle de racine simple si $m = 1$, double si $m = 2$, et ainsi de suite.

Graphiquement, sur $\mathbb{R}$, la multiplicité se voit. Une racine simple est un point où la courbe traverse l'axe. En revanche, une racine double donne une tangente horizontale sans traversée. Enfin, une racine triple donne un point d'inflexion à tangente horizontale, comme le montre la figure ci-dessous.



Pour calculer une multiplicité, on dispose de la formule de Taylor. Elle est valable pour les polynômes sans aucun reste, car les dérivées d'ordre supérieur au degré sont nulles.

Théorème :

Formule de Taylor. Pour P de degré au plus n et $a \in \mathbb{K}$:

$$P = \sum_{k=0}^n \frac{P^{(k)}(a)}{k!} (X - a)^k.$$

Par conséquent, a est racine de multiplicité exactement m si et seulement si $P(a) = P'(a) = \dots = P^{(m-1)}(a) = 0$ et $P^{(m)}(a) \neq 0$.

Démonstration :

Les polynômes $(X - a)^k$, pour $0 \leq k \leq n$, sont de degrés échelonnés. On peut donc écrire $P = \sum c_k (X - a)^k$, par divisions successives. En dérivant j fois puis en évaluant en a , seul le terme d'indice j survit : $P^{(j)}(a) = j! c_j$. Ensuite, $(X - a)^m$ divise P si et seulement si $c_0 = \dots = c_{m-1} = 0$. On conclut grâce à la formule $c_j = P^{(j)}(a)/j!$.

Méthode :

Pour déterminer la multiplicité de a dans P : calculez $P(a)$, puis $P'(a)$, puis $P''(a)$, et arrêtez-vous à la première dérivée non nulle en a . Son ordre est la multiplicité. Ensuite, pour factoriser, divisez P par $(X - a)^m$, ou identifiez les coefficients du quotient.

Exemple :

Soit $P = X^3 - 3X + 2$. On a $P(1) = 0$, puis $P' = 3X^2 - 3$, donc $P'(1) = 0$. Enfin, $P''(1) = 6 \neq 0$. Ainsi, 1 est racine double, et $P = (X - 1)^2 (X + 2)$.

Remarque :

Une racine de P est multiple si et seulement si elle est aussi racine de P' . Par conséquent, un polynôme dont P et P' n'ont aucune racine commune n'a que des racines simples.

IV. Factorisation des polynômes dans $\mathbb{C}[X]$ et $\mathbb{R}[X]$

1. Le théorème de d'Alembert-Gauss

Théorème :

Théorème de d'Alembert-Gauss. Tout polynôme non constant de $\mathbb{C}[X]$ possède au moins une racine dans $\mathbb{C}$. On dit que $\mathbb{C}$ est algébriquement clos.

Ce théorème est admis en L1. Sa démonstration utilise de l'analyse : un minimum de $|P|$ sur $\mathbb{C}$, ou bien des outils de variable complexe. En revanche, ses conséquences algébriques se démontrent facilement.

Définition :

Un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ est **irréductible** s'il est non constant et si ses seuls diviseurs sont les constantes non nulles et les associés de P . Les irréductibles sont les analogues des nombres premiers.

Théorème :

Tout polynôme non constant de $\mathbb{K}[X]$ s'écrit comme produit d'une constante et de polynômes irréductibles unitaires. Cette écriture est unique à l'ordre près des facteurs.

Corollaire :

Les irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ sont les polynômes de degré 1. Ainsi, tout $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré $n \geq 1$ et de coefficient dominant a s'écrit

$$P = a \prod_{k=1}^r (X - z_k)^{m_k},$$

où les z_k sont ses racines distinctes et $m_1 + \dots + m_r = n$. On dit que P est **scindé**.

Démonstration :

Soit P irréductible dans $\mathbb{C}[X]$. D'après le théorème de d'Alembert-Gauss, il a une racine z , donc $X - z$ le divise. Comme P est irréductible, il est associé à $X - z$: il est de degré 1. La factorisation s'obtient ensuite par récurrence sur le degré.

2. Irréductibles de $\mathbb{R}[X]$

Sur $\mathbb{R}$, la situation est plus riche. En effet, $X^2 + 1$ n'a pas de racine réelle, donc il est irréductible dans $\mathbb{R}[X]$. L'outil clé est la conjugaison complexe.

Lemme :

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ et $z \in \mathbb{C}$. Si z est racine de P de multiplicité m , alors $\bar{z}$ est aussi racine de P , avec la même multiplicité.

Démonstration :

Les coefficients de P sont réels, donc $\overline{P(z)} = P(\bar{z})$. Il en va de même pour toutes les dérivées. Par conséquent, $P^{(k)}(z) = 0$ équivaut à $P^{(k)}(\bar{z}) = 0$. La caractérisation de la multiplicité par les dérivées conclut.

Théorème :

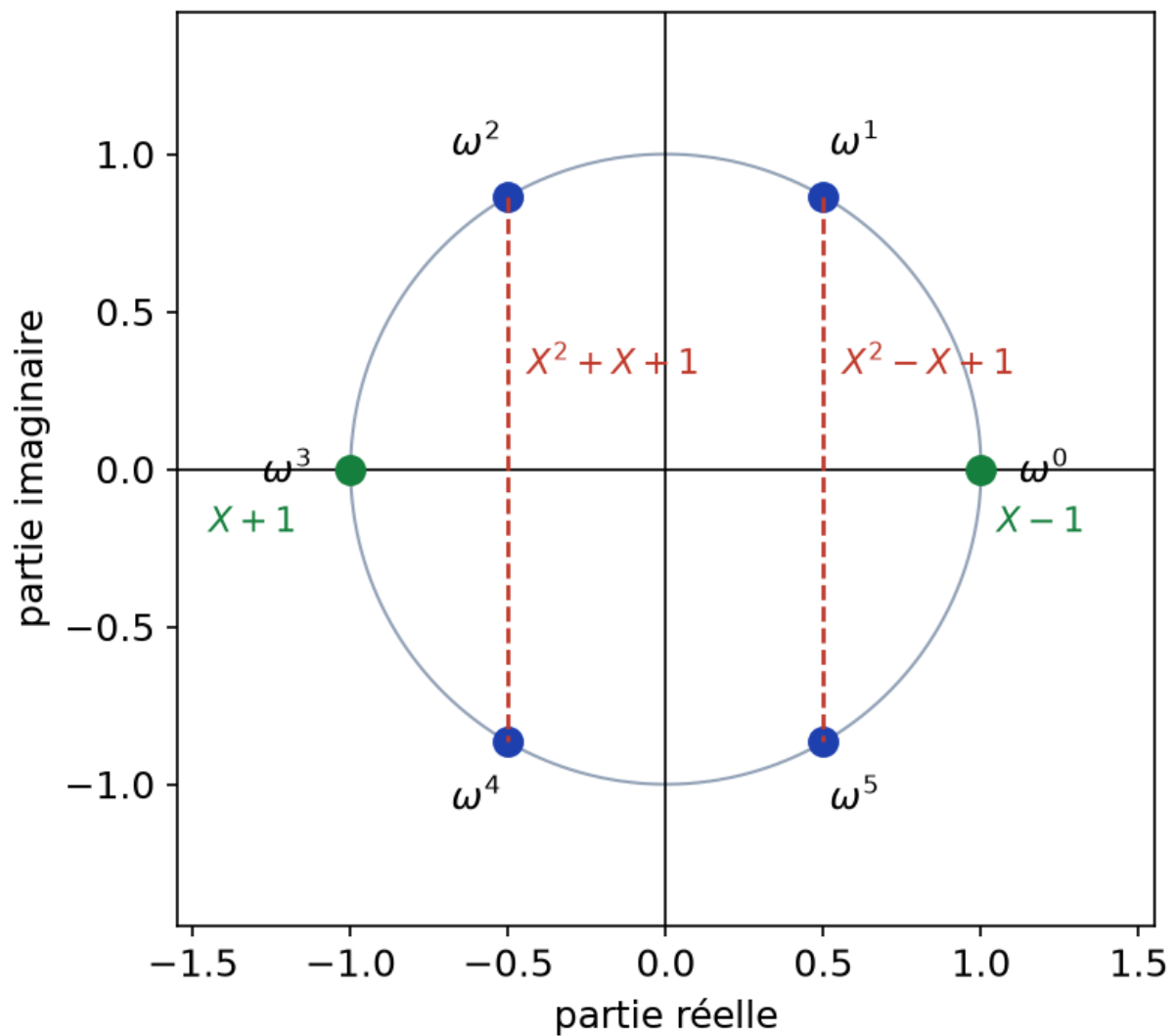
Les irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ sont les polynômes de degré 1 et les polynômes de degré 2 de discriminant strictement négatif. Tout $P \in \mathbb{R}[X]$ non constant s'écrit donc

$$P = a \prod_i (X - x_i)^{m_i} \prod_j (X^2 + p_j X + q_j)^{n_j}, \quad p_j^2 - 4q_j < 0.$$

Démonstration :

Soit P irréductible dans $\mathbb{R}[X]$, de degré au moins 2. Il n'a pas de racine réelle, sinon $X - x$ le diviserait. Par d'Alembert-Gauss, il a une racine $z \notin \mathbb{R}$, et $\bar{z}$ est aussi racine. Donc $(X - z)(X - \bar{z}) = X^2 - 2\operatorname{Re}(z)X + |z|^2$ divise P dans $\mathbb{C}[X]$. Or ce produit est réel : la division euclidienne dans $\mathbb{R}[X]$ donne le même quotient, par unicité. Ainsi, il divise P dans $\mathbb{R}[X]$, et P lui est associé.

Concrètement, on factorise d'abord dans $\mathbb{C}[X]$, puis on regroupe les racines conjuguées deux à deux. La figure ci-dessous montre ce regroupement pour les six racines sixièmes de l'unité.



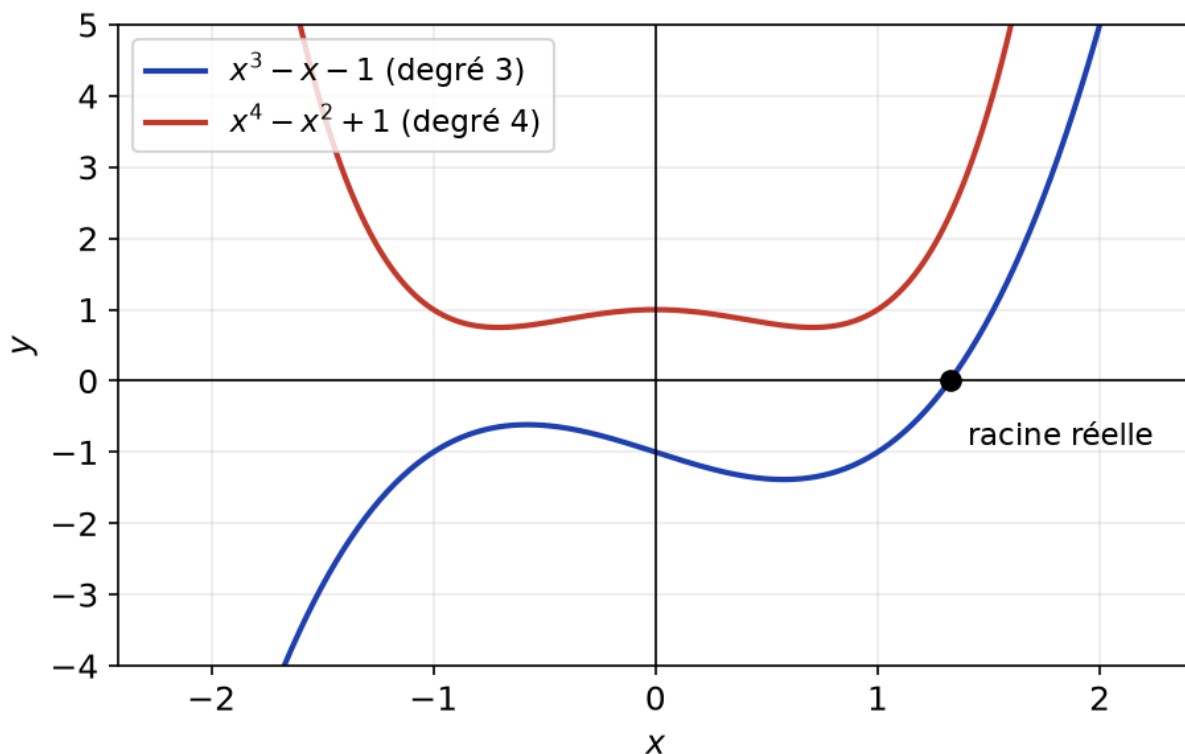
Exemple :

Les racines de $X^6 - 1$ sont les ω^k , où $\omega = e^{i\pi/3}$. Les racines réelles 1 et -1 donnent $X - 1$ et $X + 1$. Ensuite, ω et $\omega^5 = \bar{\omega}$ donnent $X^2 - X + 1$. De même, ω^2 et ω^4 donnent $X^2 + X + 1$. Donc $X^6 - 1 = (X-1)(X+1)(X^2 - X + 1)(X^2 + X + 1)$ dans $\mathbb{R}[X]$.

Corollaire :

Tout polynôme réel de degré impair possède au moins une racine réelle.

En effet, les racines non réelles vont par paires conjuguées de même multiplicité. Leur contribution au degré est donc paire. Un polynôme de degré pair, lui, peut n'avoir aucune racine réelle, comme le montre la figure ci-dessous.



V. Relations entre coefficients et racines

Lorsqu'un polynôme est scindé, ses coefficients s'expriment à l'aide de ses racines. Il suffit de développer la forme factorisée. On obtient ainsi des informations sur les racines sans les calculer.

Définition :

Soient $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{K}$. Les **fonctions symétriques élémentaires** sont $\sigma_1 = \sum_i x_i$, $\sigma_2 = \sum_{i < j} x_i x_j$, et plus généralement $\sigma_k = \sum_{i_1 < \dots < i_k} x_{i_1} \dots x_{i_k}$. En particulier, $\sigma_n = x_1 x_2 \dots x_n$.

Théorème :

Soit $P = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \dots + a_0$, avec $a_n \neq 0$, scindé de racines $x_1, \dots, x_n$ comptées avec multiplicité. Alors, pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$:

$$\sigma_k = (-1)^k \frac{a_{n-k}}{a_n}.$$

Démonstration :

On a $P = a_n (X - x_1) \dots (X - x_n)$. En développant, un terme en X^{n-k} s'obtient en choisissant $-x_i$ dans exactement k facteurs, et X dans les autres. La somme de ces termes vaut $(-1)^k \sigma_k X^{n-k}$. Il suffit alors d'identifier les coefficients.

Pour $n = 2$, on retrouve les formules du lycée : somme $-b/a$ et produit c/a . Pour $n = 3$, avec $P = aX^3 + bX^2 + cX + d$, on obtient $\sigma_1 = -b/a$, $\sigma_2 = c/a$ et $\sigma_3 = -d/a$.

Méthode :

Pour calculer une expression symétrique des racines, exprimez-la à l'aide des σ_k . Par exemple, $\sum x_i^2 = \sigma_1^2 - 2\sigma_2$ et, si $\sigma_n \neq 0$, $\sum \frac{1}{x_i} = \frac{\sigma_{n-1}}{\sigma_n}$. Inversement, pour résoudre un système donnant $\sigma_1, \dots, \sigma_n$, cherchez les racines du polynôme $X^n - \sigma_1 X^{n-1} + \sigma_2 X^{n-2} - \dots + (-1)^n \sigma_n$.

Exemple :

Soient a, b, c les racines de $X^3 - 2X + 5$. Ici $\sigma_1 = 0$, $\sigma_2 = -2$ et $\sigma_3 = -5$. Donc $a^2 + b^2 + c^2 = 0 - 2 \times (-2) = 4$. De plus, $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{-2}{-5} = \frac{2}{5}$.

VI. PGCD de polynômes, Bézout et irréductibles

La division euclidienne permet de reproduire dans $\mathbb{K}[X]$ toute l'arithmétique de $\mathbb{Z}$. C'est précisément l'analogie structurelle annoncée : même algorithme, mêmes théorèmes, mêmes démonstrations.

Théorème :

Soient $A, B \in \mathbb{K}[X]$ non tous deux nuls. Il existe un unique polynôme unitaire D tel que les diviseurs communs à A et B soient exactement les diviseurs de D . On l'appelle le **PGCD** de A et B , noté $A \wedge B$. De plus, il existe $U, V \in \mathbb{K}[X]$ tels que $AU + BV = D$ (**relation de Bézout**).

Démonstration :

L'ensemble $I = \{AU + BV\}$ est stable par somme et par multiplication par un polynôme. Il contient un élément non nul. Choisissons-y un polynôme unitaire D de degré minimal. Soit $P \in I$: on divise $P = DQ + R$. Alors $R = P - DQ \in I$ et $\deg R < \deg D$, donc $R = 0$ par minimalité. Ainsi, D divise tout élément de I , en particulier A et B . Réciproquement, tout diviseur commun divise $AU + BV = D$. L'unicité vient du fait que deux unitaires associés sont égaux.

En pratique, on calcule le PGCD par l'**algorithme d'Euclide**. On utilise que $A \wedge B = B \wedge R$ si R est le reste de A par B . Le dernier reste non nul, rendu unitaire, est le PGCD. En remontant les calculs, on obtient U et V .

Exemple :

Prenons $A = X^3 - 1$ et $B = X^2 - 1$. D'abord, $A = XB + (X - 1)$. Ensuite, $B = (X + 1)(X - 1) + 0$. Le dernier reste non nul est $X - 1$, donc $A \wedge B = X - 1$. En outre, la première égalité donne directement $A - XB = X - 1$: c'est une relation de Bézout.

Définition :

Deux polynômes A et B sont **premiers entre eux** si $A \wedge B = 1$, c'est-à-dire s'il existe U, V tels que $AU + BV = 1$.

Théorème :

Lemme de Gauss. Si $A \mid BC$ et $A \wedge B = 1$, alors $A \mid C$. En particulier, si un irréductible P divise un produit BC , alors P divise B ou P divise C .

Démonstration :

On écrit $AU + BV = 1$, puis on multiplie par C : $C = ACU + BCV$. Or A divise ACU et BC , donc A divise C . Pour la seconde assertion, si P ne divise pas B , alors $P \wedge B = 1$, car les seuls diviseurs unitaires de P sont 1 et P normalisé.

Le lemme de Gauss donne l'unicité de la décomposition en irréductibles, exactement comme pour les entiers. Sur $\mathbb{C}$, deux polynômes sont premiers entre eux si et seulement s'ils n'ont aucune racine commune.

Attention :

L'irréductibilité dépend du corps. Par exemple, $X^2 - 2$ est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$ mais pas dans $\mathbb{R}[X]$. De même, $X^4 + 4$ n'a aucune racine réelle, mais il n'est pas irréductible : $X^4 + 4 = (X^2 + 2X + 2)(X^2 - 2X + 2)$. Ne pas avoir de racine ne suffit donc qu'en degré 2 ou 3.

VII. Fractions rationnelles et décomposition en éléments simples

1. Fractions rationnelles et pôles

Définition :

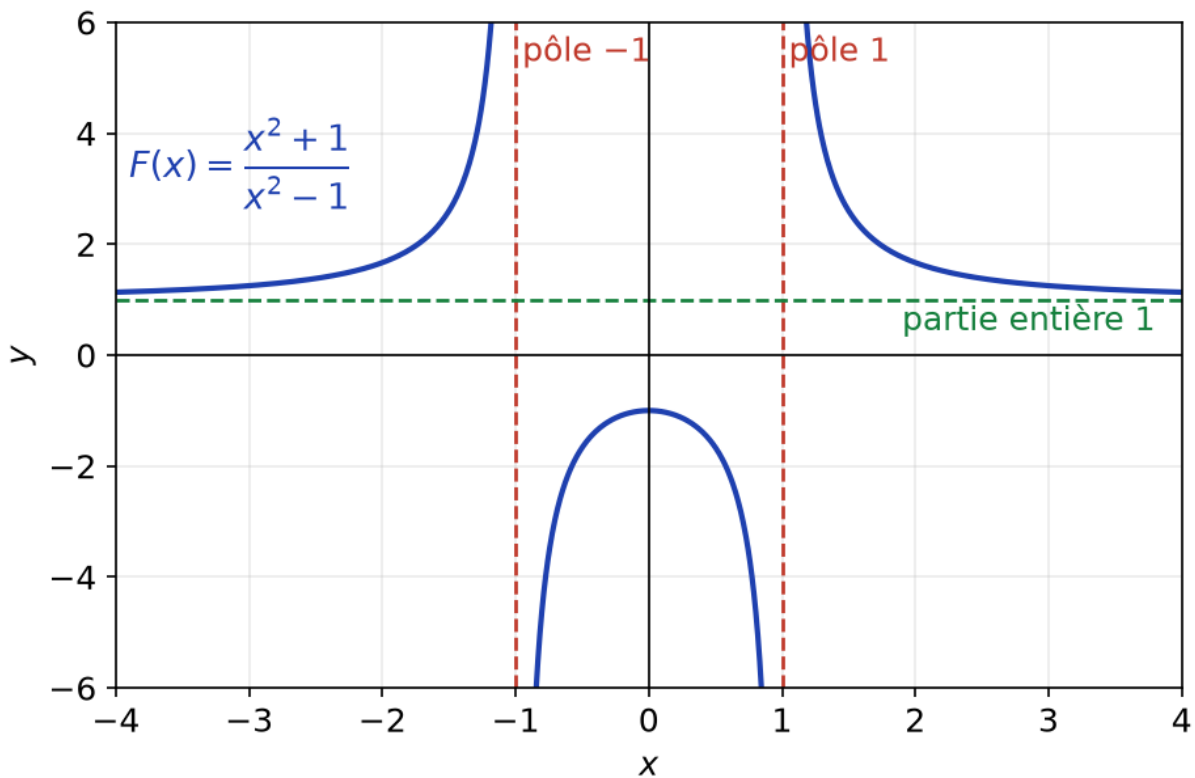
Une **fraction rationnelle** est un quotient $F = \frac{P}{Q}$ avec $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ et $Q \neq 0$. Deux écritures $\frac{P}{Q}$ et $\frac{P_1}{Q_1}$ représentent la même fraction si $PQ_1 = P_1Q$. L'ensemble obtenu est noté $\mathbb{K}(X)$; c'est un corps. On peut toujours choisir une **forme irréductible**, où $P \wedge Q = 1$.

Cette construction imite exactement celle de $\mathbb{Q}$ à partir de $\mathbb{Z}$. Le degré se prolonge par $\deg F = \deg P - \deg Q$, qui ne dépend pas de l'écriture choisie.

Définition :

Soit $F = \frac{P}{Q}$ sous forme irréductible. Les **pôles** de F sont les racines de Q . La multiplicité d'un pôle est sa multiplicité comme racine de Q . Les racines de F sont celles de P .

Sur $\mathbb{R}$, les pôles réels correspondent aux asymptotes verticales de la fonction rationnelle. Par exemple, la fraction $\frac{X^2+1}{X^2-1}$ a deux pôles simples, 1 et -1 . Comme le montre la figure ci-dessous, sa courbe s'approche aussi de la droite $y = 1$ à l'infini.



Proposition :

Toute fraction rationnelle F s'écrit de façon unique $F = E + \frac{R}{Q}$, où E est un polynôme et $\deg R < \deg Q$. Le polynôme E est la **partie entière** de F : c'est le quotient de la division euclidienne de P par Q .

2. Décomposition en éléments simples

Théorème :

Soit $F = \frac{P}{Q} \in \mathbb{C}(X)$ sous forme irréductible, avec $Q = c \prod_{k=1}^r (X - z_k)^{m_k}$. Alors il existe des complexes uniques $\lambda_{k,j}$ tels que

$$F = E + \sum_{k=1}^r \sum_{j=1}^{m_k} \frac{\lambda_{k,j}}{(X - z_k)^j},$$

où E est la partie entière de F . Dans $\mathbb{R}(X)$, s'ajoutent des termes $\frac{\alpha X + \beta}{(X^2 + pX + q)^j}$ pour les facteurs irréductibles de degré 2.

Ce théorème est admis ou démontré en TD selon les cursus. L'existence repose sur la relation de Bézout : si $Q = Q_1 Q_2$ avec $Q_1 \wedge Q_2 = 1$, on écrit $1 = Q_1 U + Q_2 V$. On en déduit $\frac{R}{Q} = \frac{RV}{Q_1} + \frac{RU}{Q_2}$, ce qui sépare les pôles. L'unicité découle du comportement de F au voisinage de chaque pôle.

Proposition :

Si a est un **pôle simple** de $F = \frac{P}{Q}$, le coefficient de $\frac{1}{X-a}$ vaut

$$\lambda = \frac{P(a)}{Q'(a)}.$$

De façon équivalente, λ est la valeur en a de $(X-a)F$, une fois le facteur $X-a$ simplifié.

Démonstration :

Écrivons $Q = (X-a)Q_1$ avec $Q_1(a) \neq 0$. Alors $F = \frac{\lambda}{X-a} + G$, où a n'est pas un pôle de G . En multipliant par $X-a$, on obtient $\frac{P}{Q_1} = \lambda + (X-a)G$. On évalue en a : $\lambda = \frac{P(a)}{Q_1(a)}$. Enfin, $Q' = Q_1 + (X-a)Q_1'$ donne $Q'(a) = Q_1(a)$.

Méthode :

Pour décomposer une fraction rationnelle : d'abord, calculez la partie entière si $\deg P \geq \deg Q$. Ensuite, factorisez Q et écrivez la forme de la décomposition avec des coefficients inconnus. Puis obtenez le coefficient de plus haut ordre de chaque pôle en multipliant par $(X - a)^m$ et en évaluant en a . Pour les autres coefficients, utilisez la limite de $x F(x)$ en l'infini, une évaluation en un point simple, ou la parité. Enfin, vérifiez en un point.

Exemple :

Décomposons $F = \frac{1}{X(X+1)}$. Les pôles 0 et -1 sont simples. Le coefficient en 0 vaut $\frac{1}{0+1} = 1$, et celui en -1 vaut $\frac{1}{-1} = -1$. Ainsi, $F = \frac{1}{X} - \frac{1}{X+1}$. Par conséquent, $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}$, par télescopage.

Exemple :

Pour une fraction réelle, prenons $F = \frac{1}{X^3 + X} = \frac{1}{X(X^2 + 1)}$. On cherche $F = \frac{a}{X} + \frac{bX + c}{X^2 + 1}$. D'abord, $a = \frac{1}{0+1} = 1$. Ensuite, on multiplie par $X^2 + 1$ et on évalue en i : $\frac{1}{i} = bi + c$, soit $-i = bi + c$. Donc $b = -1$ et $c = 0$. Finalement, $F = \frac{1}{X} - \frac{X}{X^2 + 1}$.

Enfin, un cas particulier mérite d'être retenu. Si $\frac{P}{Q}$ est scindé de racines z_k de multiplicités m_k , la **dérivée logarithmique** se décompose ainsi : $\frac{P'}{P} = \sum_k \frac{m_k}{X - z_k}$. Elle relie directement les racines aux pôles.

Ce qu'il faut retenir

- $\mathbb{K}[X]$ est un anneau intègre, avec $\deg(PQ) = \deg P + \deg Q$; ses inversibles sont les

constantes non nulles.

- La division euclidienne $A = BQ + R$ avec $\deg R < \deg B$ existe et est unique ; le reste par $X - a$ est $P(a)$.
- a est racine de P si et seulement si $X - a$ divise P ; un polynôme non nul de degré n a au plus n racines.
- La multiplicité de a est l'ordre de la première dérivée non nulle en a (formule de Taylor).
- D'Alembert-Gauss : tout polynôme complexe non constant est scindé ; les irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ sont de degré 1.
- Les irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ sont de degré 1, ou de degré 2 à discriminant négatif ; on regroupe les racines conjuguées.
- Relations coefficients-racines : $\sigma_k = (-1)^k a_{n-k}/a_n$.
- PGCD par l'algorithme d'Euclide, relation de Bézout et lemme de Gauss : même arithmétique que dans $\mathbb{Z}$.
- Une fraction rationnelle se décompose de façon unique en partie entière et éléments simples ; pour un pôle simple, $\lambda = P(a)/Q'(a)$.

Questions fréquentes sur polynômes

Quelle différence entre un polynôme et une fonction polynomiale ?

Un polynôme est une suite finie de coefficients, alors qu'une fonction polynomiale est l'application

$x \rightarrow \sum a_k x^k$. Sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, deux polynômes qui définissent la même fonction sont égaux, car leur différence a une infinité de racines. On peut donc les identifier, mais les définitions formelles (degré, dérivée) ne dépendent pas de cette identification.

Comment trouver rapidement la multiplicité d'une racine ?

Calculez $P(a)$, puis $P'(a)$, $P''(a)$, etc. La multiplicité est l'ordre de la première dérivée non nulle en a , d'après la formule de Taylor. Par exemple, pour $X^3 - 3X + 2$, on a $P(1) = P'(1) = 0$ et $P''(1) = 6$: la racine 1 est double.

Un polynôme réel sans racine réelle est-il irréductible ?

Seulement en degré 2 ou 3. En degré supérieur, c'est faux : $X^4 + 4$ n'a aucune racine réelle mais vaut $(X^2 + 2X + 2)(X^2 - 2X + 2)$. Dans $\mathbb{R}[X]$, les irréductibles sont exactement les polynômes de degré 1 et ceux de degré 2 à discriminant strictement négatif.

Faut-il toujours calculer la partie entière avant de décomposer une fraction rationnelle ?

Oui, dès que le degré du numérateur est supérieur ou égal à celui du dénominateur. La partie entière est le quotient de la division euclidienne du numérateur par le dénominateur. Si vous l'oubliez, les coefficients des éléments simples calculés par évaluation restent justes, mais la décomposition est fausse car il manque un polynôme.

Pour aller plus loin en L1

- Les énoncés : [exercices de maths en L1 sur polynômes](#)
- Les solutions : [corrigé des exercices sur polynômes](#)
- À maîtriser avant : [Nombres complexes et trigonométrie](#), [Arithmétique des entiers](#)
- Chapitre précédent : [Arithmétique des entiers](#)
- Chapitre suivant : [Systèmes linéaires et calcul matriciel](#)
- Le sommaire : [tous les chapitres de maths de L1](#) et la [licence de maths de L1 à L3](#)