

Polynômes

Corrigé de l'exercice 1 : Degré, coefficient dominant et composition

- On développe : $(X^2+1)^3 = X^6 + 3X^4 + 3X^2 + 1$ et $(X^3-1)^2 = X^6 - 2X^3 + 1$.
Les termes en X^6 se compensent, donc $A = 3X^4 + 2X^3 + 3X^2$. **Ainsi $\deg A = 4$ et le coefficient dominant vaut 3**. On retient qu'une différence peut faire baisser le degré.
- Écrivons $P = aX^n + bX^{n-1} + R$ avec $\deg R \leq n-2$. D'abord, la formule du binôme donne $(X+1)^n - X^n = nX^{n-1} + S$ avec $\deg S \leq n-2$. Ensuite, $(X+1)^{n-1} - X^{n-1}$ et $R(X+1) - R(X)$ sont de degré au plus $n-2$. Par conséquent, $P(X+1) - P(X) = naX^{n-1} + T$ avec $\deg T \leq n-2$. Or $na \neq 0$. **Donc $P(X+1) - P(X)$ est de degré $n-1$, de coefficient dominant na** .
- Écrivons $P = \sum_{k=0}^p a_k X^k$ avec $a_p = a$. Pour $k \leq p$, $\deg(Q^k) = kq$ car le degré d'un produit est la somme des degrés. Ainsi $P \circ Q = aQ^p + \sum_{k < p} a_k Q^k$, où la somme est de degré au plus $(p-1)q < pq$. Le terme aQ^p est de degré pq , de coefficient dominant ab^p . **Donc $\deg(P \circ Q) = pq$ et le coefficient dominant est ab^p** .
- Si $P^2 = X^3 + 1$, alors $P \neq 0$ et $2\deg P = 3$, ce qui est impossible dans $\mathbb{N}$. De même, si $P \circ P = X^2 + 1$, alors P n'est pas constant (sinon $P \circ P$ serait constant). La question précédente donne $(\deg P)^2 = 2$, encore impossible. **Aucun de ces deux polynômes n'existe.**

Point de méthode : pour montrer qu'une équation polynomiale n'a pas de solution, on compare d'abord les degrés des deux membres.

Corrigé de l'exercice 2 : Deux divisions euclidiennes

1. On élimine à chaque étape le terme de plus haut degré. D'abord,

$A - X^3 B = X^4 - 2X^3 + 2X^2 + 1$. Ensuite, on retranche $X^2 B$ et l'on obtient $-X^3 + X^2 + 1$. Enfin, on ajoute $XB = X^3 - X^2 + X$, ce qui laisse $X + 1$. Ce reste est de degré $1 < 2$, donc on s'arrête. **Ainsi**

$A = (X^2 - X + 1)(X^3 + X^2 - X) + X + 1$. Vérifions :
 $(X^2 - X + 1)(X^3 + X^2 - X) = X^5 - X^3 + 2X^2 - X$, et l'ajout de $X + 1$ redonne bien A .

2. On a $2X^3 - 3X^2 + 4X - 1 - X^2(2X - 1) = -2X^2 + 4X - 1$. Puis $-2X^2 + 4X - 1 + X(2X - 1) = 3X - 1$. Enfin, $3X - 1 - \frac{3}{2}(2X - 1) = \frac{1}{2}$. **Le quotient est $X^2 - X + \frac{3}{2}$ et le reste vaut $\frac{1}{2}$** . Contrôle : en évaluant en $\frac{1}{2}$, racine de $2X - 1$, on trouve $\frac{2}{8} - \frac{3}{4} + 2 - 1 = \frac{1}{2}$. Remarquons que le quotient n'est pas à coefficients entiers : la division se fait dans $\mathbb{Q}[X]$.

3. On réduit les puissances modulo $B = X^2 - X + 1$. En effet, $X^2 = B + X - 1$, donc $X^2 \equiv X - 1$. Ensuite, $X^3 \equiv X^2 - X \equiv -1$ et $X^4 \equiv -X$. Par conséquent, $X^4 + aX^2 + 1$ a le même reste que $-X + a(X - 1) + 1 = (a-1)X + (1-a)$. Ce polynôme de degré au plus 1 est bien le reste. Il est nul si et seulement si $a = 1$. **Donc $X^2 - X + 1$ divise $X^4 + aX^2 + 1$ si et seulement si $a = 1$** . On vérifie que $X^4 + X^2 + 1 = (X^2 + X + 1)(X^2 - X + 1)$.

Corrigé de l'exercice 3 : Restes par évaluation

1. Le diviseur est de degré 2, donc le reste s'écrit $R = aX + b$. On a $X^n = (X-1)(X-2)Q + aX + b$. En évaluant en 1, puis en 2, on obtient $a + b = 1$ et $2a + b = 2^n$. Ainsi $a = 2^n - 1$, puis $b = 2 - 2^n$. **Le reste est $(2^n - 1)X + 2 - 2^n$** .
2. On écrit $X^n = (X-1)^2 Q + aX + b$. En évaluant en 1, on a $a + b = 1$. Ensuite, on dérive : $nX^{n-1} = 2(X-1)Q + (X-1)^2 Q' + a$. En évaluant en 1, on obtient $a = n$. **Le reste est $nX + 1 - n$** .
3. On écrit $X^{2027} = (X^2 + 1)Q + aX + b$ dans $\mathbb{C}[X]$, avec a, b réels par unicité du

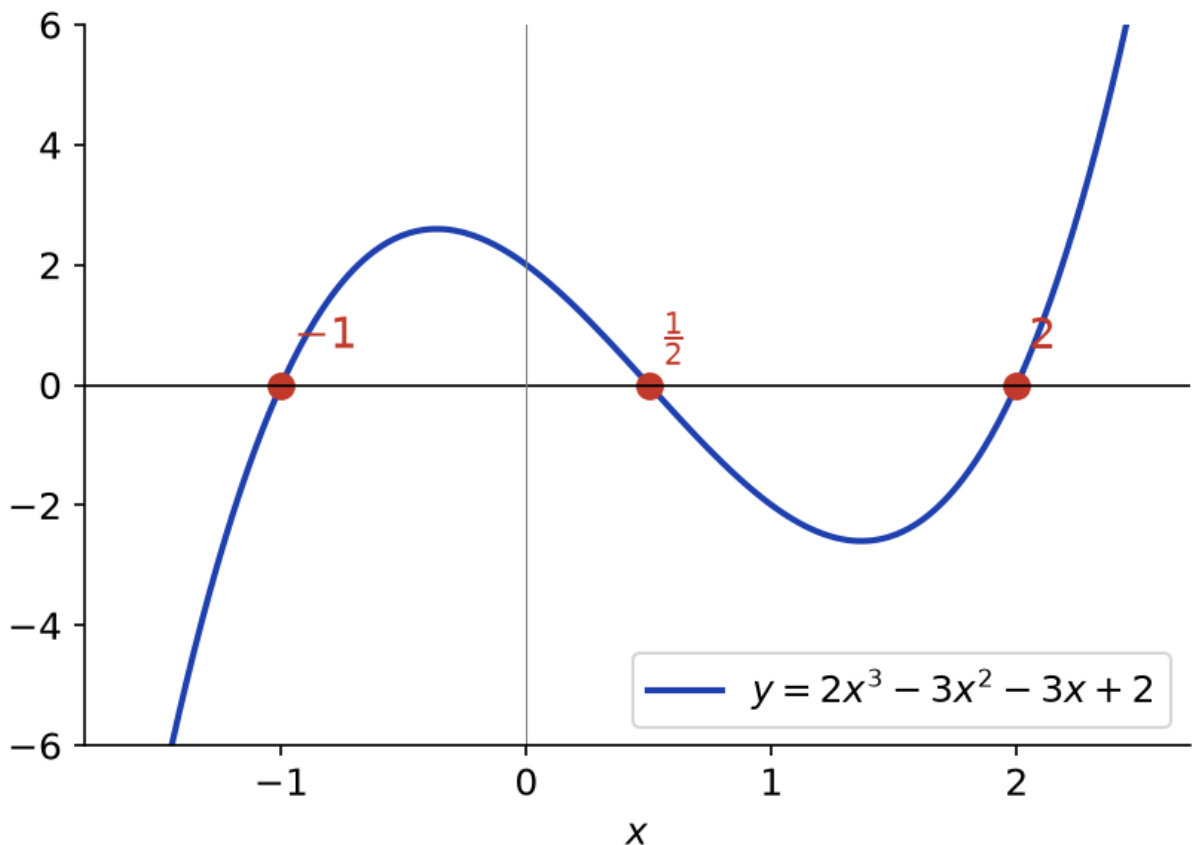
reste. Or i est racine de $X^2 + 1$. Comme $2027 = 4 \times 506 + 3$, on a $i^{2027} = i^3 = -i$. Donc $ai + b = -i$, ce qui donne $a = -1$ et $b = 0$ puisque a et b sont réels. **Le reste est $-X$.**

4. On a $X^3 - X = X(X-1)(X+1)$, de racines distinctes 0 , 1 et -1 . Posons $R = aX^2 + bX + c$. L'évaluation en 0 donne $c = 0$, car $n \geq 1$. En 1 et en -1 , on obtient $a + b = 1$ et $a - b = (-1)^n$. Donc $a = \frac{1 + (-1)^n}{2}$ et $b = \frac{1 - (-1)^n}{2}$. **Le reste vaut X^2 si n est pair et X si n est impair.**

Point de méthode : une racine double du diviseur fournit deux équations, l'une par évaluation, l'autre par dérivation.

Corrigé de l'exercice 4 : Racine évidente et factorisation

- On a $P(2) = 16 - 12 - 6 + 2 = 0$, donc $X - 2$ divise P . La méthode de Horner en 2 sur les coefficients $2, -3, -3, 2$ donne $2, 1, -1, 0$. Ainsi $P = (X-2)(2X^2 + X - 1)$. Ensuite, $2X^2 + X - 1$ a pour discriminant 9 , donc pour racines $\frac{1}{2}$ et -1 . **Finalement, $P = (X-2)(2X-1)(X+1)$.**
- On a $Q(1) = 1 - 1 - 7 + 1 + 6 = 0$ et $Q(-1) = 1 + 1 - 7 - 1 + 6 = 0$. Comme $1 \neq -1$, le produit $(X-1)(X+1) = X^2 - 1$ divise Q . La division donne $Q = (X^2 - 1)(X^2 - X - 6)$. Enfin, $X^2 - X - 6$ a pour racines 3 et -2 . **Donc $Q = (X-1)(X+1)(X-3)(X+2)$.**
- Le signe de $P(x)$ se lit sur le tableau de signes des trois facteurs, de racines -1 , $\frac{1}{2}$ et 2 . Le coefficient dominant est positif, donc $P(x) > 0$ pour $x > 2$. Ensuite, le signe change à chaque racine simple. **L'ensemble des solutions est $[-1, \frac{1}{2}] \cup [2, +\infty[$.** La courbe ci-dessous confirme ce résultat.



Corrigé de l'exercice 5 : Méthode de Horner et changement de variable

- En 1, on part de 2, puis $2 \times 1 - 5 = -3$, $-3 + 1 = -2$, $-2 + 3 = 1$ et $1 - 1 = 0$. Ainsi $P(1) = 0$. En -1, on obtient successivement 2, -7, 8, -5, 4, donc $P(-1) = 4$. On contrôle : $2 + 5 + 1 - 3 - 1 = 4$. **Par conséquent,**

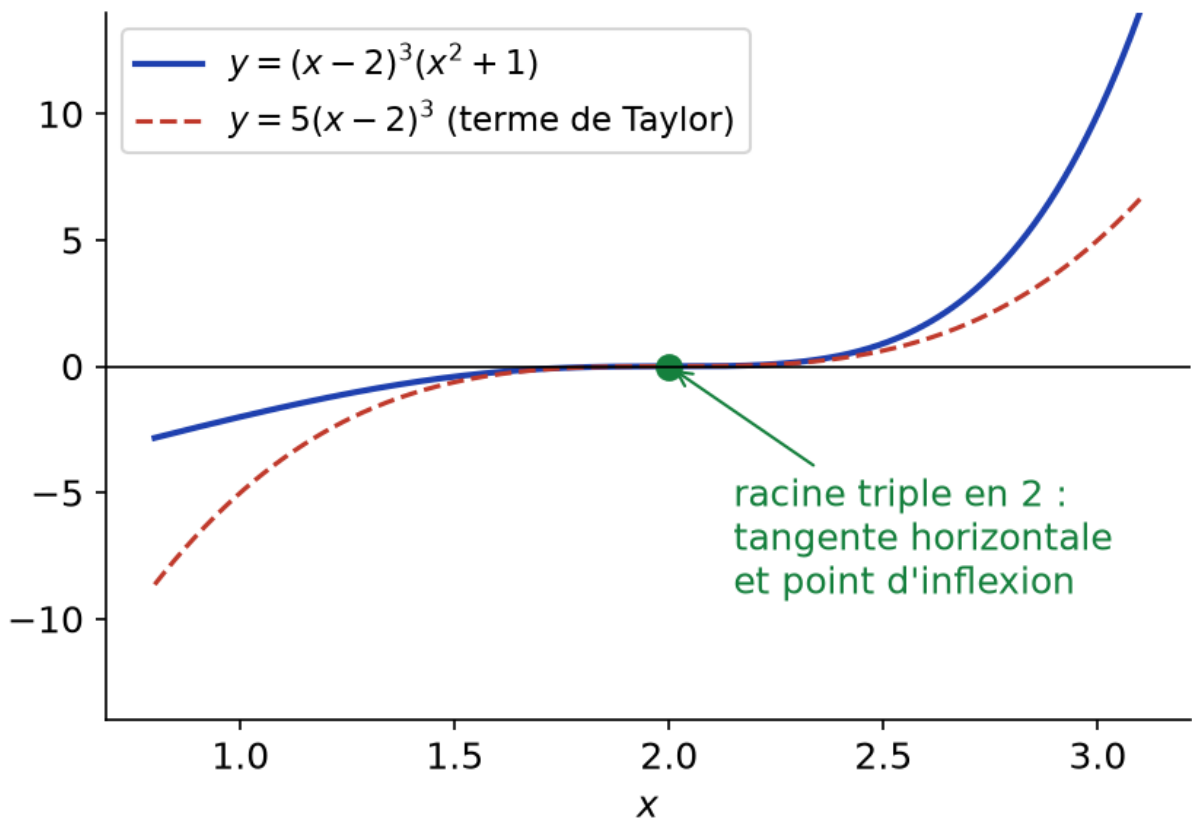
$$P = (X - 1)(2X^3 - 3X^2 - 2X + 1).$$
- Horner effectue une multiplication par coefficient après le premier, soit n multiplications et n additions. En revanche, le calcul direct de $a_k \alpha^k$ coûte $k-1$ multiplications pour la puissance et une pour le coefficient. Le total vaut donc $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$ multiplications. **Horner est linéaire en n , le calcul naïf quadratique.**
- On réapplique Horner en 1 sur chaque quotient. Le premier reste est $P(1) = 0$, avec le quotient 2, -3, -2, 1. Sur ce quotient, Horner donne 2, -1, -3, -2 : le reste est -2. Puis, sur 2, -1, -3, on obtient 2, 1, -2 : reste -2. Ensuite, sur 2, 1, on obtient 2, 3 : reste 3. Le dernier coefficient vaut 2. Les restes successifs sont les coefficients de P en puissances

de $X - 1$. **Donc** $P(X+1) = 2X^4 + 3X^3 - 2X^2 - 2X$.

4. D'après la formule de Taylor, le coefficient de X^k dans $P(X+1)$ est $\frac{P^{(k)}(1)}{k!}$. On a
 $P' = 8X^3 - 15X^2 + 2X + 3$, donc $P'(1) = -2$. Ensuite,
 $P'' = 24X^2 - 30X + 2$, donc $\frac{P''(1)}{2} = -2$. Enfin, $P''' = 48X - 30$, donc
 $\frac{P'''(1)}{6} = 3$, et $\frac{P^{(4)}(1)}{24} = 2$. **On retrouve bien**
 $P(X+1) = 2X^4 + 3X^3 - 2X^2 - 2X$.

Corrigé de l'exercice 6 : Multiplicité d'une racine par les dérivées

1. On calcule $P(2) = 32 - 96 + 104 - 56 + 24 - 8 = 0$. Ensuite,
 $P' = 5X^4 - 24X^3 + 39X^2 - 28X + 12$, et
 $P'(2) = 80 - 192 + 156 - 56 + 12 = 0$. De plus,
 $P'' = 20X^3 - 72X^2 + 78X - 28$, donc $P''(2) = 160 - 288 + 156 - 28 = 0$.
Enfin, $P''' = 60X^2 - 144X + 78$ et $P'''(2) = 240 - 288 + 78 = 30 \neq 0$. **Donc 2**
est racine triple de P . Ainsi $(X-2)^3 = X^3 - 6X^2 + 12X - 8$ divise P , et la
division donne le quotient $X^2 + 1$. Ce dernier n'a pas de racine réelle. **Dans** $\mathbb{R}[X]$,
 $P = (X-2)^3(X^2+1)$; **dans** $\mathbb{C}[X]$, $P = (X-2)^3(X-i)(X+i)$. On vérifie la
cohérence : $\frac{P'''(2)}{3!} = 5 = 2^2 + 1$. La figure montre la tangente horizontale et le point
d'inflexion en 2.



2. On a $Q(1) = 1 - n + n - 1 = 0$. Ensuite,
 $Q' = 2nX^{2n-1} - n(n+1)X^n + n(n-1)X^{n-2}$, donc
 $Q'(1) = 2n - n^2 - n + n^2 - n = 0$. Puis
 $Q''(1) = 2n(2n-1) - n^2(n+1) + n(n-1)(n-2)$. En factorisant par n , on obtient
 $n(4n - 2 - n^2 - n + n^2 - 3n + 2) = 0$. Enfin,
 $Q'''(1) = 2n(2n-1)(2n-2) - n^2(n+1)(n-1) + n(n-1)(n-2)(n-3)$. En factorisant par $n(n-1)$, le crochet vaut $4(2n-1) - n(n+1) + (n-2)(n-3) = 2n + 2$. Donc
 $Q'''(1) = 2n(n-1)(n+1) \neq 0$ car $n \geq 2$. **Le réel 1 est racine triple de Q .** Pour $n = 2$, on vérifie : $Q = X^4 - 2X^3 + 2X - 1 = (X-1)^3(X+1)$.

Corrigé de l'exercice 7 : Racine double imposée

1. D'après la caractérisation par les dérivées, $(X-1)^2$ divise P si et seulement si
 $P(1) = P'(1) = 0$. Or $P(1) = a + b + 1$ et $P' = (n+1)aX^n + nbX^{n-1}$, donc
 $P'(1) = (n+1)a + nb$. On remplace $b = -1 - a$ dans la seconde équation :
 $(n+1)a - n - na = 0$, soit $a = n$. **Ainsi $a = n$ et $b = -(n+1)$, et**

$$P = nX^{n+1} - (n+1)X^n + 1.$$

2. On a $P'' = n^2(n+1)X^{n-1} - (n+1)n(n-1)X^{n-2}$. Donc $P''(1) = n(n+1)(n - (n-1)) = n(n+1) \neq 0$. Le réel 1 est donc exactement racine double.
3. Soit $R = X^3 - 3X + \lambda$. Une racine double α vérifie $R(\alpha) = R'(\alpha) = 0$. Or $R' = 3X^2 - 3$, donc $\alpha = 1$ ou $\alpha = -1$. Si $\alpha = 1$, alors $\lambda = 2$. Si $\alpha = -1$, alors $\lambda = -2$. Réciproquement, ces valeurs conviennent. Pour $\lambda = 2$, $R = (X-1)^2(X+2)$; pour $\lambda = -2$, $R = (X+1)^2(X-2)$. Le troisième facteur s'obtient par la somme des racines, qui est nulle.

Corrigé de l'exercice 8 : Divisibilité, polynômes associés et racines de l'unité

1. D'après le cours, A et B sont associés : $A = \lambda B$ avec $\lambda \in \mathbb{K}^*$. En comparant les coefficients dominants, qui valent tous deux 1, on obtient $\lambda = 1$. Donc $A = B$.
2. On a $X^2 + X + 1 = (X - j)(X - \bar{j})$, avec $j \neq \bar{j}$. Posons $P = X^{3n+1} + X^{3m+2} + 1$. Comme $j^3 = 1$, on obtient $P(j) = j + j^2 + 1 = 0$. De même, $\bar{j}^3 = 1$, donc $P(\bar{j}) = \bar{j} + \bar{j}^2 + 1 = 0$. Ainsi P admet les deux racines distinctes j et $\bar{j}$. Par conséquent, leur produit $(X-j)(X-\bar{j})$ divise P . Donc $X^2 + X + 1$ divise $X^{3n+1} + X^{3m+2} + 1$.
3. Écrivons $b = aq$ et posons $Y = X^a$. On a l'identité $Y^q - 1 = (Y - 1)(1 + Y + \dots + Y^{q-1})$. Donc $X^b - 1 = (X^a - 1)(1 + X^a + \dots + X^{a(q-1)})$, et $X^a - 1$ divise $X^b - 1$.
4. On écrit $X^b - 1 = X^r(X^{aq} - 1) + X^r - 1$. Le premier terme est multiple de $X^a - 1$, d'après la question précédente. De plus, $\deg(X^r - 1) = r < a$ si $r \geq 1$, et $X^r - 1 = 0$ si $r = 0$. Par unicité de la division euclidienne, le reste est $X^r - 1$. On retrouve l'algorithme d'Euclide sur les exposants.

Corrigé de l'exercice 9 : Relations coefficients-racines en degré 3

1. Le polynôme P est unitaire et scindé sur $\mathbb{C}$. D'après les formules de Viète, $\sigma_1 = 2$, $\sigma_2 = 3$ et $\sigma_3 = 5$. **Ainsi** $\sigma_1 = 2$, $\sigma_2 = 3$, $\sigma_3 = 5$.
2. On a $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = \sigma_1^2 - 2\sigma_2 = 4 - 6$. **Cette somme vaut** -2 . Si les trois racines étaient réelles, la somme de leurs carrés serait positive. Donc les racines ne sont pas toutes réelles.
3. Aucune racine n'est nulle, car $\sigma_3 \neq 0$. En réduisant au même dénominateur, on obtient $\frac{x_2x_3 + x_1x_3 + x_1x_2}{x_1x_2x_3} = \frac{\sigma_2}{\sigma_3}$. **La somme des inverses vaut** $\frac{3}{5}$.
4. Chaque racine vérifie $x_i^3 = 2x_i^2 - 3x_i + 5$. En sommant, on obtient $\sum x_i^3 = 2 \times (-2) - 3 \times 2 + 3 \times 5$. **Donc** $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 5$.
5. On a $P = \prod (X - x_i)$, donc $P(-1) = \prod (-1 - x_i) = -\prod (1 + x_i)$. Or $P(-1) = -1 - 2 - 3 - 5 = -11$. **Donc** $(1+x_1)(1+x_2)(1+x_3) = 11$.

Point de méthode : pour un produit $\prod (c - x_i)$, on évalue directement le polynôme en c au lieu de développer.

Corrigé de l'exercice 10 : Systèmes symétriques et racines liées

1. Un triplet (x, y, z) est solution si et seulement si x, y, z sont les racines, avec multiplicité, de $X^3 - 2X^2 - X + 2$. En effet, ce polynôme vaut $(X-x)(X-y)(X-z)$ d'après les formules de Viète. Or $X^3 - 2X^2 - X + 2 = X^2(X-2) - (X-2) = (X-2)(X-1)(X+1)$. **Les solutions sont les six permutations de** $(2, 1, -1)$.
2. Supposons que les racines soient a , $2a$ et b . La somme des racines est nulle, donc $b = -3a$. Ensuite, $\sigma_2 = 2a^2 + ab + 2ab = 2a^2 - 9a^2 = -7a^2$. Or $\sigma_2 = -7$, donc $a^2 = 1$. Enfin, $\sigma_3 = 2a^2b = -6a^3 = -\lambda$, donc $\lambda = 6a^3$. Si $a = 1$, on trouve $\lambda = 6$ et les racines $1, 2, -3$. Si $a = -1$, on trouve $\lambda = -6$ et les racines

$-1, -2, 3$. Réciproquement, $(X-1)(X-2)(X+3) = X^3 - 7X + 6$. **Les valeurs cherchées sont $\lambda = 6$ (racines $1, 2, -3$) et $\lambda = -6$ (racines $-1, -2, 3$).**

Corrigé de l'exercice 11 : Produit de sinus par les racines de l'unité

1. Les n nombres ω^k , pour $0 \leq k \leq n-1$, sont distincts et vérifient $(\omega^k)^n = 1$. Ce sont donc n racines distinctes de $X^n - 1$, qui est unitaire de degré n . Par conséquent,

$$X^n - 1 = \prod_{k=0}^{n-1} (X - \omega^k). \text{ Le coefficient de } X^{n-1} \text{ est nul, car } n \geq 2, \text{ donc } \sigma_1 = 0.$$

Le terme constant vaut $-1 = (-1)^n \sigma_n$. **Ainsi $\sum \omega^k = 0$ et $\prod \omega^k = (-1)^{n+1}$.**

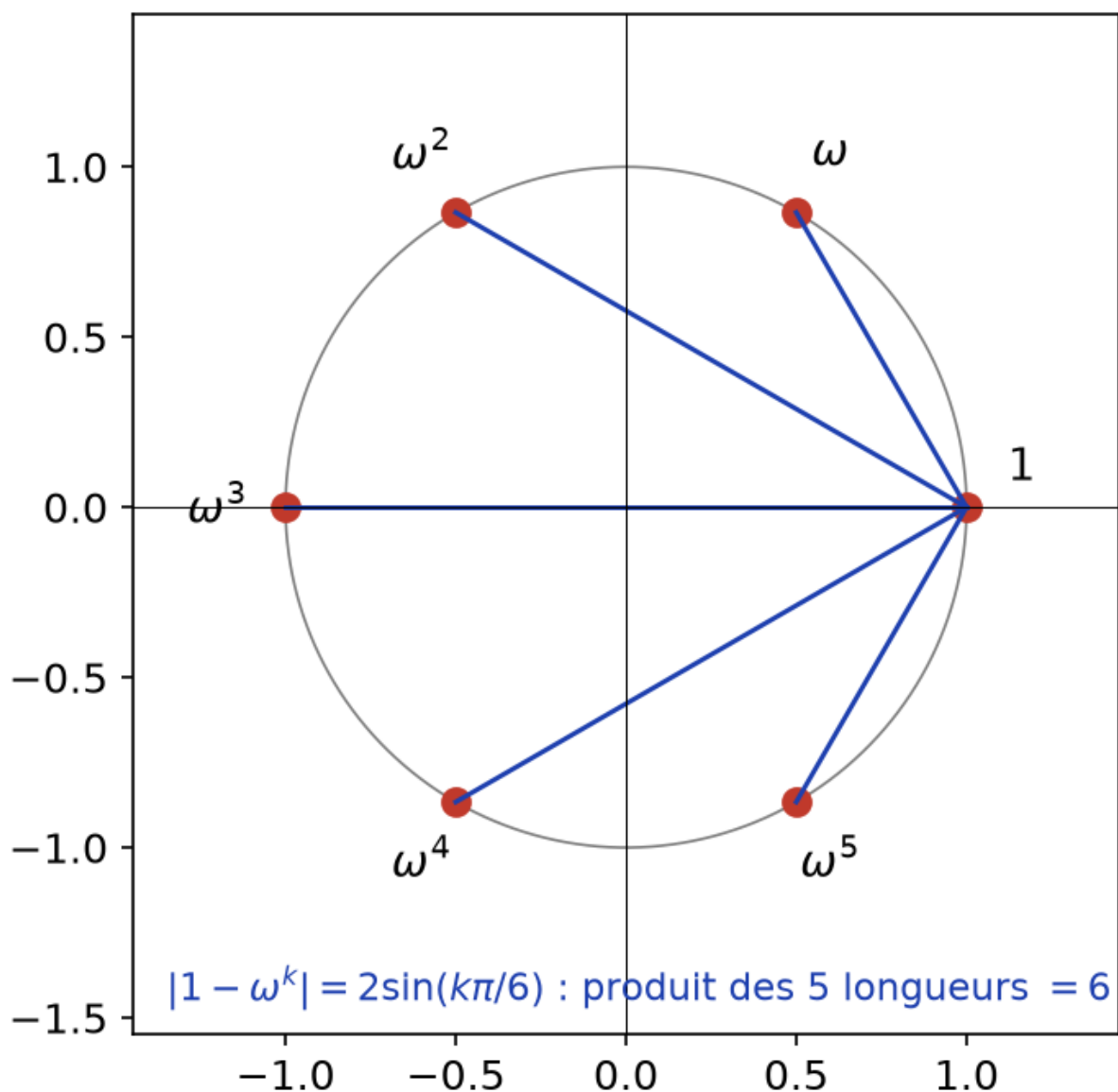
2. On a $X^n - 1 = (X - 1)(1 + X + \dots + X^{n-1})$. Par ailleurs,

$$X^n - 1 = (X - 1) \prod_{k=1}^{n-1} (X - \omega^k). \text{ Comme } \mathbb{C}[X] \text{ est intègre, on peut simplifier par}$$

$X - 1$. En évaluant l'égalité obtenue en 1 , on trouve $\prod_{k=1}^{n-1} (1 - \omega^k) = n$. **Le produit vaut n .**

3. On factorise par l'angle moitié : $1 - e^{i\theta} = e^{i\theta/2}(e^{-i\theta/2} - e^{i\theta/2}) = -2i \sin \frac{\theta}{2} e^{i\theta/2}$. En passant au module, $|1 - e^{i\theta}| = 2 \left| \sin \frac{\theta}{2} \right|$.

4. Avec $\theta = \frac{2k\pi}{n}$, on a $|1 - \omega^k| = 2 \left| \sin \frac{k\pi}{n} \right| = 2 \sin \frac{k\pi}{n}$, car $\frac{k\pi}{n} \in]0, \pi[$. On prend le module dans la question 2 : $\prod_{k=1}^{n-1} 2 \sin \frac{k\pi}{n} = n$. **Donc $\prod_{k=1}^{n-1} \sin \frac{k\pi}{n} = \frac{n}{2^{n-1}}$.** Pour $n = 4$, on a $\sin \frac{\pi}{4} \sin \frac{\pi}{2} \sin \frac{3\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \times 1 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2} = \frac{4}{8}$. La figure illustre le cas $n = 6$, où le produit vaut $\frac{6}{32} = \frac{3}{16}$.



Corrigé de l'exercice 12 : Formule de Leibniz et somme des carrés des coefficients binomiaux

1. Par récurrence immédiate sur k , $(X^n)^{(k)} = \frac{n!}{(n-k)!} X^{n-k}$ si $k \leq n$, et $(X^n)^{(k)} = 0$ si $k > n$.

2. D'une part, $(X^{2n})^{(n)} = \frac{(2n)!}{n!} X^n$. D'autre part, la formule de Leibniz donne

$$(X^n \cdot X^n)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{n!}{(n-k)!} X^{n-k} \frac{n!}{k!} X^k = n! \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 X^n.$$

En identifiant les coefficients de X^n , on obtient $n! \sum \binom{n}{k}^2 = \frac{(2n)!}{n!}$. **Donc**

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}.$$

3. On dérive le produit : $P' = m(X-\alpha)^{m-1}Q + (X-\alpha)^m Q' = (X-\alpha)^{m-1}S$, avec $S = mQ + (X-\alpha)Q'$. Or $S(\alpha) = mQ(\alpha) \neq 0$, car $m \neq 0$ dans $\mathbb{K}$. **Donc α est racine de multiplicité exactement $m-1$ de P'** . Si $m=1$, cela signifie que α n'est pas racine de P' .

4. Les dérivées de X^2 d'ordre au moins 3 sont nulles. Par la formule de Leibniz, en utilisant

$$\left((1+X)^n\right)^{(n-1)} = n!(1+X) \text{ et } \left((1+X)^n\right)^{(n-2)} = \frac{n!}{2}(1+X)^2, \text{ on obtient}$$

$$\left(X^2(1+X)^n\right)^{(n)} = n! \left[X^2 + 2nX(1+X) + \binom{n}{2}(1+X)^2 \right].$$

En -1 , seuls les termes sans facteur $1+X$ subsistent. **La valeur en -1 est $n!$** .

Corrigé de l'exercice 13 : Formule de Taylor polynomiale

1. On applique la formule de Taylor en -1 . On a $P(-1) = -1 + 1 - 4 = -4$. Ensuite, $P' = 3X^2 + 2X$, donc $P'(-1) = 1$. De plus, $P'' = 6X + 2$, donc $\frac{P''(-1)}{2} = -2$. Enfin, $\frac{P'''(-1)}{6} = 1$. **Ainsi $P = (X+1)^3 - 2(X+1)^2 + (X+1) - 4$** .
Contrôle en 0 : $1 - 2 + 1 - 4 = -4 = P(0)$.
2. On a $P = (X+1)^2((X+1) - 2) + (X+1) - 4$. Le dernier terme est de degré $1 < 2$. Par unicité de la division euclidienne, **le reste est $X - 3$** . En effet,
 $P - (X - 3) = (X+1)^2(X-1)$.
3. D'après la formule de Taylor en 1 , $Q = 2 - (X-1) + \frac{4}{2}(X-1)^2 + \frac{6}{6}(X-1)^3$. En développant, on obtient $X^3 - 3X^2 + 3X - 1 + 2X^2 - 4X + 2 - X + 1 + 2$. **Donc $Q = X^3 - X^2 - 2X + 4$** . On vérifie : $Q(1) = 2$, $Q'(1) = 3 - 2 - 2 = -1$, $Q''(1) = 6 - 2 = 4$ et $Q''' = 6$.

Corrigé de l'exercice 14 : Racines simples de l'exponentielle tronquée

1. On a $P'_n = \sum_{k=1}^n \frac{X^{k-1}}{(k-1)!} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{X^k}{k!} = P_{n-1}$. Donc $P_n - P'_n = \frac{X^n}{n!}$.
2. Soit α une racine multiple de P_n . Alors $P_n(\alpha) = P'_n(\alpha) = 0$, donc $\frac{\alpha^n}{n!} = 0$ d'après la question 1. Ainsi $\alpha = 0$. Or $P_n(0) = 1 \neq 0$: c'est une contradiction. **Toutes les racines de P_n sont donc simples.**
3. La fonction $f : x \rightarrow P_n(x)$ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$. Comme n est pair et le coefficient dominant positif, f tend vers $+\infty$ en $\pm\infty$. Elle atteint donc un minimum global en un point x_0 . En ce point, $f'(x_0) = 0$. Par conséquent,
$$f(x_0) = \frac{x_0^n}{n!} + f'(x_0) = \frac{x_0^n}{n!} \geq 0$$
. Si $x_0 = 0$, alors $f(x_0) = 1$; sinon $x_0^n > 0$.
Dans tous les cas le minimum est strictement positif, donc $P_n(x) > 0$ pour tout réel x .

Corrigé de l'exercice 15 : Montrer qu'un polynôme est nul

1. Par récurrence, $P(k) = P(0)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Ainsi le polynôme $P - P(0)$ admet une infinité de racines. Il est donc nul. **Par conséquent, P est constant.**
2. Supposons que $\cos x = P(x)$ pour tout réel x , avec $P \in \mathbb{R}[X]$. Alors $P - 1$ s'annule en tous les $2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Il a une infinité de racines, donc $P = 1$. Or $\cos\pi = -1 \neq 1$.
La fonction cosinus n'est donc pas polynomiale.
3. Posons $D = P(-X) - P(X)$. Par hypothèse, D s'annule sur $[0,1]$, qui est infini. Donc $D = 0$. Si $P = \sum a_k X^k$, alors $D = \sum a_k ((-1)^k - 1) X^k = -2 \sum_{k \text{ impair}} a_k X^k$.
Tous les coefficients d'indice impair sont donc nuls.
4. Le polynôme $P - X^2$ s'annule en tout entier naturel. Il a une infinité de racines, donc il est nul.
Ainsi $P = X^2$.

Point de méthode : pour identifier deux polynômes, il suffit que leurs fonctions coïncident sur un ensemble infini.

Corrigé de l'exercice 16 : Équations polynomiales fonctionnelles

1. Écrivons $P = \sum a_k X^k$. L'égalité $P(2X) = 2P(X)$ donne $2^k a_k = 2a_k$ pour tout k . Or $2^k = 2$ seulement pour $k = 1$. Donc $a_k = 0$ pour $k \neq 1$. Réciproquement, aX convient. **Les solutions sont les polynômes aX , $a \in \mathbb{C}$.**
2. Toute constante c convient, car $P \circ P = c$. Supposons ensuite $\deg P = n \geq 1$. D'après l'exercice 1, $\deg(P \circ P) = n^2$, donc $n^2 = n$ et $n = 1$. Posons $P = aX + b$ avec $a \neq 0$. Alors $P \circ P = a^2X + ab + b$. L'identification donne $a^2 = a$, donc $a = 1$, puis $ab = 0$, donc $b = 0$. **Les solutions sont les constantes et le polynôme X .**
3. Le polynôme nul convient. Si $P \neq 0$ est de degré n , alors $2n = n + 2$, donc $n = 2$. Posons $P = aX^2 + bX + c$. On a $P(X^2) = aX^4 + bX^2 + c$ et $(X^2 + 1)P = aX^4 + bX^3 + (a + c)X^2 + bX + c$. L'identification donne $b = 0$ puis $a + c = b = 0$. **Les solutions sont les polynômes $a(X^2 - 1)$, $a \in \mathbb{C}$.**

Corrigé de l'exercice 17 : Polynômes de degré au plus n et polynôme réciproque

1. Si $\deg P \leq n$, alors $\deg P' \leq n - 1$ et $\deg P(X+1) = \deg P \leq n$, d'après le calcul du degré d'une composée. En revanche, $X^n \in \mathbb{K}_n[X]$ mais $X \cdot X^n = X^{n+1} \notin \mathbb{K}_n[X]$. **Donc $\mathbb{K}_n[X]$ est stable par les deux premières opérations, mais pas par $P \rightarrow XP$.**
2. Le coefficient d'indice k de $(P^*)^*$ est le coefficient d'indice $n - k$ de P^* , soit $a_{n-(n-k)} = a_k$. De même, le coefficient d'indice k de $(\lambda P + Q)^*$ est $\lambda a_{n-k} + b_{n-k}$. **Ainsi $(P^*)^* = P$ et $P \rightarrow P^*$ est linéaire.**

3. On a $P^*\left(\frac{1}{\alpha}\right) = \sum_k a_{n-k} \alpha^{-k} = \alpha^{-n} \sum_k a_{n-k} \alpha^{n-k} = \alpha^{-n} P(\alpha) = 0$. **Donc** $\frac{1}{\alpha}$ est racine de P^* .
4. Pour $x = -1$, on a $P^*(-1) = (-1)^n P(-1) = -P(-1)$, car n est impair. Or $P^* = P$, donc $P(-1) = -P(-1)$. **Ainsi** $P(-1) = 0$.
5. Le polynôme $2X^3 + 3X^2 + 3X + 2$ est réciproque de degré 3, donc -1 est racine. La méthode de Horner donne $2X^3 + 3X^2 + 3X + 2 = (X + 1)(2X^2 + X + 2)$. Le discriminant de $2X^2 + X + 2$ vaut $1 - 16 = -15$. **Donc**
 $2X^3 + 3X^2 + 3X + 2 = 2(X+1)\left(X - \frac{-1+i\sqrt{15}}{4}\right)\left(X - \frac{-1-i\sqrt{15}}{4}\right)$. Les deux racines non réelles sont conjuguées et leur produit vaut $\frac{2}{2} = 1$. Leur module commun vaut donc 1. On peut aussi calculer $\frac{1+15}{16} = 1$.

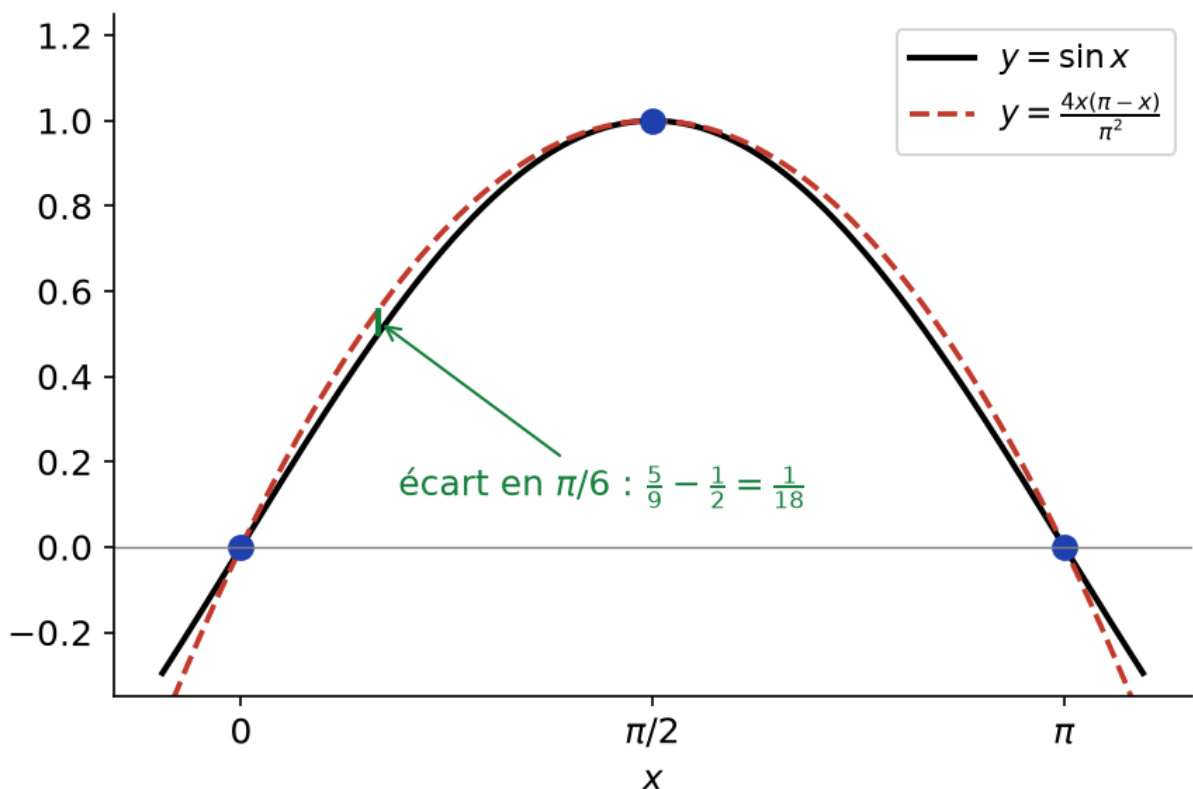
Corrigé de l'exercice 18 : Interpolation de Lagrange sur trois points

1. Par définition, $L_0 = \frac{(X-1)(X-2)}{6}$, $L_1 = -\frac{(X+1)(X-2)}{2}$ et $L_2 = \frac{(X+1)(X-1)}{3}$. Par exemple, le dénominateur de L_0 vaut $(-1-1)(-1-2) = 6$.
2. On a $P = 6L_0 + 2L_1 + 3L_2 = (X^2 - 3X + 2) - (X^2 - X - 2) + (X^2 - 1)$. **Donc** $P = X^2 - 2X + 3$. On vérifie : $P(-1) = 6$, $P(1) = 2$ et $P(2) = 3$.
3. D'après le théorème d'interpolation, Q convient si et seulement si $Q - P$ s'annule en -1 , 1 et 2 . Ces points étant distincts, cela revient à la divisibilité de $Q - P$ par leur produit. **Les solutions sont les** $Q = X^2 - 2X + 3 + (X+1)(X-1)(X-2)A$, avec $A \in \mathbb{R}[X]$.
4. Pour $\deg Q \leq 3$, le polynôme A est une constante λ . Alors $Q(0) = 3 + \lambda \times (1)(-1)(-2) = 3 + 2\lambda$. La condition $Q(0) = 0$ donne $\lambda = -\frac{3}{2}$. **Donc** $Q = -\frac{3}{2}X^3 + 4X^2 - \frac{1}{2}X$. On vérifie par exemple $Q(2) = -12 + 16 - 1 = 3$.

Corrigé de l'exercice 19 : Interpolation d'une fonction et propriétés des L_i

1. Les valeurs sont 0, 1, 0. Seul le polynôme de Lagrange associé à $\frac{\pi}{2}$ intervient :

$$P = \frac{X(X - \pi)}{\frac{\pi}{2}(-\frac{\pi}{2})}. \text{ Donc } P = \frac{4X(\pi - X)}{\pi^2}. \text{ Ensuite, } P\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{4}{\pi^2} \times \frac{\pi}{6} \times \frac{5\pi}{6} = \frac{5}{9}. \text{ Ainsi } P\left(\frac{\pi}{6}\right) - \sin\frac{\pi}{6} = \frac{5}{9} - \frac{1}{2} = \frac{1}{18}, \text{ comme le montre la figure.}$$



2. Le polynôme $S = \sum_i L_i$ est de degré au plus n et vérifie $S(x_j) = 1$ pour tout j . Or le polynôme constant 1 a les mêmes propriétés. Par unicité dans le théorème d'interpolation, $S = 1$. De même, $\sum x_i L_i$ et X sont dans $\mathbb{K}_n[X]$, car $n \geq 1$, et prennent les valeurs x_j aux points x_j . **Donc** $\sum L_i = 1$ **et** $\sum x_i L_i = X$.

3. Posons $W_i = \prod_{j \neq i} (X - x_j)$, de sorte que $W = (X - x_i)W_i$. Alors

$W' = W_i + (X - x_i)W'_i$, donc $W'(x_i) = W_i(x_i) = \prod_{j \neq i} (x_i - x_j)$. Par ailleurs, $L_i = \frac{W_i}{W_i(x_i)}$. Donc $L_i = \frac{W}{(X - x_i)W'(x_i)}$, le quotient $\frac{W}{X - x_i}$ désignant le polynôme W_i .

4. Le polynôme W_i est unitaire de degré n . Le coefficient de X^n dans L_i est donc $\frac{1}{W'(x_i)}$. Or $\sum L_i = 1$ a un coefficient de X^n nul, car $n \geq 1$. Donc $\sum_{i=0}^n \frac{1}{W'(x_i)} = 0$.

Corrigé de l'exercice 20 : Polynômes de Tchebychev

- On applique la relation de récurrence. On obtient $T_2 = 2X^2 - 1$, $T_3 = 4X^3 - 3X$ et $T_4 = 8X^4 - 8X^2 + 1$. Par exemple, $T_4 = 2X(4X^3 - 3X) - (2X^2 - 1)$.
- On raisonne par récurrence double. C'est vrai pour $T_1 = X$ et $T_2 = 2X^2 - 1$. Supposons le résultat vrai pour T_n et T_{n+1} , avec $n \geq 1$. Alors $2XT_{n+1}$ est de degré $n+2$, de coefficient dominant $2 \times 2^n = 2^{n+1}$. De plus, $\deg T_n = n < n+2$. Donc T_{n+2} est de degré $n+2$, de coefficient dominant 2^{n+1} .
- C'est vrai pour $n = 0$ et $n = 1$. Supposons-le aux rangs n et $n+1$. La formule $\cos(a+b) + \cos(a-b) = 2\cos a \cos b$ donne $\cos((n+2)t) + \cos(nt) = 2\cos t \cos((n+1)t)$. Ainsi $T_{n+2}(\cos t) = 2\cos t T_{n+1}(\cos t) - T_n(\cos t) = \cos((n+2)t)$. Par récurrence double, $T_n(\cos t) = \cos(nt)$ pour tout n et tout t .
- Soit Q tel que $Q(\cos t) = \cos(nt)$ pour tout t . Alors $T_n - Q$ s'annule en tout $x = \cos t$, c'est-à-dire sur $[-1, 1]$, qui est infini. Donc $Q = T_n$.
- Posons $Q = (-1)^n T_n(-X)$. Pour tout t , on a $Q(\cos t) = (-1)^n T_n(\cos(\pi - t)) = (-1)^n \cos(n\pi - nt) = (-1)^n (-1)^n \cos(nt) = \cos(nt)$. Par la question 4, $Q = T_n$. Ainsi $T_n(-X) = (-1)^n T_n$.
- Pour $x \in [-1, 1]$, écrivons $x = \cos t$ avec $t \in [0, \pi]$. Alors $T_n(x) = 0$ équivaut à $\cos(nt) = 0$, soit $t = \frac{(2k+1)\pi}{2n}$ avec $0 \leq k \leq n-1$. Ces n angles sont distincts dans $]0, \pi[$, où le cosinus est injectif. On obtient donc n racines distinctes $x_k = \cos \frac{(2k+1)\pi}{2n}$. Or $\deg T_n = n$. Par conséquent, T_n n'a pas d'autre racine, et chacune est simple. Ainsi

$$T_n = 2^{n-1} \prod_{k=0}^{n-1} \left(X - \cos \frac{(2k+1)\pi}{2n} \right).$$

7. On évalue la factorisation en 0 : $T_n(0) = 2^{n-1}(-1)^n \prod x_k = 2^{n-1} \prod x_k$, car n est pair. Par ailleurs, $T_n(0) = T_n(\cos \frac{\pi}{2}) = \cos(p\pi) = (-1)^p$. **Donc**

$$\prod_{k=0}^{2p-1} \cos \frac{(2k+1)\pi}{4p} = \frac{(-1)^p}{2^{2p-1}}. \text{ Pour } p=1, \text{ on retrouve } \cos \frac{\pi}{4} \cos \frac{3\pi}{4} = -\frac{1}{2}.$$

Corrigé de l'exercice 21 : Problème : polynômes de Legendre

- On a $U_n = X^{2n} + V$ avec $\deg V \leq 2n-2$. Donc $L_n = \frac{(2n)!}{n!} X^n + V^{(n)}$, où $\deg V^{(n)} \leq n-2$. **Ainsi L_n est de degré n , de coefficient dominant $\frac{(2n)!}{n!}$.**
- Le polynôme U_n est pair : $U_n(-X) = U_n$. En dérivant k fois la composée, on obtient $(-1)^k U_n^{(k)}(-X) = U_n^{(k)}$. Pour $k=n$, cela donne $L_n(-X) = (-1)^n L_n$. **Le polynôme L_n a donc la parité de n .**
- La formule de Leibniz donne $L_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} ((X-1)^n)^{(k)} ((X+1)^n)^{(n-k)}$. En 1, la dérivée $((X-1)^n)^{(k)}$ s'annule sauf pour $k=n$, où elle vaut $n!$. Donc $L_n(1) = n! (1+1)^n$. En -1 , seul le terme $k=0$ subsiste, et il vaut $(-2)^n n!$. **Ainsi $L_n(1) = 2^n n!$ et $L_n(-1) = (-1)^n 2^n n!$.**
- Les réels 1 et -1 sont racines de multiplicité n de $U_n = (X-1)^n (X+1)^n$. D'après la caractérisation par les dérivées, $U_n^{(k)}(\pm 1) = 0$ **pour** $0 \leq k \leq n-1$.
- Pour $k=1$: U_n est continue sur $[-1,1]$, dérivable sur $] -1,1[$, et $U_n(-1) = U_n(1) = 0$. Le théorème de Rolle fournit une racine de U_n' dans $] -1,1[$. Supposons ensuite le résultat vrai au rang $k \leq n-1$: $U_n^{(k)}$ s'annule en $a_1 < \dots < a_k$ dans $] -1,1[$. D'après la question 4, il s'annule aussi en -1 et en 1 . On dispose ainsi de $k+2$ zéros $-1 < a_1 < \dots < a_k < 1$. Le théorème de Rolle, appliqué sur chacun des $k+1$ intervalles consécutifs, donne $k+1$ zéros distincts de $U_n^{(k+1)}$ dans $] -1,1[$. **Par récurrence, $U_n^{(k)}$ a au moins k racines distinctes dans $] -1,1[$ pour $1 \leq k \leq n$.** La figure l'illustre pour $n=3$.
- Pour $k=n$, le polynôme L_n a au moins n racines distinctes dans $] -1,1[$. Or $\deg L_n = n$, donc il en a au plus n , comptées avec multiplicité. **Ainsi L_n est scindé sur**

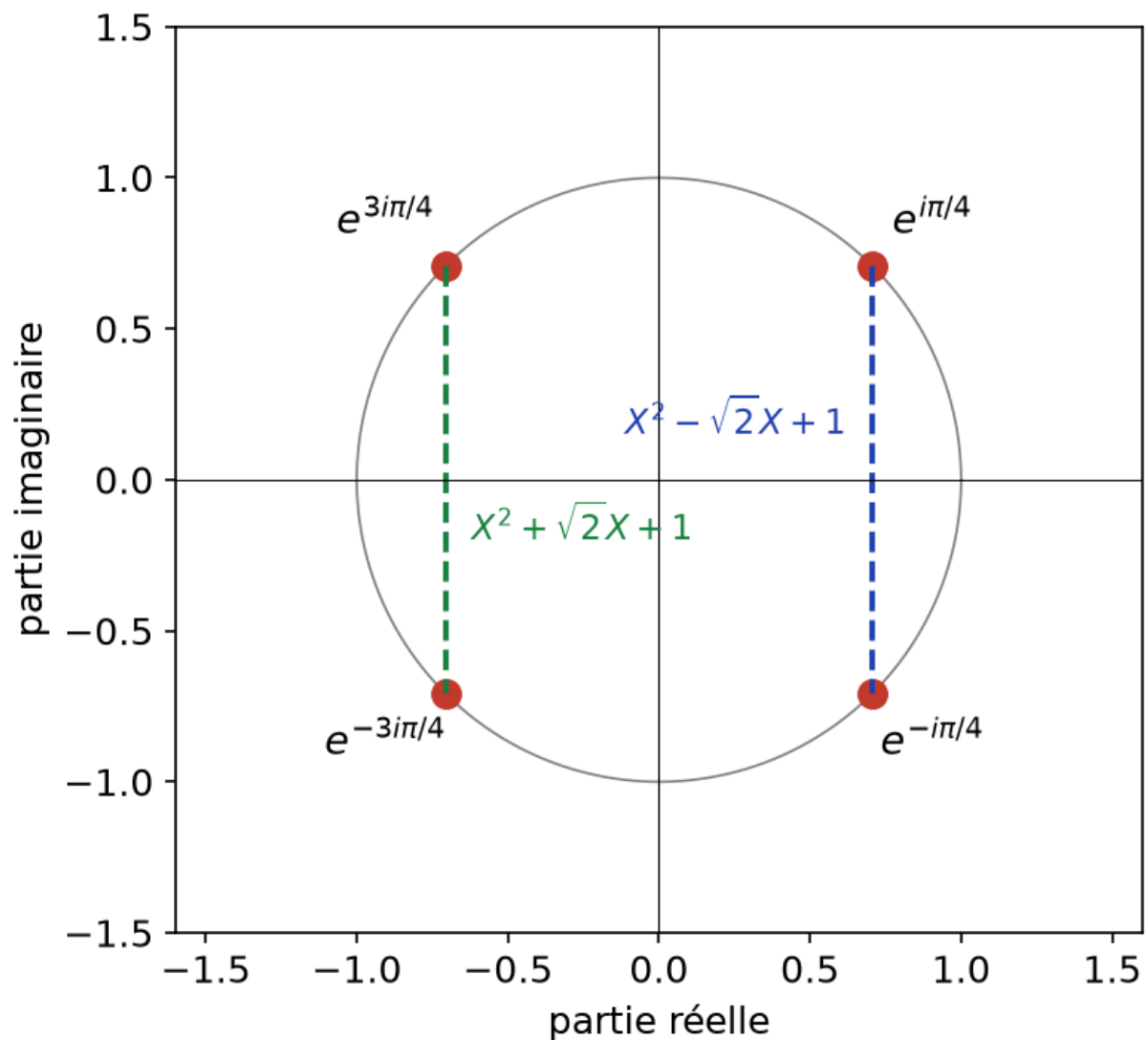
$\mathbb{R}$, à racines simples, toutes dans $] -1, 1[$.

7. On intègre par parties : $\int_{-1}^1 U_n^{(n)} Q = [U_n^{(n-1)} Q]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 U_n^{(n-1)} Q' .$ Le crochet est nul d'après la question 4. En répétant n fois, les crochets $[U_n^{(n-j)} Q^{(j-1)}]_{-1}^1$ sont tous nuls, car $n - j \leq n - 1$. On obtient $\int_{-1}^1 L_n Q = (-1)^n \int_{-1}^1 U_n Q^{(n)} .$ Or $\deg Q \leq n-1$, donc $Q^{(n)} = 0$. **Finalement,** $\int_{-1}^1 L_n(x) Q(x) dx = 0 .$

Point de méthode : le théorème de Rolle transforme « $k+2$ zéros de f » en « $k+1$ zéros de f' » ; les racines d'ordre élevé aux bords fournissent les zéros supplémentaires.

Corrigé de l'exercice 22 : Factorisation de X^4+1 et de X^6-1

- Les dérivées de P sont à coefficients réels. Donc, pour tout k , $P^{(k)}(\bar{z}) = \overline{P^{(k)}(z)}$. Ainsi $P^{(k)}(\bar{z}) = 0$ si et seulement si $P^{(k)}(z) = 0$. **Par la caractérisation par les dérivées, $\bar{z}$ est racine de même multiplicité m .**
- On résout $z^4 = -1 = e^{i\pi}$. Les solutions sont $e^{i\pi/4}$, $e^{3i\pi/4}$, $e^{-3i\pi/4}$ et $e^{-i\pi/4}$, quatre racines distinctes. Donc $X^4 + 1 = \prod (X - e^{i(2k+1)\pi/4})$ dans $\mathbb{C}[X]$. On regroupe ensuite les racines conjuguées : $(X - e^{i\theta})(X - e^{-i\theta}) = X^2 - 2\cos\theta X + 1$. **Dans $\mathbb{R}[X]$, $X^4 + 1 = (X^2 - \sqrt{2}X + 1)(X^2 + \sqrt{2}X + 1)$.** La figure représente ce regroupement.



3. Les racines de $X^6 - 1$ sont les $e^{ik\pi/3}$, pour $0 \leq k \leq 5$: 1 , -1 , $e^{\pm i\pi/3}$ et $e^{\pm 2i\pi/3}$. Dans $\mathbb{C}[X]$, $X^6 - 1 = \prod_{k=0}^5 (X - e^{ik\pi/3})$. On regroupe les paires conjuguées avec $2\cos\frac{\pi}{3} = 1$ et $2\cos\frac{2\pi}{3} = -1$. **Dans $\mathbb{R}[X]$,**
 $X^6 - 1 = (X-1)(X+1)(X^2 - X + 1)(X^2 + X + 1)$.
4. On a $X^6 - 1 = (X^2 - 1)(X^4 + X^2 + 1)$. En comparant avec la question 3 et en simplifiant par $X^2 - 1$, ce qui est permis par intégrité, **on obtient**
 $X^4 + X^2 + 1 = (X^2 + X + 1)(X^2 - X + 1)$.

Corrigé de l'exercice 23 : Problème : interpolation d'Hermite

- Soient P_1 et P_2 deux solutions, et $D = P_1 - P_2 \in \mathbb{R}_3[X]$. Alors
 $D(0) = D'(0) = 0$ et $D(1) = D'(1) = 0$. Donc 0 et 1 sont racines au moins doubles de D , et $X^2(X-1)^2$ divise D . Comme $\deg D \leq 3 < 4$, on a $D = 0$. **Il existe donc au plus une solution.**
- Les conditions en 0 imposent $P = aX^3 + bX^2 + X$. Ensuite, $P(1) = 1$ donne $a + b = 0$, et $P'(1) = 0$ donne $3a + 2b + 1 = 0$. Ainsi $a = -1$ et $b = 1$. **Le polynôme cherché est $P = -X^3 + X^2 + X$.**
- On sait que $L_i(x_j) = \delta_{ij}$, où δ_{ij} vaut 1 si $i = j$ et 0 sinon. Donc
 $L_i^2(x_j) = \delta_{ij}$. D'abord, $H_i(x_j) = \delta_{ij}$, car le facteur $1 - 2L_i'(x_i)(X - x_i)$ vaut 1 en x_i . Ensuite, $K_i(x_j) = 0$ pour tout j . Pour les dérivées, on a

$$H_i' = -2L_i'(x_i)L_i^2 + 2(1 - 2L_i'(x_i)(X - x_i))L_iL_i'.$$

Si $j \neq i$, les deux termes contiennent $L_i(x_j) = 0$. En x_i , on obtient
 $-2L_i'(x_i) + 2L_i'(x_i) = 0$. Enfin, $K_i' = L_i^2 + 2(X - x_i)L_iL_i'$, donc
 $K_i'(x_j) = \delta_{ij}$. **Ainsi $H_i(x_j) = \delta_{ij}$, $H_i'(x_j) = 0$, $K_i(x_j) = 0$ et $K_i'(x_j) = \delta_{ij}$.**
- Existence : posons $P = \sum_{i=0}^n (y_i H_i + z_i K_i)$. Chaque L_i^2 est de degré $2n$, donc H_i et K_i sont de degré au plus $2n+1$. D'après la question 3, $P(x_j) = y_j$ et $P'(x_j) = z_j$. Unicité : la différence D de deux solutions admet chaque x_j comme racine au moins double. Les x_j étant distincts, $\prod_j (X - x_j)^2$, de degré $2n+2$, divise D . Comme $\deg D \leq 2n+1$, on a $D = 0$. **L'unique solution est**

$$P = \sum_{i=0}^n (y_i H_i + z_i K_i).$$
- Pour $x_0 = 0$ et $x_1 = 1$, on a $L_0 = 1 - X$ et $L_1 = X$, donc $L_0'(0) = -1$ et $L_1'(1) = 1$. Avec $y_0 = 0$, $z_0 = 1$, $y_1 = 1$ et $z_1 = 0$, il vient $P = K_0 + H_1$. Or $K_0 = X(1-X)^2$ et $H_1 = (1 - 2(X-1))X^2 = (3 - 2X)X^2$. Ainsi
 $P = X - 2X^2 + X^3 + 3X^2 - 2X^3$. **On retrouve $P = -X^3 + X^2 + X$.**

Pour aller plus loin en maths sup

- Le cours : [polynômes, cours de maths sup](#)
- Les énoncés : [exercices de maths sup sur polynômes](#)
- À maîtriser avant : [Nombres complexes et exponentielle complexe](#), [Structures algébriques usuelles : groupes, anneaux, corps](#)
- Chapitre précédent : [Calcul matriciel et systèmes linéaires](#)
- Chapitre suivant : [Arithmétique des polynômes et fractions rationnelles](#)
- Le même thème en L1 : [polynômes, exercices de maths en L1](#)
- Tester vos connaissances : [QCM de maths sup par chapitre](#)
- Le sommaire : [tous les chapitres de maths sup](#) et les [chapitres de maths spé](#)