

Polynômes

Corrigé de l'exercice 1 : Degré, coefficient dominant et intégrité

1. D'après la formule du binôme, $(X+1)^5 = \sum_{k=0}^5 \binom{5}{k} X^k$ et

$$(X-1)^5 = \sum_{k=0}^5 \binom{5}{k} (-1)^{5-k} X^k.$$

Dans la différence, les termes où $5-k$ est pair s'annulent. Il reste les termes où $5-k$ est impair, c'est-à-dire $k \in \{0, 2, 4\}$, chacun compté deux fois :

$$P = 2\left(\binom{5}{4}X^4 + \binom{5}{2}X^2 + \binom{5}{0}\right) = 10X^4 + 20X^2 + 2.$$

Donc $\deg P = 4$ **et le coefficient dominant vaut** 10.

2. Supposons $Q \neq 0$. Alors $XQ^2 \neq 0$, donc $P \neq 0$ aussi. Ensuite, $\deg(P^2) = 2\deg P$ est pair. En revanche, $\deg(XQ^2) = 1 + 2\deg Q$ est impair. C'est contradictoire. Donc $Q = 0$, puis $P^2 = 0$. Or $\mathbb{R}[X]$ est intègre, donc $P = 0$. **Ainsi, $P = Q = 0$.**

3. Le polynôme nul convient. Soit maintenant P non nul de degré n . Si $n = 0$, alors $P' = 0$ et l'équation donne $4P = 0$: c'est exclu. Si $n \geq 1$, alors $\deg(P')^2 = 2(n-1)$ et $\deg(4P) = n$. Par conséquent, $2n-2 = n$, soit $n = 2$. Écrivons $P = aX^2 + bX + c$ avec $a \neq 0$. Alors $(P')^2 = (2aX + b)^2 = 4a^2X^2 + 4abX + b^2$. L'identification avec $4aX^2 + 4bX + 4c$ donne $a^2 = a$, donc $a = 1$. Ensuite, $4b = 4b$ est toujours vrai, et $c = \frac{b^2}{4}$. Ainsi $P = X^2 + bX + \frac{b^2}{4} = \left(X + \frac{b}{2}\right)^2$. **Les solutions sont $P = 0$ et les $P = (X + \alpha)^2$, avec $\alpha \in \mathbb{R}$.**

Point de méthode : dans une équation polynomiale, commencez par comparer les degrés. Cela réduit souvent le problème à un nombre fini de coefficients inconnus.

Corrigé de l'exercice 2 : Divisions euclidiennes

- On élimine les termes dominants successifs. D'abord, $A - X^2 B = X^3 - X^2 - X + 3$. Ensuite, en retranchant $XB = X^3 + X^2 + X$, il reste $-2X^2 - 2X + 3$. Enfin, en ajoutant $2B = 2X^2 + 2X + 2$, il reste 5 , de degré $0 < 2$. Vérification : $(X^2 + X + 1)(X^2 + X - 2) = X^4 + 2X^3 - X - 2$, et en ajoutant 5 on retrouve A . **Donc** $Q = X^2 + X - 2$ **et** $R = 5$.
- D'abord, $A - 2X^2 B = 2X^5 - X^3 + X + 1 - (2X^5 - 2X^3 + 2X^2) = X^3 - 2X^2 + X + 1$. Ensuite, on retranche B : il reste $-2X^2 + 2X$, de degré $2 < 3$. Vérification : $(X^3 - X + 1)(2X^2 + 1) = 2X^5 - X^3 + 2X^2 - X + 1$; en ajoutant $-2X^2 + 2X$, on retrouve A . **Donc** $Q = 2X^2 + 1$ **et** $R = -2X^2 + 2X$.
- Effectuons la division dans $\mathbb{R}[X]$: $A = BQ + R$ avec Q, R réels et $\deg R < \deg B$. Cette égalité reste vraie dans $\mathbb{C}[X]$, qui contient $\mathbb{R}[X]$. Or la division euclidienne dans $\mathbb{C}[X]$ est unique. **Donc le couple (Q, R) obtenu dans $\mathbb{R}[X]$ est aussi le quotient et le reste dans $\mathbb{C}[X]$.** En particulier, si B divise A dans $\mathbb{C}[X]$, il le divise dans $\mathbb{R}[X]$.

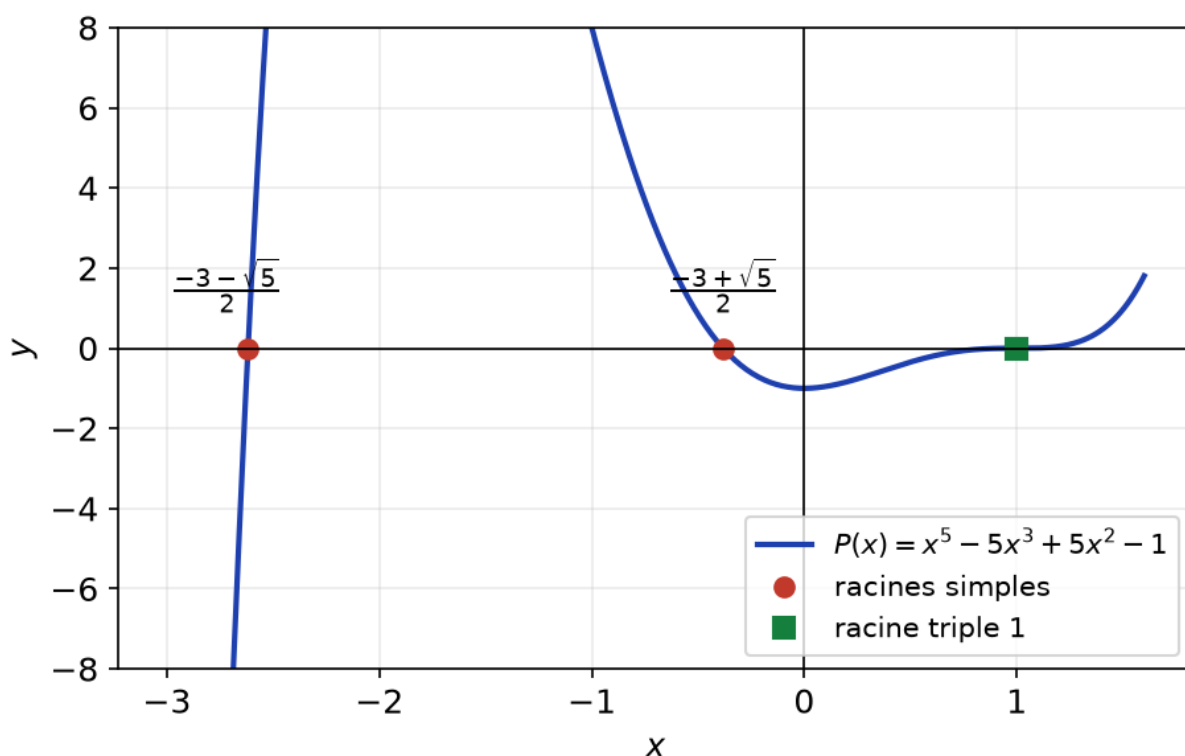
Corrigé de l'exercice 3 : Racines et factorisation par $X - a$

- On a $P(1) = 1 + 1 - 7 - 1 + 6 = 0$, donc $X - 1$ divise P . La division donne $P = (X - 1)(X^3 + 2X^2 - 5X - 6)$. Ensuite, -1 annule le second facteur : $-1 + 2 + 5 - 6 = 0$. Une nouvelle division donne $X^3 + 2X^2 - 5X - 6 = (X + 1)(X^2 + X - 6)$. Enfin, $X^2 + X - 6$ a pour racines 2 et -3 . **Donc** $P = (X - 1)(X + 1)(X - 2)(X + 3)$. On contrôle : $P(2) = 16 + 8 - 28 - 2 + 6 = 0$.
- Posons $Q = P - P(0)$. Par récurrence, $P(k) = P(0)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, car $P(k+1) = P(k)$. Donc Q s'annule en tous les entiers naturels. Ainsi, Q a une infinité de racines, donc $Q = 0$. **Par conséquent, P est le polynôme constant $P(0)$.**
- Un polynôme de degré au plus n qui s'annule en $n + 1$ points distincts est nul, d'après le corollaire du cours. **Il n'existe donc aucun polynôme non nul de degré au plus n qui s'annule en $0, 1, \dots, n$.** En revanche, $X(X - 1) \dots (X - n)$ est de degré $n + 1$ et convient. De plus, tout polynôme de degré $n + 1$ qui convient lui est associé, car il est divisible

par ce produit.

Corrigé de l'exercice 4 : Multiplicité d'une racine

- On calcule les dérivées successives en 1. D'abord, $P(1) = 1 - 5 + 5 - 1 = 0$. Ensuite, $P' = 5X^4 - 15X^2 + 10X$, donc $P'(1) = 0$. Puis $P'' = 20X^3 - 30X + 10$, donc $P''(1) = 0$. Enfin, $P''' = 60X^2 - 30$, donc $P'''(1) = 30 \neq 0$. D'après la formule de Taylor, 1 **est racine de multiplicité exactement 3**.
- On a $(X - 1)^3 = X^3 - 3X^2 + 3X - 1$, et $P = (X - 1)^3 (X^2 + aX + b)$. En développant, les coefficients de X^4 et du terme constant donnent $a - 3 = 0$ et $-b = -1$. Donc $a = 3$ et $b = 1$. On contrôle avec le coefficient de X^3 : $b - 3a + 3 = 1 - 9 + 3 = -5$, ce qui est correct. Le discriminant de $X^2 + 3X + 1$ vaut $5 > 0$. **Donc** $P = (X - 1)^3 \left(X - \frac{-3 + \sqrt{5}}{2}\right) \left(X - \frac{-3 - \sqrt{5}}{2}\right)$. La figure ci-dessous montre la racine triple, avec sa tangente horizontale et son inflexion, et les deux racines simples.



3. Posons $Q = aX^{n+1} + bX^n + 1$. Le polynôme $(X-1)^2$ divise Q si et seulement si $Q(1) = Q'(1) = 0$. Or $Q(1) = a + b + 1$ et $Q'(1) = (n+1)a + nb$. Le système donne $b = -1 - a$, puis $(n+1)a - n - na = 0$, soit $a = n$. **Donc $a = n$ et $b = -(n+1)$: le polynôme est $nX^{n+1} - (n+1)X^n + 1$.**

Corrigé de l'exercice 5 : Reste d'une division par évaluation

- Le diviseur est de degré 2, donc le reste s'écrit $R = aX + b$. On a $X^n = (X-1)(X-2)Q + aX + b$. En évaluant en 1 puis en 2, on obtient $a + b = 1$ et $2a + b = 2^n$. Par soustraction, $a = 2^n - 1$, puis $b = 2 - 2^n$. **Donc $R = (2^n - 1)X + 2 - 2^n$.**
- On écrit $X^n = (X-1)^2 Q + aX + b$. L'évaluation en 1 donne $a + b = 1$. En dérivant, $nX^{n-1} = 2(X-1)Q + (X-1)^2 Q' + a$. En évaluant en 1, on trouve $a = n$. **Donc $R = nX + 1 - n$.**
- On écrit $(\cos\theta + X\sin\theta)^n = (X^2 + 1)Q + aX + b$, avec a, b réels d'après l'exercice 2. En évaluant en i , racine de $X^2 + 1$, on obtient $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = ai + b$. Par la formule de Moivre, le membre de gauche vaut $\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$. Comme a et b sont réels, on identifie parties réelle et imaginaire. **Donc $R = \sin(n\theta)X + \cos(n\theta)$.**

Point de méthode : pour obtenir un reste sans poser la division, évaluez en les racines du diviseur. Pour une racine multiple, dérivez l'égalité avant d'évaluer.

Corrigé de l'exercice 6 : Racine double et paramètre

- Une racine est multiple si et seulement si elle annule aussi le polynôme dérivé. Or $P'_\lambda = 3X^2 - 3 = 3(X-1)(X+1)$. Les seuls candidats sont donc 1 et -1. D'une part, $P_\lambda(1) = \lambda - 2$. D'autre part, $P_\lambda(-1) = \lambda + 2$. **Ainsi, P_λ a une racine multiple si et seulement si $\lambda = 2$ ou $\lambda = -2$.**

2. Pour $\lambda = 2$, 1 est racine double. On divise par $(X - 1)^2 = X^2 - 2X + 1$: le quotient est unitaire de degré 1, et son terme constant c vérifie $1 \times c = 2$. **Donc**
 $P_2 = (X - 1)^2(X + 2)$. De même, pour $\lambda = -2$, -1 est racine double, et
 $P_{-2} = (X + 1)^2(X - 2)$. On vérifie par exemple que
 $(X + 1)^2(X - 2) = X^3 - 3X - 2$.
3. La fonction $x \rightarrow P_\lambda(x)$ est croissante sur $]-\infty, -1]$, décroissante sur $[-1, 1]$, puis croissante sur $[1, +\infty[$. Son maximum local vaut $\lambda + 2$ et son minimum local $\lambda - 2$. Par le théorème des valeurs intermédiaires, on obtient trois cas. **Si $|\lambda| < 2$, il y a trois racines réelles distinctes. Si $|\lambda| = 2$, il y en a deux, dont une double. Si $|\lambda| > 2$, il n'y en a qu'une.**
 Les deux valeurs critiques ± 2 correspondent aux courbes tangentes à l'axe des abscisses.

Corrigé de l'exercice 7 : Polynômes à racines simples

1. On a $P'_n = \sum_{k=1}^n \frac{kX^{k-1}}{k!} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{X^k}{k!} = P_{n-1}$. **Donc** $P_n - P'_n = \frac{X^n}{n!}$.
2. Soit $a \in \mathbb{C}$ une racine multiple de P_n . Alors $P_n(a) = P'_n(a) = 0$. D'après la question 1, $\frac{a^n}{n!} = 0$, donc $a = 0$. Or $P_n(0) = 1 \neq 0$: c'est absurde. **Par conséquent, toutes les racines complexes de P_n sont simples.** Comme P_n est de degré n , il a donc n racines complexes distinctes.
3. Posons $Q = X^n - a$. Une racine multiple z annulerait $Q' = nX^{n-1}$, donc $z = 0$. Or $Q(0) = -a \neq 0$. **Donc $X^n - a$ n'a que des racines simples.**

Corrigé de l'exercice 8 : Factorisations dans $\mathbb{C}[X]$ et $\mathbb{R}[X]$

1. Les racines de $X^4 + 1$ sont les z tels que $z^4 = -1 = e^{i\pi}$. Ce sont les $e^{i(\pi/4 + k\pi/2)}$ pour $k \in \{0, 1, 2, 3\}$. Elles sont distinctes et au nombre de 4. Donc
 $X^4 + 1 = (X - e^{i\pi/4})(X - e^{3i\pi/4})(X - e^{-3i\pi/4})(X - e^{-i\pi/4})$ dans $\mathbb{C}[X]$.
 Ensuite, on regroupe les paires conjuguées. On a
 $(X - e^{i\pi/4})(X - e^{-i\pi/4}) = X^2 - 2\cos\frac{\pi}{4}X + 1 = X^2 - \sqrt{2}X + 1$. De même,
 l'autre paire donne $X^2 + \sqrt{2}X + 1$. **Donc**

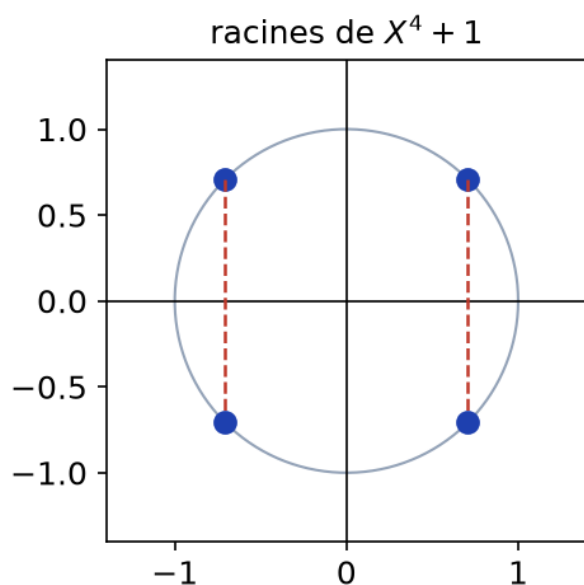
$X^4 + 1 = (X^2 - \sqrt{2}X + 1)(X^2 + \sqrt{2}X + 1)$ dans $\mathbb{R}[X]$, chaque facteur ayant un discriminant égal à $-2 < 0$.

2. Les racines de $X^6 - 1$ sont les ω^k , avec $\omega = e^{i\pi/3}$ et $0 \leq k \leq 5$. Ainsi,

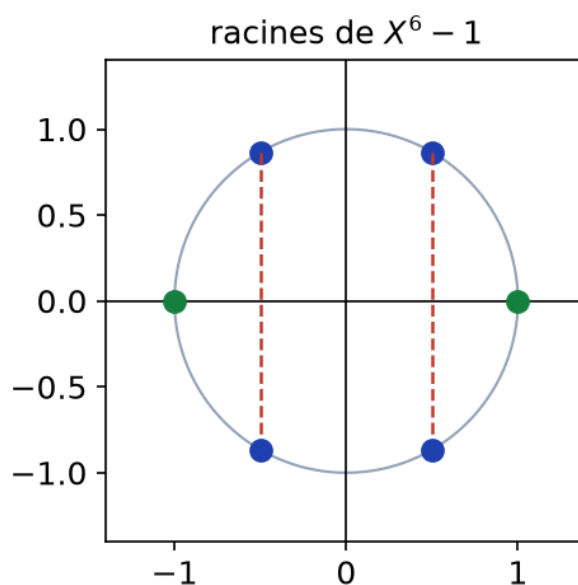
$$X^6 - 1 = \prod_{k=0}^5 (X - \omega^k) \text{ dans } \mathbb{C}[X]. \text{ Dans } \mathbb{R}[X], \text{ les racines } 1 \text{ et } -1 \text{ sont réelles.}$$

Ensuite, ω et ω^5 sont conjuguées, de partie réelle $\frac{1}{2}$: elles donnent $X^2 - X + 1$. Enfin, ω^2 et ω^4 , de partie réelle $-\frac{1}{2}$, donnent $X^2 + X + 1$. **Donc**

$X^6 - 1 = (X - 1)(X + 1)(X^2 - X + 1)(X^2 + X + 1)$. La figure ci-dessous montre les deux regroupements.



paires conjuguées :
 $X^2 - \sqrt{2}X + 1, X^2 + \sqrt{2}X + 1$



$X - 1, X + 1$ (racines réelles)
 $X^2 - X + 1, X^2 + X + 1$

3. On a $X^6 - 1 = (X^2 - 1)(X^4 + X^2 + 1)$, car $Y^3 - 1 = (Y - 1)(Y^2 + Y + 1)$ avec $Y = X^2$. Par unicité de la décomposition en irréductibles, on retire les facteurs $X - 1$ et $X + 1$ de la question 2. **Donc** $X^4 + X^2 + 1 = (X^2 - X + 1)(X^2 + X + 1)$. On le vérifie aussi directement : $(X^2 + 1)^2 - X^2 = X^4 + X^2 + 1$.

Corrigé de l'exercice 9 : Racines conjuguées d'un polynôme réel

- On calcule les puissances : $(1+i)^2 = 2i$, puis $(1+i)^3 = -2+2i$, et $(1+i)^4 = -4$. Donc $P(1+i) = -4 - 2(-2+2i) + 3(2i) - 2(1+i) + 2$. En regroupant, la partie réelle vaut $-4 + 4 - 2 + 2 = 0$ et la partie imaginaire $-4 + 6 - 2 = 0$. **Donc** $P(1+i) = 0$.
- Comme P est réel, $1-i$ est aussi racine. Par conséquent, $(X-1-i)(X-1+i) = X^2 - 2X + 2$ divise P . On écrit $P = (X^2 - 2X + 2)(X^2 + aX + b)$. Le coefficient de X^3 donne $a - 2 = -2$, donc $a = 0$. Le terme constant donne $2b = 2$, donc $b = 1$. On contrôle le coefficient de X : $2a - 2b = -2$, ce qui est correct. **Donc** $P = (X^2 - 2X + 2)(X^2 + 1)$ dans $\mathbb{R}[X]$, et $P = (X-1-i)(X-1+i)(X-i)(X+i)$ dans $\mathbb{C}[X]$.
- Un tel polynôme réel admet i comme racine double, donc aussi $-i$ comme racine double. Il est donc divisible par $(X-i)^2(X+i)^2(X-1) = (X^2+1)^2(X-1)$, qui est de degré 5. Réciproquement, ce produit convient. **Le polynôme cherché est**
 $(X^2+1)^2(X-1) = X^5 - X^4 + 2X^3 - 2X^2 + X - 1$.

Corrigé de l'exercice 10 : Relations entre coefficients et racines

- Le polynôme est unitaire, de coefficients $a_2 = -3$, $a_1 = 1$, $a_0 = 2$. Les relations coefficients-racines donnent $\sigma_1 = -a_2 = 3$, $\sigma_2 = a_1 = 1$ et $\sigma_3 = -a_0 = -2$. **Ainsi**, $x_1 + x_2 + x_3 = 3$, $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = 1$ et $x_1x_2x_3 = -2$.
- D'abord, $\sum x_i^2 = \sigma_1^2 - 2\sigma_2 = 9 - 2 = 7$. Ensuite, $\sigma_3 \neq 0$, donc aucune racine n'est nulle et $\sum \frac{1}{x_i} = \frac{\sigma_2}{\sigma_3} = -\frac{1}{2}$. Enfin, chaque racine vérifie $x_i^3 = 3x_i^2 - x_i - 2$. En sommant, $\sum x_i^3 = 3 \times 7 - 3 - 6 = 12$. **Donc** $\sum x_i^2 = 7$, $\sum \frac{1}{x_i} = -\frac{1}{2}$ et $\sum x_i^3 = 12$.
- On a $P(2) = 8 - 12 + 2 + 2 = 0$. La division donne $P = (X-2)(X^2 - X - 1)$, dont les racines sont $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\psi = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. On a $\varphi + \psi = 1$ et $\varphi\psi = -1$. Contrôlons : $2 + \varphi + \psi = 3$, puis $4 + (\varphi + \psi)^2 - 2\varphi\psi = 4 + 1 + 2 = 7$. De plus, $\frac{1}{2} + \frac{\varphi + \psi}{\varphi\psi} = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}$. Enfin,

$\varphi^3 + \psi^3 = (\varphi + \psi)^3 - 3\varphi\psi(\varphi + \psi) = 1 + 3 = 4$, donc $\sum x_i^3 = 8 + 4 = 12$.
Les racines sont $2, \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ **et** $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$, **et tous les résultats concordent.**

Corrigé de l'exercice 11 : Systèmes symétriques et racines en progression

- Un triplet (x, y, z) est solution si et seulement si x, y, z sont les trois racines, comptées avec multiplicité, de $X^3 - 2X^2 - X + 2$. En effet, ce polynôme est $(X - x)(X - y)(X - z)$ développé. Or
 $X^3 - 2X^2 - X + 2 = X^2(X - 2) - (X - 2) = (X - 2)(X - 1)(X + 1)$. **Les solutions sont les six permutations de** $(2, 1, -1)$.
- Notons les racines $r - s, r$ et $r + s$. Leur somme vaut $3r = \sigma_1 = 9$, donc $r = 3$. On vérifie que $P(3) = 27 - 81 + 69 - 15 = 0$. La division donne
 $P = (X - 3)(X^2 - 6X + 5) = (X - 3)(X - 1)(X - 5)$. **Les racines sont** $1, 3$ **et** 5 , de raison $s = 2$.
- Ici $\sigma_1 = 0, \sigma_2 = p$ et $\sigma_3 = -q \neq 0$. Aucune racine n'est nulle. D'une part,
 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{\sigma_2}{\sigma_3} = -\frac{p}{q}$. D'autre part, $\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} = \frac{a+b+c}{abc} = 0$. Or
 $\sum \frac{1}{a^2} = \left(\sum \frac{1}{a}\right)^2 - 2\sum \frac{1}{ab}$. **Donc** $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{p^2}{q^2}$.

Corrigé de l'exercice 12 : PGCD et relation de Bézout

- Première division : $A = B(X - 2) + R_1$. En effet, $B(X - 2) = X^4 - 2X^2 - 3X - 2$, donc $R_1 = 2X^2 + 3X + 1$. Deuxième division : on divise B par R_1 . On trouve
 $B = R_1\left(\frac{X}{2} + \frac{1}{4}\right) + R_2$ avec $R_2 = \frac{3}{4}(X + 1)$. Troisième division :
 $R_1 = (2X + 1)(X + 1)$, donc le reste suivant est nul. Le dernier reste non nul est $\frac{3}{4}(X + 1)$. **Après normalisation, $A \wedge B = X + 1$.**
- On remonte l'algorithme. D'abord, $\frac{3}{4}(X + 1) = B - R_1\left(\frac{X}{2} + \frac{1}{4}\right)$. Ensuite, on remplace
 $R_1 = A - (X - 2)B$:

$$\frac{3}{4}(X+1) = -\left(\frac{X}{2} + \frac{1}{4}\right)A + \left(1 + (X-2)\left(\frac{X}{2} + \frac{1}{4}\right)\right)B.$$

Or $1 + (X-2)\left(\frac{X}{2} + \frac{1}{4}\right) = \frac{X^2}{2} - \frac{3X}{4} + \frac{1}{2}$. En multipliant par $\frac{4}{3}$, on obtient le résultat.

Ainsi $U = -\frac{2X+1}{3}$ et $V = \frac{2X^2-3X+2}{3}$ conviennent. Vérification :

$$(2X^2 - 3X + 2)B = 2X^5 + X^4 + X + 2 \text{ et}$$

$$(2X + 1)A = 2X^5 + X^4 - 2X - 1. \text{ La différence vaut } 3X + 3, \text{ puis on divise par 3.}$$

3. Dans $\mathbb{C}[X]$, $A = (X-1)(X+1)(X-i)(X+i)$. De plus,

$$B(-1) = -1 + 2 - 2 + 1 = 0, \text{ et la division donne}$$

$$B = (X+1)(X^2 + X + 1) = (X+1)(X-j)(X-j^2). \text{ Le seul facteur commun}$$

est $X+1$, ce qui confirme $A \wedge B = X+1$.

Corrigé de l'exercice 13 : PGCD de $X^n - 1$ et $X^m - 1$

1. Écrivons $k = qm$. Avec $Y = X^m$, on a $Y^q - 1 = (Y-1)(Y^{q-1} + \dots + Y + 1)$.
Donc $X^m - 1$ divise $X^{qm} - 1$.

2. On a l'identité $X^n - 1 = X^r(X^{qm} - 1) + (X^r - 1)$. D'après la question 1, le premier terme est un multiple de $X^m - 1$. De plus, $\deg(X^r - 1) = r < m$ si $r \geq 1$, et $X^r - 1 = 0$ si $r = 0$. Par unicité de la division euclidienne, le reste est $X^r - 1$.

3. Pour les polynômes, $A \wedge B = B \wedge R$, où R est le reste de A par B . D'après la question 2, $(X^n - 1) \wedge (X^m - 1) = (X^m - 1) \wedge (X^r - 1)$. Or, dans $\mathbb{Z}$,
 $n \wedge m = m \wedge r$. Ainsi, l'algorithme d'Euclide sur les polynômes suit exactement celui sur les exposants. On raisonne par récurrence forte sur m . Si m divise n , le reste est nul et le PGCD vaut $X^m - 1$, avec $d = m$. Sinon, on applique l'hypothèse de récurrence au couple (m, r) , avec $1 \leq r < m$. Donc $(X^n - 1) \wedge (X^m - 1) = X^{n \wedge m} - 1$.

4. Comme $12 \wedge 18 = 6$, on obtient $(X^{12} - 1) \wedge (X^{18} - 1) = X^6 - 1$. Cet exercice illustre parfaitement l'analogie entre $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{K}[X]$.

Corrigé de l'exercice 14 : Irréductibles et analogie avec les

entiers

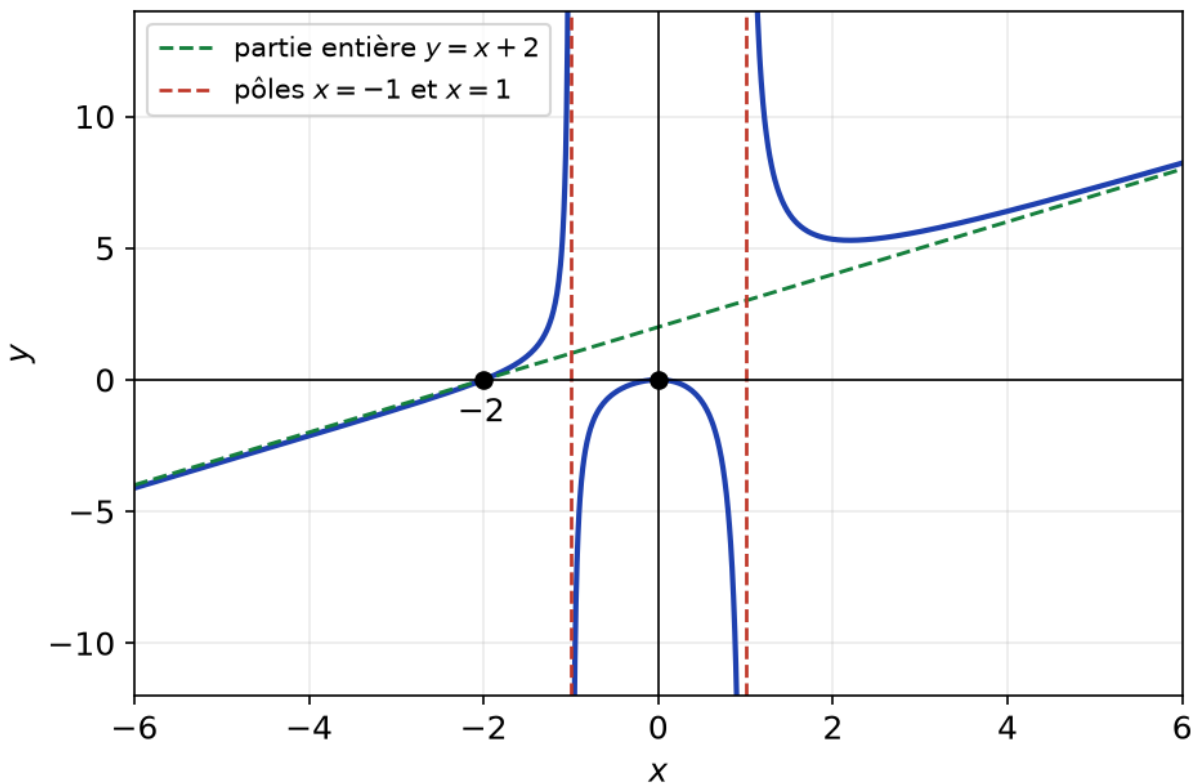
1. Si P a une racine $a \in \mathbb{K}$, alors $X - a$ divise P . Ce diviseur n'est ni constant ni associé à P , car $\deg P \geq 2$. Donc P n'est pas irréductible. Réciproquement, supposons $P = AB$ avec A et B non constants. Alors $\deg A + \deg B \in \{2, 3\}$, donc l'un des deux est de degré 1. Il s'écrit $\alpha(X - a)$, et a est une racine de P . **Ainsi, en degré 2 ou 3, irréductible équivaut à sans racine dans $\mathbb{K}$.**
2. D'après la question 1, appliquée avec le corps $\mathbb{Q}$, il suffit de montrer que $X^3 - 2$ n'a pas de racine rationnelle. D'après le résultat admis, une telle racine serait un entier divisant 2. Or $1 - 2 = -1$, $-1 - 2 = -3$, $8 - 2 = 6$ et $-8 - 2 = -10$ sont non nuls. **Donc $X^3 - 2$ est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$.** En revanche, il est réductible dans $\mathbb{R}[X]$, car $\sqrt[3]{2}$ en est racine.
3. Pour tout réel x , $x^4 + 4 \geq 4 > 0$, donc il n'y a pas de racine réelle. Cependant, $X^4 + 4 = (X^2 + 2)^2 - 4X^2 = (X^2 + 2X + 2)(X^2 - 2X + 2)$. **Les deux facteurs sont à coefficients entiers, donc $X^4 + 4$ n'est irréductible ni dans $\mathbb{Q}[X]$, ni dans $\mathbb{R}[X]$.** L'absence de racine ne garantit donc l'irréductibilité qu'en degré 2 ou 3.
4. Le PGCD $D = P \wedge A$ est un diviseur unitaire de P . Comme P est irréductible, $D = 1$ ou D est associé à P . Dans le second cas, P divise D , qui divise A . **Donc soit $P \mid A$, soit $P \wedge A = 1$,** exactement comme un nombre premier face à un entier.

Corrigé de l'exercice 15 : Partie entière et pôles d'une fraction rationnelle

1. On factorise : $F = \frac{X^2(X+2)}{(X-1)(X+1)}$. Le numérateur et le dénominateur n'ont aucune racine commune, donc la forme est irréductible. **Les pôles sont 1 et -1, tous deux simples. Les racines de F sont 0, double, et -2, simple.**
2. On divise $X^3 + 2X^2$ par $X^2 - 1$. D'abord, on retranche $X(X^2 - 1)$: il reste $2X^2 + X$. Ensuite, on retranche $2(X^2 - 1)$: il reste $X + 2$. **Donc la partie entière est $E = X + 2$, et $F = X + 2 + \frac{X+2}{X^2-1}$.**

3. On cherche $\frac{X+2}{(X-1)(X+1)} = \frac{a}{X-1} + \frac{b}{X+1}$. Les pôles sont simples, donc
 $a = \frac{1+2}{1+1} = \frac{3}{2}$ et $b = \frac{-1+2}{-1-1} = -\frac{1}{2}$. **Ainsi,** $F = X + 2 + \frac{3}{2(X-1)} - \frac{1}{2(X+1)}$.
 Vérification en 0 : $F(0) = 0$ et $2 - \frac{3}{2} - \frac{1}{2} = 0$.

4. Les éléments simples tendent vers 0 en $\pm\infty$. Donc $F(x) - (x+2) \rightarrow 0$. **La droite**
 $y = x + 2$ **est asymptote oblique à la courbe, et les droites** $x = 1$ **et** $x = -1$ **sont**
asymptotes verticales, comme le montre la figure ci-dessous.



Corrigé de l'exercice 16 : Pôles simples dans C(X)

1. On a $X^3 - 1 = (X-1)(X-j)(X-j^2)$, avec trois racines distinctes. Pour un pôle simple
 a , le coefficient vaut $\frac{1}{Q'(a)} = \frac{1}{3a^2}$. Or $a^3 = 1$, donc $\frac{1}{3a^2} = \frac{a}{3}$. **Ainsi,**

$$\frac{1}{X^3-1} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{X-1} + \frac{j}{X-j} + \frac{j^2}{X-j^2} \right).$$

2. On regroupe les deux termes conjugués. On utilise $j + j^2 = -1$, $j^3 = 1$ et

$$(X - j)(X - j^2) = X^2 + X + 1 :$$

$$\frac{j}{X - j} + \frac{j^2}{X - j^2} = \frac{(j + j^2)X - 2j^3}{X^2 + X + 1} = \frac{-X - 2}{X^2 + X + 1}.$$

Donc $\frac{1}{X^3 - 1} = \frac{1}{3(X - 1)} - \frac{X + 2}{3(X^2 + X + 1)}$. Vérification en 0 : $-1 = -\frac{1}{3} - \frac{2}{3}$.

3. D'après l'exercice 7, $X^n - 1$ n'a que des racines simples : ce sont les ω_k . Le coefficient associé à ω_k vaut $\frac{1}{n\omega_k^{n-1}} = \frac{\omega_k}{n\omega_k^n} = \frac{\omega_k}{n}$. Enfin, la partie entière est nulle car le degré est négatif. **Donc** $\frac{1}{X^n - 1} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\omega_k}{X - \omega_k}$.

Corrigé de l'exercice 17 : Pôle double et dérivées successives

1. Le degré de F est négatif, donc sa partie entière est nulle. La forme est

$$F = \frac{a}{X} + \frac{b}{X-1} + \frac{c}{(X-1)^2}. \text{ D'abord, on multiplie par } X \text{ et on évalue en } 0 :$$

$$a = \frac{1}{1} = 1. \text{ Ensuite, on multiplie par } (X-1)^2 \text{ et on évalue en } 1 : c = \frac{3}{1} = 3. \text{ Enfin, } xF(x) \rightarrow 0 \text{ en } +\infty, \text{ car } \deg F = -2. \text{ Or } xF(x) \rightarrow a + b. \text{ Donc } b = -1. \text{ Ainsi, } F = \frac{1}{X} - \frac{1}{X-1} + \frac{3}{(X-1)^2}.$$

2. En -1 : $F(-1) = \frac{-1}{(-1) \times 4} = \frac{1}{4}$. Par ailleurs, $-1 + \frac{1}{2} + \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$. **La décomposition est confirmée.**

3. Pour $p \geq 1$ et $x > 1$, une récurrence immédiate donne la dérivée n -ième de $x \rightarrow (x - \alpha)^{-p}$. Elle vaut $(-1)^n p(p+1) \dots (p+n-1)(x - \alpha)^{-p-n}$. Pour $p = 1$, le produit vaut $n!$; pour $p = 2$, il vaut $(n+1)!$. Par linéarité,

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n \left(\frac{n!}{x^{n+1}} - \frac{n!}{(x-1)^{n+1}} + \frac{3(n+1)!}{(x-1)^{n+2}} \right).$$

Point de méthode : pour un pôle multiple, calculez d'abord le coefficient d'ordre le plus élevé par évaluation. Pour les autres, la limite de $xF(x)$ en l'infini est souvent la voie la plus rapide.

Corrigé de l'exercice 18 : Décomposition dans $\mathbb{R}(X)$

1. Le facteur $X^2 + 1$ est irréductible dans $\mathbb{R}[X]$. On cherche $F = \frac{a}{X-1} + \frac{bX+c}{X^2+1}$. Le pôle 1 est simple, donc $a = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$. Ensuite, on multiplie par $X^2 + 1$ et on évalue en i : $\frac{i}{i-1} = bi + c$. Or $\frac{i}{i-1} = \frac{i(-1-i)}{(i-1)(-1-i)} = \frac{1-i}{2}$. En identifiant, $c = \frac{1}{2}$ et $b = -\frac{1}{2}$. **Donc** $F = \frac{1}{2(X-1)} - \frac{X-1}{2(X^2+1)}$. Vérification en 0 : $F(0) = 0$ et $-\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0$.
2. Dans $\mathbb{C}(X)$, le coefficient en i vaut $\frac{i}{(i-1)(2i)} = \frac{1}{2(i-1)} = -\frac{1+i}{4}$. Par conjugaison, celui en $-i$ vaut $-\frac{1-i}{4}$. **Donc** $F = \frac{1}{2(X-1)} - \frac{1+i}{4(X-i)} - \frac{1-i}{4(X+i)}$. En regroupant les deux derniers termes, le numérateur vaut $-\frac{1}{4}((1+i)(X+i) + (1-i)(X-i)) = -\frac{1}{4}(2X-2)$. On retrouve bien $-\frac{X-1}{2(X^2+1)}$.
3. Le degré de G vaut 2, donc il y a une partie entière. On divise X^4 par $X^2 + X + 1$. D'abord, $X^4 - X^2(X^2 + X + 1) = -X^3 - X^2$. Ensuite, $-X^3 - X^2 + X(X^2 + X + 1) = X$. Le reste est X . Le dénominateur a un discriminant $-3 < 0$, donc il est irréductible. **Ainsi**, $G = X^2 - X + \frac{X}{X^2 + X + 1}$.

Corrigé de l'exercice 19 : Somme télescopique

1. Les trois pôles 0, -1, -2 sont simples. Les coefficients s'obtiennent par évaluation. En 0 : $\frac{1}{1 \times 2} = \frac{1}{2}$. En -1 : $\frac{1}{(-1) \times 1} = -1$. En -2 : $\frac{1}{(-2)(-1)} = \frac{1}{2}$. **Donc** $\frac{1}{X(X+1)(X+2)} = \frac{1}{2X} - \frac{1}{X+1} + \frac{1}{2(X+2)}$.
2. On réécrit la décomposition sous la forme $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2}\right)$. En sommant de $k = 1$ à n , les deux sommes télescopent :

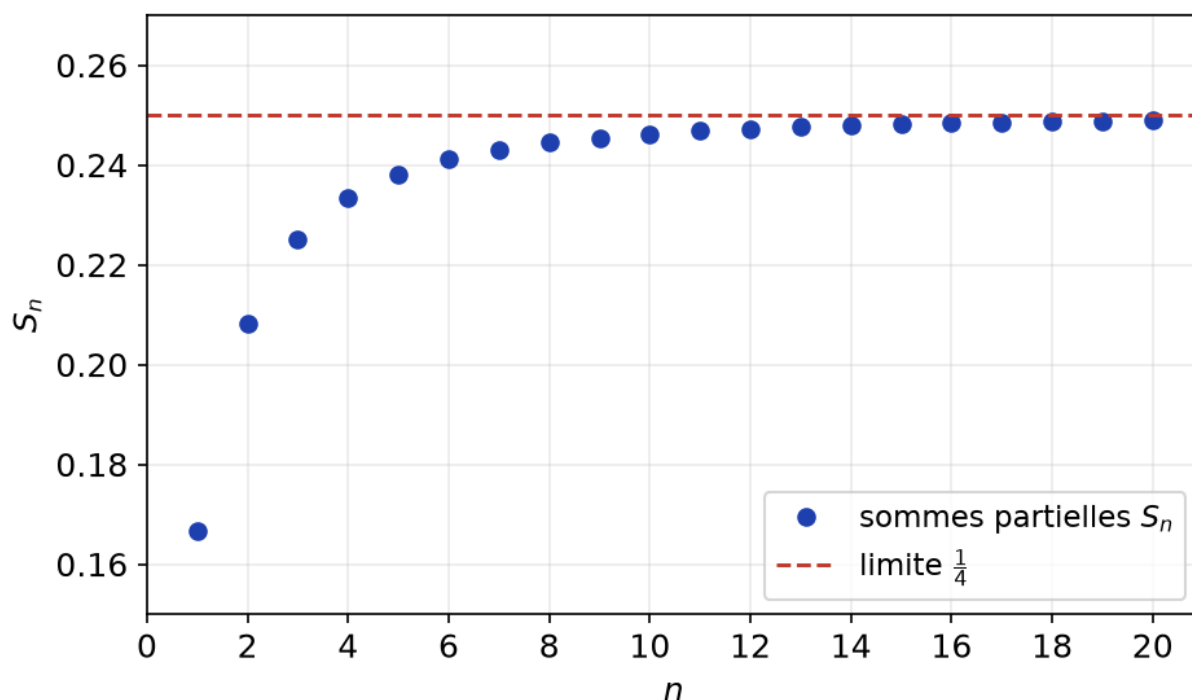
$$S_n = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n+2}\right).$$

Donc $S_n = \frac{1}{4} - \frac{1}{2(n+1)} + \frac{1}{2(n+2)}$. Pour $n = 1$, on trouve $\frac{1}{4} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{1}{6}$, ce qui est

bien $\frac{1}{1 \times 2 \times 3}$.

3. Les deux derniers termes tendent vers 0. **Donc** $S_n \rightarrow \frac{1}{4}$. On peut aussi écrire

$S_n = \frac{1}{4} - \frac{1}{2(n+1)(n+2)}$, ce qui montre que la convergence se fait par valeurs inférieures. La figure ci-dessous le confirme.



Corrigé de l'exercice 20 : Dérivée logarithmique

1. D'après d'Alembert-Gauss, $P = a \prod_{k=1}^r (X - z_k)^{m_k}$. On dérive ce produit par la règle de Leibniz :

$$P' = a \sum_{k=1}^r m_k (X - z_k)^{m_k - 1} \prod_{l \neq k} (X - z_l)^{m_l} = \sum_{k=1}^r \frac{m_k P}{X - z_k}.$$

En divisant par P , on obtient $\frac{P'}{P} = \sum_{k=1}^r \frac{m_k}{X - z_k}.$

2. Ici P a des racines réelles simples $x_1, \dots, x_n$. Sur $\mathbb{R}$ privé des racines, la fonction

$g = \frac{P'}{P}$ vaut $\sum_k \frac{1}{x - x_k}$. En dérivant,

$$g'(x) = \frac{P''P - (P')^2}{P^2}(x) = -\sum_k \frac{1}{(x - x_k)^2} < 0. \text{ Donc } (P')^2 - PP'' > 0 \text{ en ces}$$

points. En une racine x_k , on a $P(x_k) = 0$ et $P'(x_k) \neq 0$, car la racine est simple. L'expression vaut alors $P'(x_k)^2 > 0$. **Ainsi, $(P')^2 - PP'' > 0$ sur tout $\mathbb{R}$.**

3. Posons $P = 1 + X + \dots + X^{n-1}$. Comme $(X - 1)P = X^n - 1$, les racines de P sont les ω^k , pour $1 \leq k \leq n - 1$, toutes simples. Par la question 1, $\frac{P'(1)}{P(1)} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{1 - \omega^k}$. Or $P(1) = n$ et $P'(1) = 1 + 2 + \dots + (n - 1) = \frac{n(n-1)}{2}$. **Donc**
- $$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{1 - \omega^k} = \frac{n-1}{2}.$$

Corrigé de l'exercice 21 : Factorisation de $X^n - 1$ et produit de sinus

1. Les ω_k sont n racines distinctes de $X^n - 1$, qui est unitaire de degré n . **Donc**

$$X^n - 1 = \prod_{k=0}^{n-1} (X - \omega_k).$$

2. On a $\omega_{n-k} = \overline{\omega_k}$, et $(X - \omega_k)(X - \overline{\omega_k}) = X^2 - 2\cos\frac{2k\pi}{n}X + 1$. Ce trinôme est irréductible si ω_k n'est pas réel. Les seules racines réelles sont 1 , et -1 quand n est pair.

Si $n = 2m + 1$, alors $X^n - 1 = (X - 1) \prod_{k=1}^m (X^2 - 2\cos\frac{2k\pi}{n}X + 1)$. **Si $n = 2m$, alors** $X^n - 1 = (X - 1)(X + 1) \prod_{k=1}^{m-1} (X^2 - 2\cos\frac{2k\pi}{n}X + 1)$.

3. On a $\frac{X^n - 1}{X - 1} = 1 + X + \dots + X^{n-1} = \prod_{k=1}^{n-1} (X - \omega_k)$. En évaluant en 1 , **on obtient**
- $$\prod_{k=1}^{n-1} (1 - \omega_k) = n.$$

4. Pour $1 \leq k \leq n - 1$, on factorise par l'angle moitié :

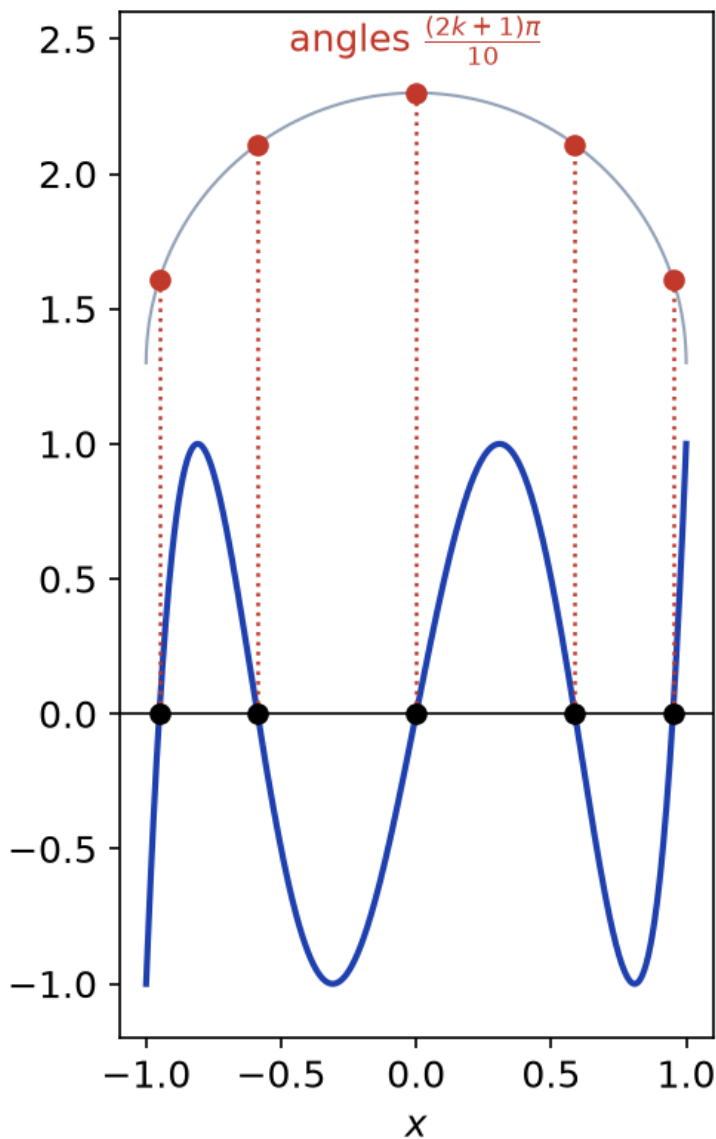
$$1 - \omega_k = e^{ik\pi/n} (e^{-ik\pi/n} - e^{ik\pi/n}) = -2i \sin\frac{k\pi}{n} e^{ik\pi/n}. \text{ Donc}$$

$$|1 - \omega_k| = 2\sin\frac{k\pi}{n}, \text{ car } 0 < \frac{k\pi}{n} < \pi. \text{ En prenant le module dans la question 3,}$$

$$2^{n-1} \prod_{k=1}^{n-1} \sin \frac{k\pi}{n} = n. \text{ Donc } \prod_{k=1}^{n-1} \sin \frac{k\pi}{n} = \frac{n}{2^{n-1}}. \text{ Pour } n = 3, \text{ on retrouve } \sin \frac{\pi}{3} \sin \frac{2\pi}{3} = \frac{3}{4}.$$

Corrigé de l'exercice 22 : Problème : polynômes de Tchebychev

- Par la relation de récurrence : $T_2 = 2X \cdot X - 1 = 2X^2 - 1$. Ensuite,
 $T_3 = 2X(2X^2 - 1) - X = 4X^3 - 3X$. Enfin,
 $T_4 = 2X(4X^3 - 3X) - (2X^2 - 1) = 8X^4 - 8X^2 + 1$. **Donc** $T_2 = 2X^2 - 1$,
 $T_3 = 4X^3 - 3X$ **et** $T_4 = 8X^4 - 8X^2 + 1$.
- On raisonne par récurrence double. La propriété est vraie pour $n = 1$ et $n = 2$. Supposons-la vraie aux rangs $n - 1$ et n , avec $n \geq 2$. Alors $2XT_n$ est de degré $n + 1$, de coefficient dominant $2 \times 2^{n-1} = 2^n$. De plus, T_{n-1} est de degré $n - 1 < n + 1$. Donc T_{n+1} est de degré $n + 1$ et de coefficient dominant 2^n . Pour la parité, si T_n a la parité de n et T_{n-1} celle de $n - 1$, alors $2XT_n$ et T_{n-1} ont tous deux la parité de $n + 1$. **Ainsi, $\deg T_n = n$, de coefficient dominant 2^{n-1} , et $T_n(-X) = (-1)^n T_n(X)$.**
- On raisonne encore par récurrence double. C'est vrai pour $n = 0$ et $n = 1$. Ensuite, la formule $\cos((n + 1)\theta) + \cos((n - 1)\theta) = 2\cos\theta\cos(n\theta)$ donne
 $\cos((n + 1)\theta) = 2\cos\theta T_n(\cos\theta) - T_{n-1}(\cos\theta) = T_{n+1}(\cos\theta)$. **Donc**
 $T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta)$ **pour tout n et tout θ .**
- On cherche $\theta \in [0, \pi]$ tel que $\cos(n\theta) = 0$, c'est-à-dire $n\theta = \frac{\pi}{2} + k\pi$. On obtient
 $\theta_k = \frac{(2k + 1)\pi}{2n}$ pour $0 \leq k \leq n - 1$, tous dans $]0, \pi[$. Comme cosinus est strictement décroissant sur $[0, \pi]$, les réels $c_k = \cos\theta_k$ sont distincts. Ce sont donc n racines distinctes de T_n , qui est de degré n . Par conséquent, il n'y en a pas d'autre, et elles sont simples. **Ainsi,**
 $T_n = 2^{n-1} \prod_{k=0}^{n-1} \left(X - \cos \frac{(2k + 1)\pi}{2n} \right)$. La figure ci-dessous montre cette construction pour $n = 5$.



Chaque racine de T_5 est la projection d'un point du demi-cercle d'angle $(2k+1)\pi/10$

5. D'après la question 2, T_n a la parité de n . Donc son coefficient en x^{n-1} est nul, puisque $n-1$ n'a pas la parité de n . La relation $\sigma_1 = -\frac{a_{n-1}}{a_n}$ donne alors $\sigma_1 = 0$. **Donc**

$$\sum_{k=0}^{n-1} \cos \frac{(2k+1)\pi}{2n} = 0.$$

6. Pour n pair, on évalue la factorisation en 0 :

$$T_n(0) = 2^{n-1} \prod_k (-c_k) = 2^{n-1} (-1)^n \prod_k c_k = 2^{n-1} \prod_k c_k. \text{ Par ailleurs,}$$

$$T_n(0) = T_n\left(\cos \frac{\pi}{2}\right) = \cos \frac{n\pi}{2} = (-1)^{n/2}. \text{ Donc } \prod_{k=0}^{n-1} \cos \frac{(2k+1)\pi}{2n} = \frac{(-1)^{n/2}}{2^{n-1}}. \text{ Pour}$$

$$n = 2, \text{ on retrouve } \cos \frac{\pi}{4} \cos \frac{3\pi}{4} = -\frac{1}{2}.$$

Point de méthode : pour trouver les racines d'un polynôme défini par une identité trigonométrique, résolvez l'équation en θ , puis comptez les solutions distinctes. Si vous en trouvez autant que le degré, la factorisation est complète.

[Revenir aux énoncés des exercices](#)

Pour aller plus loin en L1

- Le cours : [polynômes, cours de maths en L1](#)
- Les énoncés : [exercices de maths en L1 sur polynômes](#)
- À maîtriser avant : [Nombres complexes et trigonométrie](#), [Arithmétique des entiers](#)
- Chapitre précédent : [Arithmétique des entiers](#)
- Chapitre suivant : [Systèmes linéaires et calcul matriciel](#)
- Tester vos connaissances : [QCM de maths en L1 par chapitre](#)
- Le sommaire : [tous les chapitres de maths de L1](#) et la [licence de maths de L1 à L3](#)