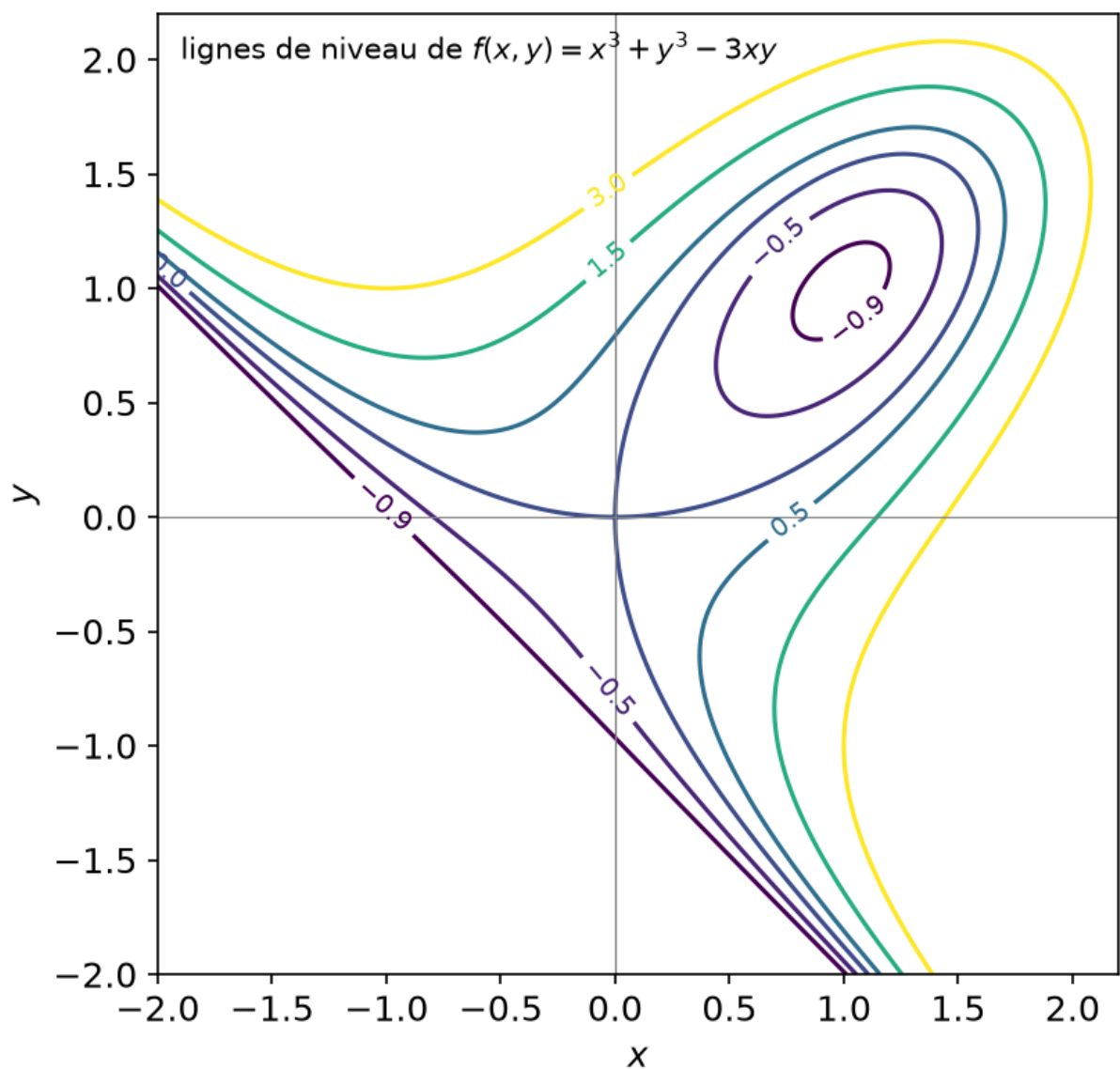


Optimisation

Exercice 1 : Points critiques d'un polynôme de degré 3

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$. La figure ci-dessous montre quelques-unes de ses lignes de niveau.



1. Déterminer les points critiques de f .
2. Calculer la matrice hessienne de f en un point (x,y) quelconque.
3. Préciser la nature de chaque point critique.
4. La fonction f admet-elle un extremum global sur $\mathbb{R}^2$?

Exercice 2 : Minimum d'une fonction quadratique

Soit $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y$ pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

1. Montrer que f possède un unique point critique a , que l'on déterminera.
2. Calculer la hessienne de f et montrer qu'elle est définie positive.
3. En développant $f(a + (h,k))$, montrer que f admet en a un minimum global. Préciser sa valeur.

Exercice 3 : Hessienne et formule de Taylor-Young

Soit $f(x,y) = x e^y + y e^x$ pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

1. Justifier que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^2$.
2. Calculer le gradient et la matrice hessienne de f en $(0,0)$.
3. Écrire la formule de Taylor-Young à l'ordre 2 de f en $(0,0)$.
4. En déduire une valeur approchée de $f(0,1; -0,1)$ et la comparer à la valeur exacte.

Exercice 4 : Utiliser le théorème de Schwarz

1. Montrer qu'il n'existe aucune fonction f de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$ telle que $\partial_x f(x,y) = x y^2$ et $\partial_y f(x,y) = x^2 + y$.
2. Déterminer toutes les fonctions f de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ telles que, pour tout (x,y) , $\partial_x f(x,y) = 2xy + 3$ et $\partial_y f(x,y) = x^2 + 2y$.
3. Soit f de classe C^3 sur $\mathbb{R}^2$. Combien de dérivées partielles d'ordre 3 distinctes f possède-t-elle au plus ? Justifier.

Exercice 5 : Discussion par la trace et le déterminant

Pour $a \in \mathbb{R}$, on pose $f_a(x,y) = x^2 + a x y + y^2 - x^4$.

1. Vérifier que $(0,0)$ est un point critique de f_a .
2. Calculer la hessienne de f_a en $(0,0)$, sa trace et son déterminant.
3. Discuter selon a la nature du point $(0,0)$ lorsque $|a| \neq 2$.
4. On suppose $a = 2$. En étudiant f_2 le long des droites $y = 0$ et $y = -x$, montrer que $(0,0)$ n'est pas un extremum local.

Exercice 6 : Même hessienne, trois comportements

On considère sur $\mathbb{R}^2$ les fonctions $f(x,y) = x^2 + y^3$, $g(x,y) = x^2 + y^4$ et $h(x,y) = x^2 - y^4$.

1. Montrer que $(0,0)$ est un point critique de ces trois fonctions et qu'elles y ont la même hessienne.

2. Cette hessienne est-elle positive ? définie positive ?
3. Étudier la nature du point $(0,0)$ pour chacune des trois fonctions.
4. Quelle conclusion générale en tirer ?

Exercice 7 : Une fonction de classe C^1 mais pas C^2

Soit f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(0,0) = 0$ et, pour $(x,y) \neq (0,0)$,

$$f(x,y) = \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}.$$

1. Montrer que f est continue en $(0,0)$.
2. Calculer $\partial_x f(x,y)$ pour $(x,y) \neq (0,0)$, puis $\partial_x f(0,0)$.
3. Montrer que $|\partial_x f(x,y)| \leq 2|y|$ pour $(x,y) \neq (0,0)$. En admettant par symétrie le résultat analogue pour $\partial_y f$, en déduire que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.
4. Calculer $\partial_x f(0,y)$ et $\partial_y f(x,0)$ pour tous réels x, y .
5. En déduire $\partial_y \partial_x f(0,0)$ et $\partial_x \partial_y f(0,0)$. Que peut-on conclure ?

Exercice 8 : Points critiques et extremum global

Soit $f(x,y) = x^4 + y^4 - 2(x-y)^2$ pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

1. Déterminer les points critiques de f .
2. Étudier la nature des points critiques où la hessienne est inversible.

3. Montrer que $(0,0)$ n'est pas un extremum local, en étudiant $f(x,x)$ et $f(x,0)$.
4. Montrer que $(x-y)^2 \leq 2(x^2 + y^2)$, puis que $f(x,y) \geq (x^2-2)^2 + (y^2-2)^2 - 8$. En déduire le minimum global de f et les points où il est atteint.

Exercice 9 : Hessienne en dimension trois

Soit $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2xyz$ pour $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

1. Montrer que f possède exactement cinq points critiques.
2. Calculer la hessienne de f en $(0,0,0)$ et conclure.
3. Calculer la hessienne en $(1,1,1)$ et ses valeurs propres. Conclure.
4. Soit $D = \text{diag}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ avec $\varepsilon_i \in \{-1, 1\}$ et $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 = 1$. Montrer que $f(Dv) = f(v)$ pour tout v . En déduire la nature des trois derniers points critiques.
5. L'origine est-elle un minimum global ?

Exercice 10 : Maximum sur un triangle fermé

Soit $T = \left\{ \begin{array}{l} (x,y) \in \mathbb{R}^2, \\ x \geq 0, \\ y \geq 0, \\ x + y \leq 1 \end{array} \right\}$ et $f(x,y) = xy(1-x-y)$.

1. Montrer que f admet sur T un maximum et un minimum.
2. Déterminer f sur la frontière de T , ainsi que son signe à l'intérieur.
3. Déterminer les points critiques de f situés à l'intérieur de T .

4. En déduire le maximum et le minimum de f sur T .

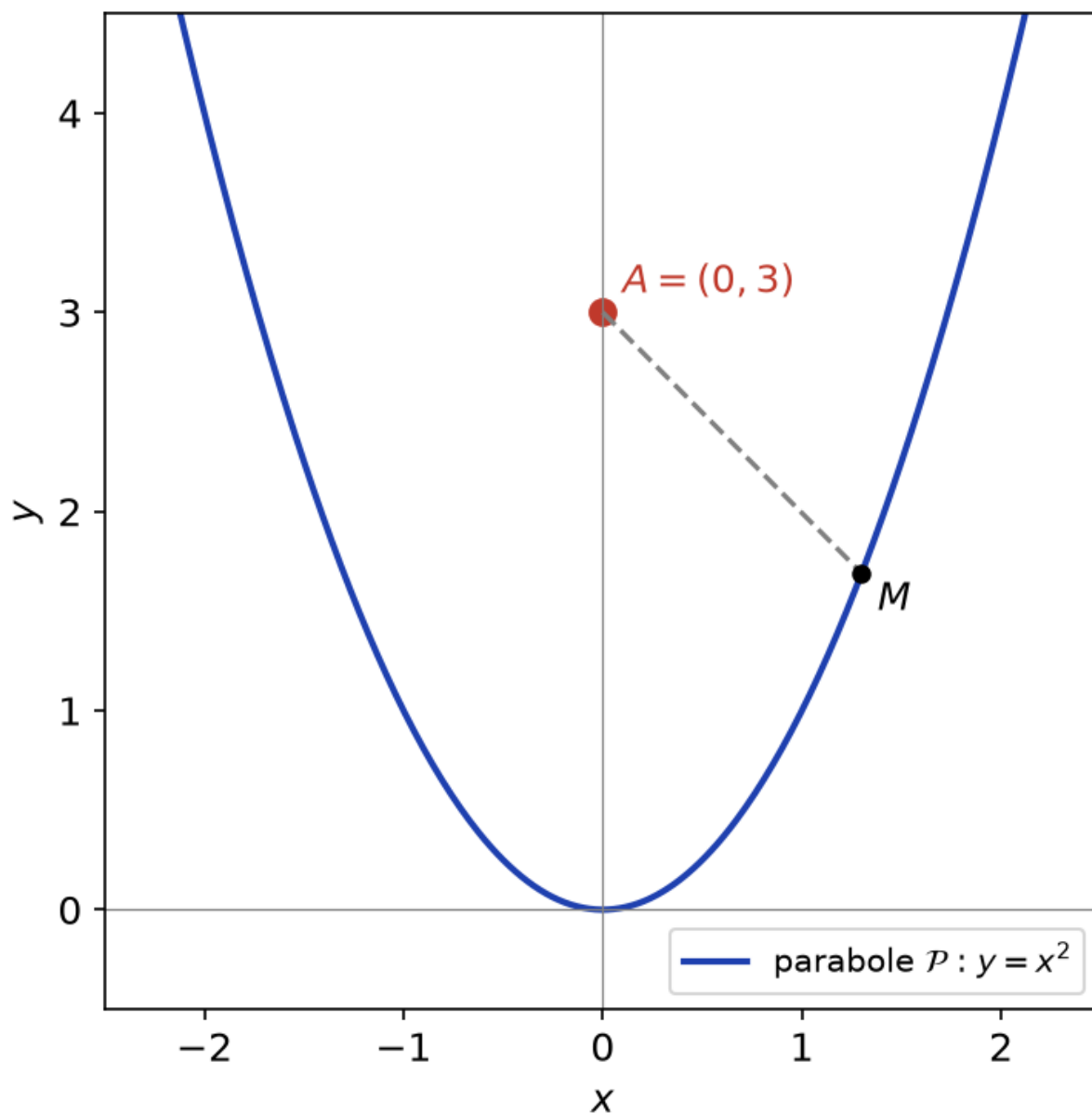
Exercice 11 : Extremums sur un disque fermé

Soit D le disque fermé de centre $(0,0)$ et de rayon 1, et $f(x,y) = x^2 + 2y^2 - x$.

1. Justifier l'existence d'un maximum et d'un minimum de f sur D .
2. Chercher les points critiques de f dans le disque ouvert.
3. Étudier f sur le cercle unité en se ramenant à une fonction de la seule variable x .
4. Conclure en donnant les extremums et les points où ils sont atteints.

Exercice 12 : Distance d'un point à une parabole

Dans le plan, on note $\mathcal{P}$ la parabole d'équation $y = x^2$ et $A = (0,3)$. On cherche les points M de $\mathcal{P}$ les plus proches de A , comme sur la figure ci-dessous.



1. On pose $F(x,y) = x^2 + (y-3)^2$ et $g(x,y) = y - x^2$. Vérifier que ∇g ne s'annule pas sur $\mathcal{P}$.
2. Écrire la condition nécessaire d'extremum lié et trouver les points candidats.
3. En paramétrant $\mathcal{P}$, déterminer la distance de A à $\mathcal{P}$ et les points où elle est atteinte.
4. Vérifier qu'en ces points, le vecteur $\overrightarrow{AM}$ est orthogonal à la tangente à $\mathcal{P}$.
5. Quelle est la nature du point $O = (0,0)$ pour la restriction de F à $\mathcal{P}$?

Exercice 13 : Forme quadratique sur le cercle unité

Soit $q(x,y) = 3x^2 + 2xy + 3y^2$ et $\mathcal{C}$ le cercle unité de $\mathbb{R}^2$.

1. Justifier que q admet un maximum et un minimum sur $\mathcal{C}$.
2. Écrire la condition des extremums liés. Montrer qu'elle signifie que (x,y) est vecteur propre d'une matrice symétrique S à préciser.
3. Montrer qu'en un tel point, $q(x,y)$ est égal à la valeur propre associée.
4. En déduire le maximum et le minimum de q sur $\mathcal{C}$, ainsi que les points où ils sont atteints.

Exercice 14 : Boîte de volume fixé et de surface minimale

On cherche un pavé droit de dimensions $x, y, z > 0$, de volume $xyz = 1$, dont l'aire totale $S = 2(xy + yz + zx)$ est minimale.

1. On note $U =]0, +\infty[^3$, $g(x,y,z) = xyz - 1$ et $X = \{g = 0\}$. Montrer que ∇g ne s'annule pas sur X .
2. Montrer que le seul point de X où ∇S est colinéaire à ∇g est $(1,1,1)$.
3. On pose $h(x,y) = xy + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ sur $]0, +\infty[^2$. Montrer que $h(x,y) > 3$ en dehors du carré $K = [1/3, 9]^2$ et sur le bord de K .
4. En déduire que h admet un minimum global sur $]0, +\infty[^2$, atteint en un point critique. Conclure sur le pavé optimal.

Exercice 15 : Une équation de transport

On cherche les fonctions f de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ telles que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + 2 \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \text{ pour tout } (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

1. Montrer que $\Phi : (u,v) \rightarrow (u, 2u - v)$ est une bijection de $\mathbb{R}^2$ sur lui-même, de classe C^1 ainsi que sa réciproque.
2. On pose $g = f \circ \Phi$. Exprimer $\partial_u g$ à l'aide des dérivées partielles de f .
3. En déduire toutes les solutions de l'équation.
4. Déterminer la solution vérifiant $f(0,y) = y^2$ pour tout réel y , et vérifier qu'elle convient.

Exercice 16 : Laplacien des fonctions radiales

Soit φ de classe C^2 sur $]0, +\infty[$ et $f(x,y) = \varphi(\sqrt{x^2 + y^2})$ sur $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. On note $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ et $\Delta f = \partial_x^2 f + \partial_y^2 f$.

1. Justifier que f est de classe C^2 sur U et calculer $\partial_x f$ et $\partial_x^2 f$.
2. Montrer que $\Delta f(x,y) = \varphi''(r) + \frac{\varphi'(r)}{r}$.
3. Déterminer toutes les fonctions φ telles que $\Delta f = 0$ sur U .
4. Déterminer toutes les fonctions φ telles que $\Delta f = 1$ sur U .

Exercice 17 : Équation des ondes

On cherche les fonctions f de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$ telles que $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$.

1. On pose $g(u,v) = f\left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\right)$, de sorte que $f(x,y) = g(x+y, x-y)$. Exprimer $\partial_x f$ et $\partial_y f$ à l'aide des dérivées partielles de g .
2. Exprimer $\partial_x^2 f - \partial_y^2 f$ à l'aide de $\partial_u \partial_v g$. Où intervient le théorème de Schwarz ?
3. En déduire que les solutions sont les fonctions $f(x,y) = A(x+y) + B(x-y)$ avec A, B de classe C^2 sur $\mathbb{R}$.
4. Déterminer la solution telle que $f(x,0) = \sin x$ et $\partial_y f(x,0) = 0$ pour tout réel x .

Exercice 18 : Le contre-exemple de Peano

Soit $f(x,y) = (x - y^2)(x - 2y^2) = x^2 - 3xy^2 + 2y^4$ sur $\mathbb{R}^2$.

1. Montrer que $(0,0)$ est un point critique de f et calculer la hessienne de f en ce point. Que peut-on en dire ?
2. Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et $\psi(t) = f(t\cos\theta, t\sin\theta)$. Montrer que ψ admet un minimum local strict en 0.
3. Étudier le signe de f dans le plan. Calculer en particulier $f\left(\frac{3}{2}y^2, y\right)$.
4. La fonction f admet-elle un minimum local en $(0,0)$? Commenter.

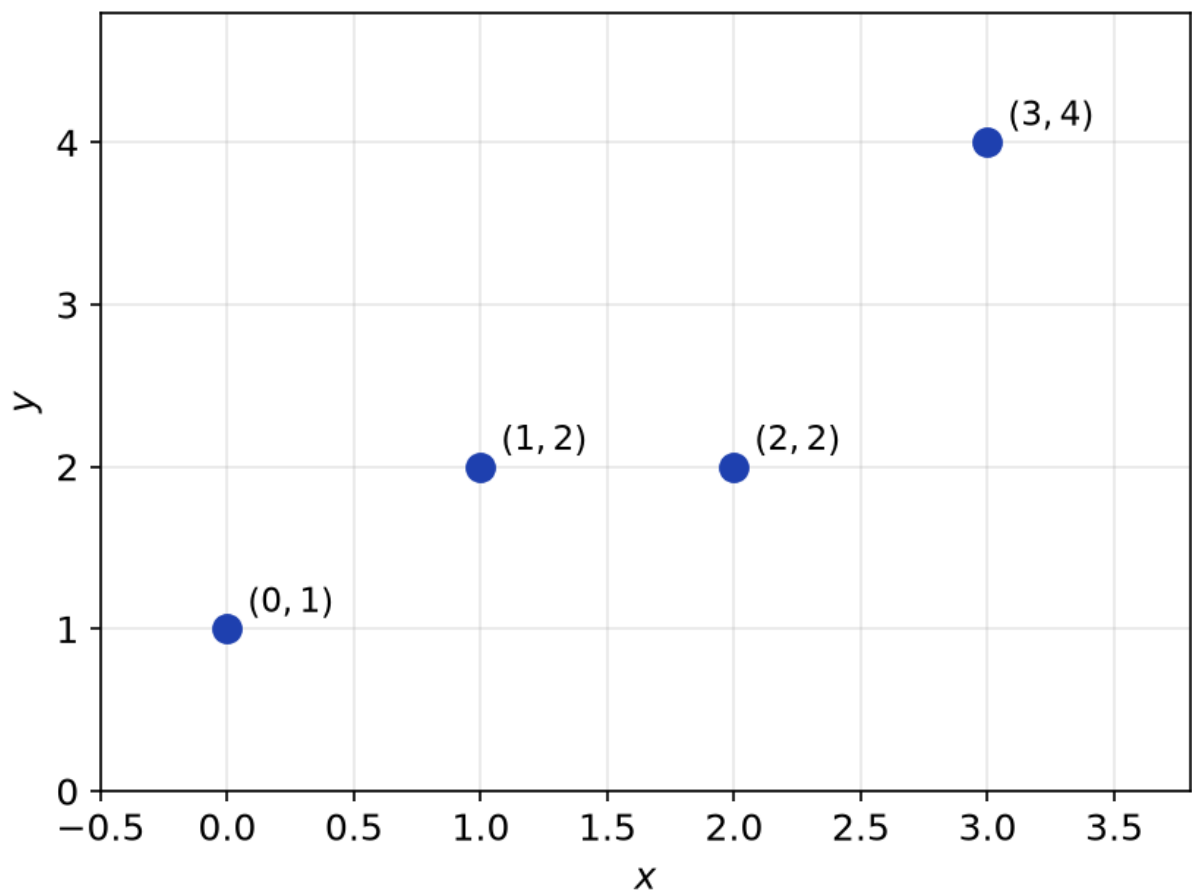
Exercice 19 : Problème : droite des moindres carrés

On dispose de $n \geq 2$ points $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ du plan, avec des abscisses x_i non toutes égales. On cherche la droite $y = ax + b$ qui minimise

$$F(a,b) = \sum_{i=1}^n (y_i - a x_i - b)^2.$$

On note $S_x = \sum x_i$, $S_y = \sum y_i$, $S_{xx} = \sum x_i^2$ et $S_{xy} = \sum x_i y_i$.

1. Calculer le gradient de F . Montrer que (a,b) est un point critique si et seulement si $a S_{xx} + b S_x = S_{xy}$ et $a S_x + n b = S_y$.
2. Calculer la hessienne H de F . À l'aide de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, montrer que $\det H > 0$, puis que H est définie positive.
3. En déduire que F possède un unique point critique p .
4. Montrer que, pour tout $h \in \mathbb{R}^2$, $F(p+h) = F(p) + \frac{1}{2} h^T H h$. Conclure que F atteint en p son minimum global strict.
5. Application : traiter le cas des quatre points $(0,1)$, $(1,2)$, $(2,2)$, $(3,4)$ représentés ci-dessous. Calculer la valeur minimale de F .



Exercice 20 : Problème : inégalité arithmético-géométrique

Soit $n \geq 2$, $K = \left\{ x \in \mathbb{R}^n, \begin{array}{l} x_i \geq 0 \text{ pour tout } i, \\ x_1 + \dots + x_n = 1 \end{array} \right\}$ et $f(x) = x_1 x_2 \dots x_n$.

1. Montrer que K est compact et que f admet un maximum M sur K . Montrer que $M > 0$.
2. Soit $a \in K$ un point où f atteint M . Montrer que toutes les coordonnées de a sont strictement positives.
3. On note $U =]0, +\infty[^n$, $g(x) = x_1 + \dots + x_n - 1$ et $X = U \cap \{g = 0\}$. Justifier que $f|_X$ a un extremum local en a , puis que $\nabla f(a) = \lambda \nabla g(a)$ pour un réel λ .
4. En déduire a et la valeur de M .
5. Démontrer que pour tous réels $y_1, \dots, y_n > 0$: $(y_1 \dots y_n)^{1/n} \leq \frac{y_1 + \dots + y_n}{n}$.

Exercice 21 : Problème : quotient de Rayleigh

Soit $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique réelle, $q(x) = \langle Sx, x \rangle$ pour $x \in \mathbb{R}^n$, et Σ la sphère unité de $\mathbb{R}^n$ pour la norme euclidienne.

1. Développer $q(x+h)$ et en déduire que q est différentiable, avec $\nabla q(x) = 2Sx$.
2. Justifier que q admet un maximum et un minimum sur Σ .
3. Montrer qu'en un point a où $q|_{\Sigma}$ est extrémale, a est vecteur propre de S et $q(a)$ est la valeur propre associée.
4. En déduire que $\max_{\Sigma} q$ et $\min_{\Sigma} q$ sont la plus grande et la plus petite valeur propre de S .

5. Application : $S = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Déterminer les valeurs propres de S , puis les extremums de $q(x,y,z) = 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 2xy + 2yz$ sur Σ et les points où ils sont atteints.

Le corrigé des exercices

Chaque exercice est corrigé en détail, question par question, sur la page suivante.



Pour aller plus loin en maths spé

- Le cours : [optimisation, cours de maths spé](#)
- À maîtriser avant : [Calcul différentiel dans les espaces normés](#), [Endomorphismes autoadjoints et théorème spectral](#)
- Chapitre précédent : [Calcul différentiel dans les espaces normés](#)
- Tester vos connaissances : [QCM de maths spé par chapitre](#)
- Le sommaire : [tous les chapitres de maths spé](#) et les [chapitres de maths sup](#)