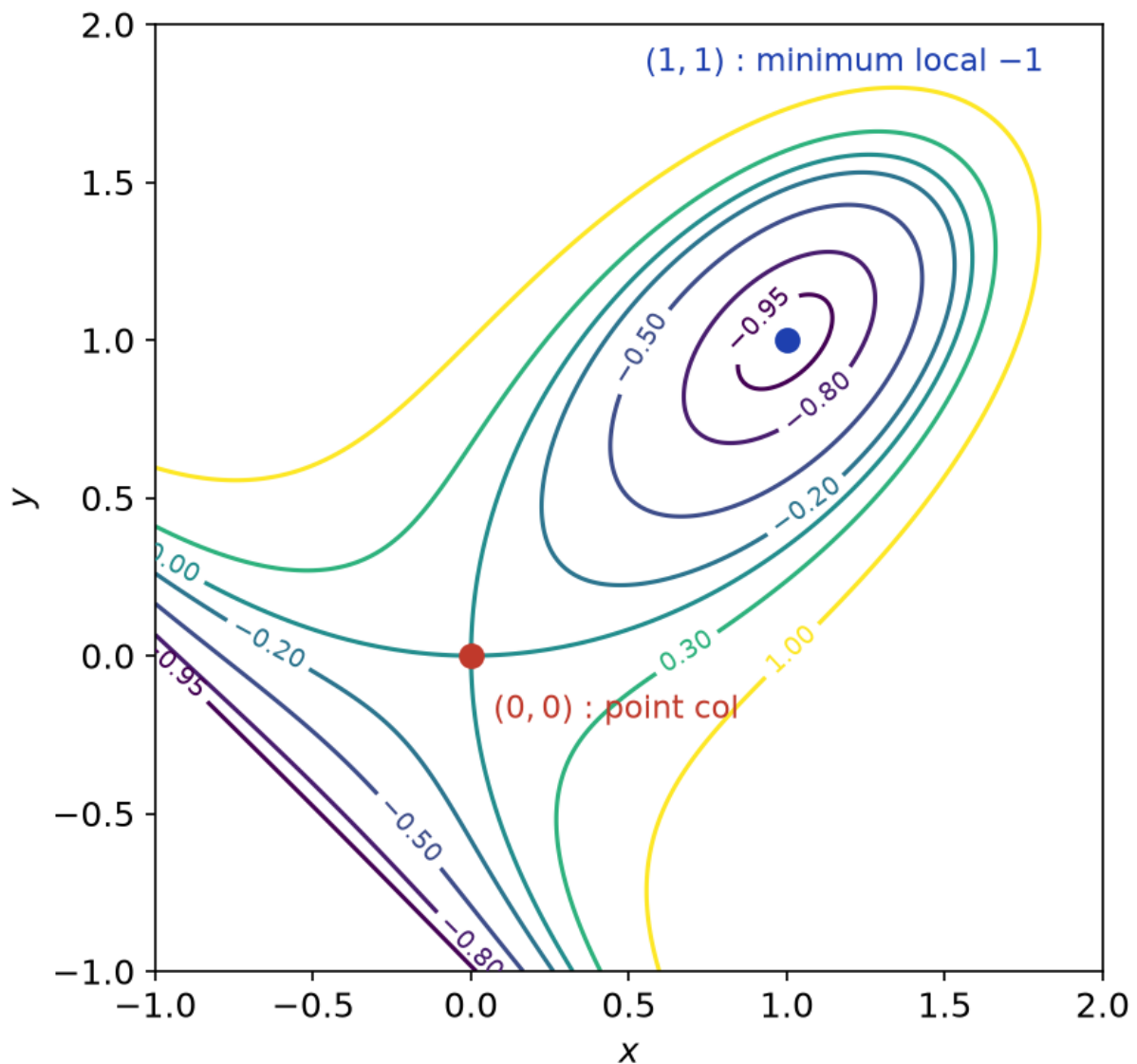


Optimisation

Corrigé de l'exercice 1 : Points critiques d'un polynôme de degré 3

1. La fonction f est polynomiale, donc de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^2$. On a $\partial_x f = 3x^2 - 3y$ et $\partial_y f = 3y^2 - 3x$. Un point critique vérifie donc $y = x^2$ et $x = y^2$. Par substitution, $x = x^4$, soit $x(x^3 - 1) = 0$. Ainsi $x = 0$ ou $x = 1$, et $y = x^2$. **Les points critiques sont $(0,0)$ et $(1,1)$.**
2. On dérive une seconde fois : $\partial_x^2 f = 6x$, $\partial_x \partial_y f = -3$ et $\partial_y^2 f = 6y$. **La hessienne vaut $H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 6y \end{pmatrix}$.**
3. En $(0,0)$, on a $r = 0$, $s = -3$, $t = 0$, donc $rt - s^2 = -9 < 0$. Les valeurs propres sont de signes contraires. **L'origine est un point col.** En $(1,1)$, on a $r = t = 6$ et $s = -3$. Ainsi $rt - s^2 = 27 > 0$ et $r + t = 12 > 0$. **Le point $(1,1)$ est un minimum local strict, avec $f(1,1) = -1$.**
4. On a $f(x,0) = x^3$, qui tend vers $-\infty$ en $-\infty$ et vers $+\infty$ en $+\infty$. Donc f n'est ni minorée ni majorée. **Elle n'admet aucun extremum global.**

La figure ci-dessous place les deux points critiques sur les lignes de niveau. Autour de $(1,1)$, les lignes forment des courbes fermées emboîtées ; en revanche, deux branches de la ligne de niveau 0 se croisent en l'origine.



Corrigé de l'exercice 2 : Minimum d'une fonction quadratique

- On a $\partial_x f = 2x + y - 3$ et $\partial_y f = x + 2y - 6$. Le système $2x + y = 3$, $x + 2y = 6$ a pour déterminant $3 \neq 0$. La première équation donne $y = 3 - 2x$. En reportant, $x + 6 - 4x = 6$, donc $x = 0$ et $y = 3$. **L'unique point critique est $a = (0, 3)$.**
- La hessienne est constante : $H = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Son déterminant vaut $3 > 0$ et sa trace $4 > 0$. Ses deux valeurs propres, 1 et 3 , sont donc strictement positives. **La hessienne est définie positive.**
- Développons : $f(h, 3+k) = h^2 + h(3+k) + (3+k)^2 - 3h - 6(3+k)$. Après

simplification, les termes du premier degré disparaissent :

$$f(h, 3+k) = h^2 + hk + k^2 - 9.$$

Or $h^2 + hk + k^2 = \left(h + \frac{k}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}k^2 \geq 0$, avec égalité seulement si $h = k = 0$. **Donc f admet en $(0,3)$ un minimum global strict égal à -9 .**

Point de méthode : pour une fonction polynomiale de degré 2, la formule de Taylor en un point critique est exacte. Une hessienne définie positive donne alors directement un minimum global.

Corrigé de l'exercice 3 : Hessienne et formule de Taylor-Young

1. Les fonctions $(x,y) \rightarrow x$, $(x,y) \rightarrow y$, $\exp$ sont de classe C^∞ . Par produits, composées et sommes, **f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^2$.**
2. On calcule $\partial_x f = e^y + y e^x$ et $\partial_y f = x e^y + e^x$. Donc $\nabla f(0,0) = (1,1)$.
Ensuite, $\partial_x^2 f = y e^x$, $\partial_y^2 f = x e^y$ et $\partial_x \partial_y f = e^y + e^x$. En $(0,0)$, cela donne
 $r = 0$, $s = 2$, $t = 0$. **Ainsi $\nabla f(0,0) = (1,1)$ et $H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$.**
3. Comme $f(0,0) = 0$, la formule de Taylor-Young s'écrit

$$f(x,y) = x + y + \frac{1}{2}(0 \cdot x^2 + 2 \cdot 2xy + 0 \cdot y^2) + o(x^2 + y^2).$$

Donc $f(x,y) = x + y + 2xy + o(x^2 + y^2)$.
4. Avec $x = 0,1$ et $y = -0,1$, on obtient $x + y + 2xy = -0,02$. La valeur exacte vaut
 $0,1(e^{-0,1} - e^{0,1}) = -0,2 \operatorname{sh}(0,1)$. Or $\operatorname{sh}(0,1) \approx 0,100167$. **La valeur exacte est environ $-0,020033$, très proche de l'approximation $-0,02$.** L'écart est de l'ordre de
 3×10^{-5} , cohérent avec un reste d'ordre 3.

Corrigé de l'exercice 4 : Utiliser le théorème de Schwarz

1. Raisonnons par l'absurde. Si une telle f de classe C^2 existait, on aurait $\partial_y \partial_x f(x,y) = \partial_y (x y^2) = 2xy$. De même, $\partial_x \partial_y f(x,y) = \partial_x (x^2 + y) = 2x$. Le théorème de Schwarz imposerait $2xy = 2x$ pour tout (x,y) . C'est faux en $(1,0)$, où l'on obtiendrait $0 = 2$. **Une telle fonction n'existe donc pas.**
2. Remarquons d'abord la compatibilité : $\partial_y (2xy+3) = 2x = \partial_x (x^2+2y)$. Soit f une solution. Alors $x \rightarrow f(x,y) - x^2 y - 3x$ a une dérivée nulle sur $\mathbb{R}$. Il existe donc une fonction φ telle que $f(x,y) = x^2 y + 3x + \varphi(y)$. Comme $\varphi(y) = f(0,y)$, elle est de classe C^1 . En dérivant par rapport à y , on trouve $x^2 + \varphi'(y) = x^2 + 2y$, donc $\varphi(y) = y^2 + C$. Réciproquement, ces fonctions conviennent. **Les solutions sont les $f(x,y) = x^2 y + 3x + y^2 + C$, avec $C \in \mathbb{R}$.**
3. Une dérivée partielle d'ordre 3 s'obtient par trois dérivations, chacune selon x ou y . Sans hypothèse, il y a $2^3 = 8$ ordres possibles. Cependant, pour f de classe C^3 , le théorème de Schwarz permet d'échanger deux dérivations consécutives. Une dérivée d'ordre 3 ne dépend donc que du nombre $k \in \{0,1,2,3\}$ de dérivations selon x . **Il y a au plus 4 dérivées d'ordre 3 distinctes : $\partial_x^3 f$, $\partial_x^2 \partial_y f$, $\partial_x \partial_y^2 f$ et $\partial_y^3 f$.**

Corrigé de l'exercice 5 : Discussion par la trace et le déterminant

1. La fonction f_a est polynomiale. On a $\partial_x f_a = 2x + ay - 4x^3$ et $\partial_y f_a = ax + 2y$. **Ces deux dérivées s'annulent en $(0,0)$, qui est donc un point critique.**
2. On a $\partial_x^2 f_a = 2 - 12x^2$, $\partial_x \partial_y f_a = a$ et $\partial_y^2 f_a = 2$. En $(0,0)$, $H = \begin{pmatrix} 2 & a \\ a & 2 \end{pmatrix}$, **de trace 4 et de déterminant $4 - a^2$.**
3. Si $|a| < 2$, alors $\det H > 0$ et $\text{tr } H > 0$. **L'origine est un minimum local strict.** Si $|a| > 2$, alors $\det H < 0$. **L'origine est un point col.**
4. Pour $a = 2$, $f_2(x,y) = (x+y)^2 - x^4$. D'une part, $f_2(x,0) = x^2(1 - x^2) > 0$ pour $0 < |x| < 1$. D'autre part, $f_2(x,-x) = -x^4 < 0$ pour $x \neq 0$. Ainsi, tout voisinage de l'origine contient des points où $f_2 > 0 = f_2(0,0)$ et d'autres où $f_2 < 0$. **L'origine n'est pas**

un extremum local de f_2 .

Corrigé de l'exercice 6 : Même hessienne, trois comportements

1. Les gradients valent $(2x, 3y^2)$, $(2x, 4y^3)$ et $(2x, -4y^3)$; ils s'annulent en $(0,0)$. Les dérivées secondes croisées sont nulles. Par ailleurs, ∂_x^2 vaut 2 pour les trois fonctions, et ∂_y^2 vaut $6y$, $12y^2$, $-12y^2$, nul en 0. **La hessienne commune en $(0,0)$ est**
$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
2. Ses valeurs propres sont 2 et 0. **Elle est positive mais pas définie positive** : on est dans le cas $rt - s^2 = 0$.
3. Pour f : $f(0,y) = y^3$ change de signe au voisinage de 0. **L'origine n'est pas un extremum de f** . Pour g : $g(x,y) \geq 0 = g(0,0)$, avec égalité seulement en l'origine. **C'est un minimum global strict de g** . Pour h : $h(x,0) = x^2 > 0$ et $h(0,y) = -y^4 < 0$ hors de l'origine. **C'est un point col de h** .
4. Lorsque la hessienne est dégénérée, elle ne détermine pas la nature du point critique. **Il faut alors étudier directement le signe de $f(a+h) - f(a)$** .

Corrigé de l'exercice 7 : Une fonction de classe C1 mais pas C2

1. Pour $(x,y) \neq (0,0)$, on a $|x^2 - y^2| \leq x^2 + y^2$. Donc $|f(x,y)| \leq |xy|$, qui tend vers 0 en l'origine. **Ainsi f est continue en $(0,0)$** .
2. Écrivons $f = \frac{x^3 y - x y^3}{x^2 + y^2}$ hors de l'origine. La dérivée d'un quotient donne un numérateur égal à $(3x^2 y - y^3)(x^2 + y^2) - 2x(x^3 y - x y^3)$. Il vaut $x^4 y + 4x^2 y^3 - y^5$. Donc

$$\partial_x f(x,y) = \frac{y(x^4 + 4x^2 y^2 - y^4)}{(x^2 + y^2)^2}.$$

En l'origine, $f(t,0) = 0$ pour tout t . **Par conséquent, $\partial_x f(0,0) = 0$** .

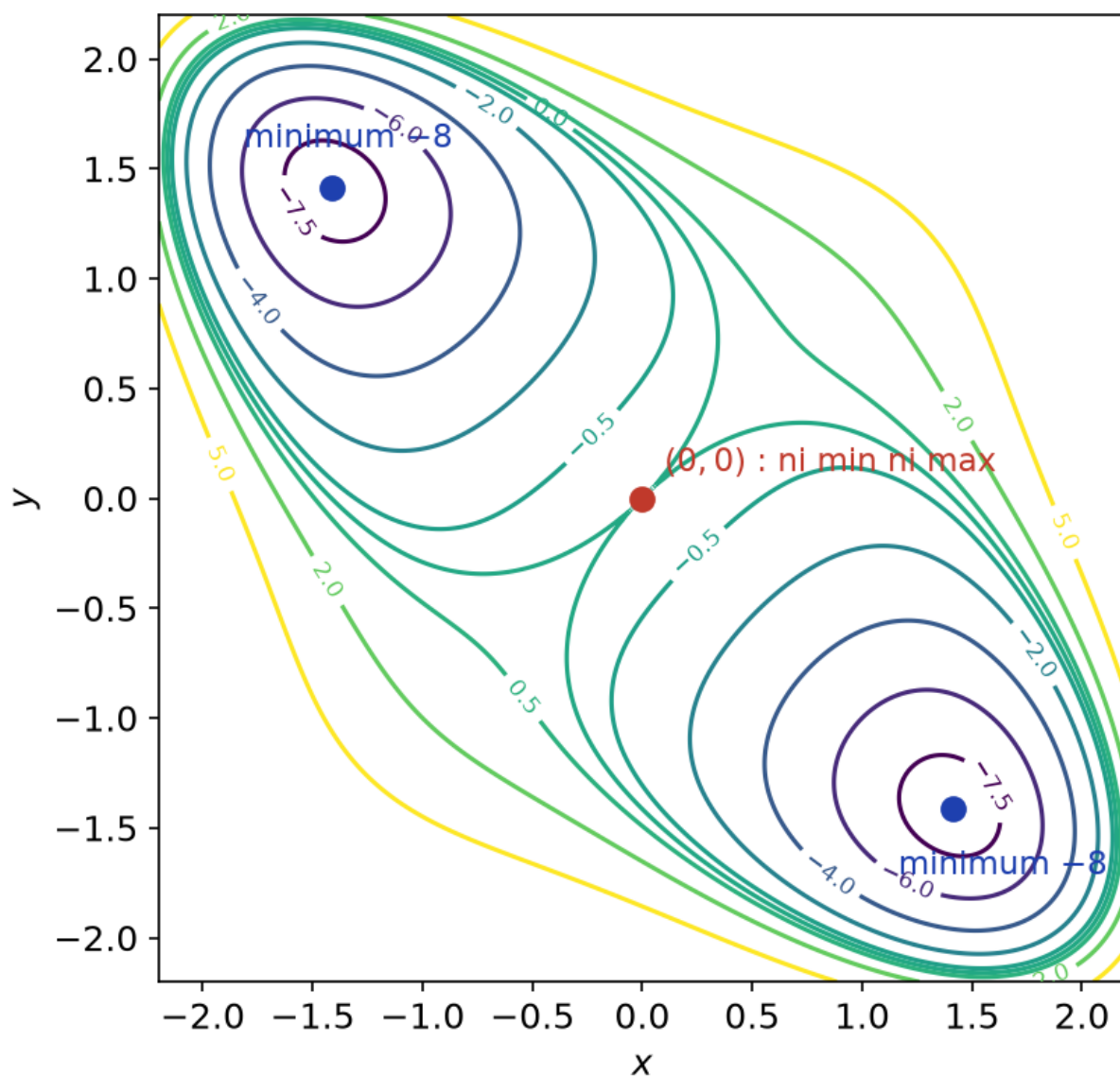
3. Par l'inégalité triangulaire, $|x^4 + 4x^2y^2 - y^4| \leq x^4 + 4x^2y^2 + y^4 \leq 2(x^2 + y^2)^2$. En effet, $2(x^2 + y^2)^2 = 2x^4 + 4x^2y^2 + 2y^4$. **Donc** $|\partial_x f(x, y)| \leq 2|y|$. Ainsi $\partial_x f$ tend vers $0 = \partial_x f(0, 0)$ en l'origine. De plus, $\partial_x f$ est continue ailleurs comme fraction rationnelle. Avec le résultat analogue pour $\partial_y f$, les deux dérivées partielles sont continues sur $\mathbb{R}^2$. **Donc f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.**
4. Pour $y \neq 0$, la formule précédente donne $\partial_x f(0, y) = \frac{y(-y^4)}{y^4} = -y$. C'est encore vrai pour $y = 0$. Pour $x \neq 0$, on a $f(x, t) = t \cdot \frac{x(x^2 - t^2)}{x^2 + t^2}$. Donc $\partial_y f(x, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x, t)}{t} = x$. C'est encore vrai pour $x = 0$. **Ainsi $\partial_x f(0, y) = -y$ et $\partial_y f(x, 0) = x$.**
5. En dérivant $y \rightarrow -y$ en 0, on trouve $\partial_y \partial_x f(0, 0) = -1$. De même, en dérivant $x \rightarrow x$, on trouve $\partial_x \partial_y f(0, 0) = 1$. **Les dérivées croisées diffèrent en l'origine. D'après le théorème de Schwarz, f n'est donc pas de classe C^2 .**

Corrigé de l'exercice 8 : Points critiques et extremum global

1. On a $\partial_x f = 4x^3 - 4(x - y)$ et $\partial_y f = 4y^3 + 4(x - y)$. En ajoutant les deux équations, on obtient $x^3 + y^3 = 0$, donc $y = -x$. La première équation devient $4x^3 - 8x = 0$, soit $x = 0$ ou $x^2 = 2$. **Les points critiques sont $(0, 0)$, $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ et $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$.**
2. On calcule $r = 12x^2 - 4$, $s = 4$, $t = 12y^2 - 4$. En $(\pm\sqrt{2}, \mp\sqrt{2})$, on a $r = t = 20$ et $s = 4$. Ainsi $rt - s^2 = 384 > 0$ et $r + t = 40 > 0$. **Ces deux points sont des minimums locaux stricts, où f vaut $4 + 4 - 2 \times 8 = -8$.** En $(0, 0)$, en revanche, $r = t = -4$ et $s = 4$ donnent $rt - s^2 = 0$: la hessienne ne permet pas de conclure.
3. D'une part, $f(x, x) = 2x^4 > 0$ pour $x \neq 0$. D'autre part, $f(x, 0) = x^4 - 2x^2 = x^2(x^2 - 2) < 0$ pour $0 < |x| < \sqrt{2}$. **L'origine n'est donc pas un extremum local.**
4. On a $2(x^2 + y^2) - (x - y)^2 = (x + y)^2 \geq 0$. Par conséquent,
$$f(x, y) \geq x^4 + y^4 - 4x^2 - 4y^2 = (x^2 - 2)^2 + (y^2 - 2)^2 - 8 \geq -8.$$

L'égalité exige $x^2 = y^2 = 2$ et $x + y = 0$. **Le minimum global de f vaut -8 , atteint exactement en $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ et $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$.**

La figure suivante confirme ces résultats. En effet, les lignes de niveau entourent deux cuvettes symétriques, et l'origine se trouve sur le col qui les sépare.



Corrigé de l'exercice 9 : Hessienne en dimension trois

1. Les points critiques vérifient $x = yz$, $y = xz$ et $z = xy$. Si l'une des coordonnées est nulle, les deux autres équations imposent que tout est nul. Supposons donc $xyz \neq 0$. De $x = yz$ et $y = xz$, on tire $x = xz^2$, donc $z^2 = 1$. De même, $x^2 = y^2 = 1$. Enfin, la relation $z = xy$ fixe le signe de z . **On obtient cinq points :** $(0,0,0)$, $(1,1,1)$,

$(1,-1,-1), (-1,1,-1), (-1,-1,1).$

2. La hessienne générale vaut

$$H(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2 & -2z & -2y \\ -2z & 2 & -2x \\ -2y & -2x & 2 \end{pmatrix}.$$

En l'origine, $H = 2I_3$, définie positive. **L'origine est un minimum local strict, où f vaut 0.**

3. En $(1,1,1)$, la hessienne s'écrit $4I_3 - 2J$, où J est la matrice dont tous les coefficients valent 1. Or J a pour valeurs propres 3 (vecteur $(1,1,1)$) et 0 (double). **Les valeurs propres de H sont donc -2 et 4 (double) : le point $(1,1,1)$ est un point col.**

4. La matrice D conserve $x^2+y^2+z^2$, et le produit des coordonnées de Dv vaut $\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3 xyz = xyz$. Donc $f \circ D = f$. Les trois derniers points critiques s'écrivent $D(1,1,1)$ pour un tel D . Si f avait un extremum local en $D(1,1,1)$, alors $f = f \circ D$ en aurait un en $(1,1,1)$, puisque D est une isométrie. **Ce sont donc aussi des points cols.**

5. On a $f(t,t,t) = 3t^2 - 2t^3$, qui tend vers $-\infty$ quand $t \rightarrow +\infty$. **L'origine n'est pas un minimum global ; f n'est même pas minorée.**

Corrigé de l'exercice 10 : Maximum sur un triangle fermé

1. Le triangle T est fermé, comme intersection de trois demi-plans fermés. Il est borné, car inclus dans $[0,1]^2$. En dimension finie, il est donc compact. De plus, f est continue. **Par le théorème des bornes atteintes, f admet un maximum et un minimum sur T .**

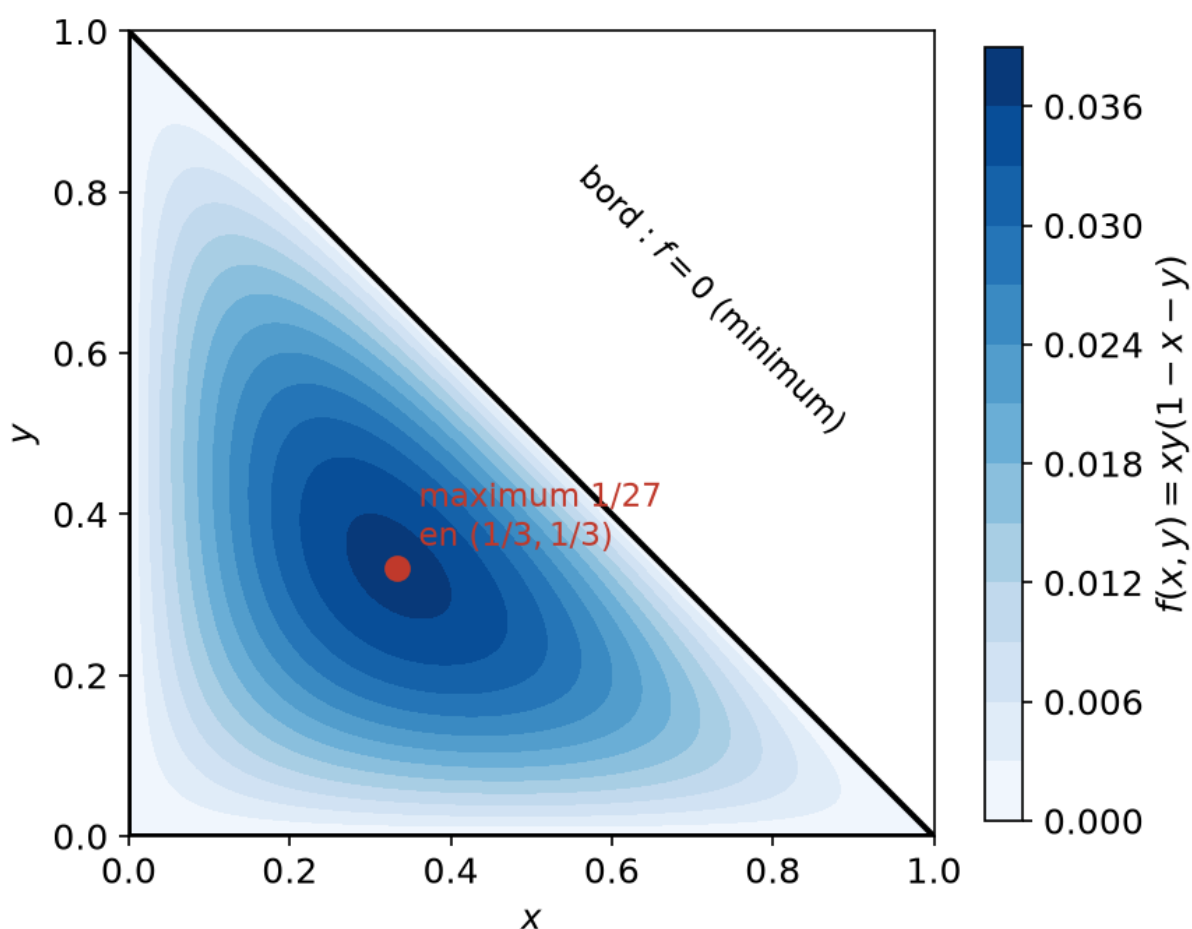
2. La frontière de T est formée des trois côtés, où $x = 0$, $y = 0$ ou $x + y = 1$. **Sur chacun d'eux, $f = 0$. À l'intérieur, $x > 0$, $y > 0$ et $1 - x - y > 0$. Donc $f > 0$ à l'intérieur.**

3. On a $\partial_x f = y(1 - 2x - y)$ et $\partial_y f = x(1 - x - 2y)$. À l'intérieur, x et y sont non nuls. Il reste $2x + y = 1$ et $x + 2y = 1$, d'où $x = y = \frac{1}{3}$. **Le seul point critique intérieur est $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$, où $f = \frac{1}{27}$.**

4. Le maximum est strictement positif, car $f > 0$ à l'intérieur. Il n'est donc pas atteint sur le bord. Il

est atteint en un point intérieur, qui est alors un point critique. **Le maximum vaut $\frac{1}{27}$, atteint en $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$. Le minimum vaut 0 , atteint exactement sur la frontière.**

La figure ci-dessous montre les lignes de niveau de f dans T . Elles s'emboîtent autour du maximum, tandis que f s'annule sur les trois côtés.



Corrigé de l'exercice 11 : Extremums sur un disque fermé

1. Le disque fermé D est fermé et borné en dimension finie, donc compact. De plus, f est polynomiale, donc continue. **Elle admet donc un maximum et un minimum sur D .**
2. On a $\nabla f = (2x - 1, 4y)$. **Le seul point critique est $(\frac{1}{2}, 0)$, intérieur au disque, avec**

$$f\left(\frac{1}{2}, 0\right) = -\frac{1}{4}.$$

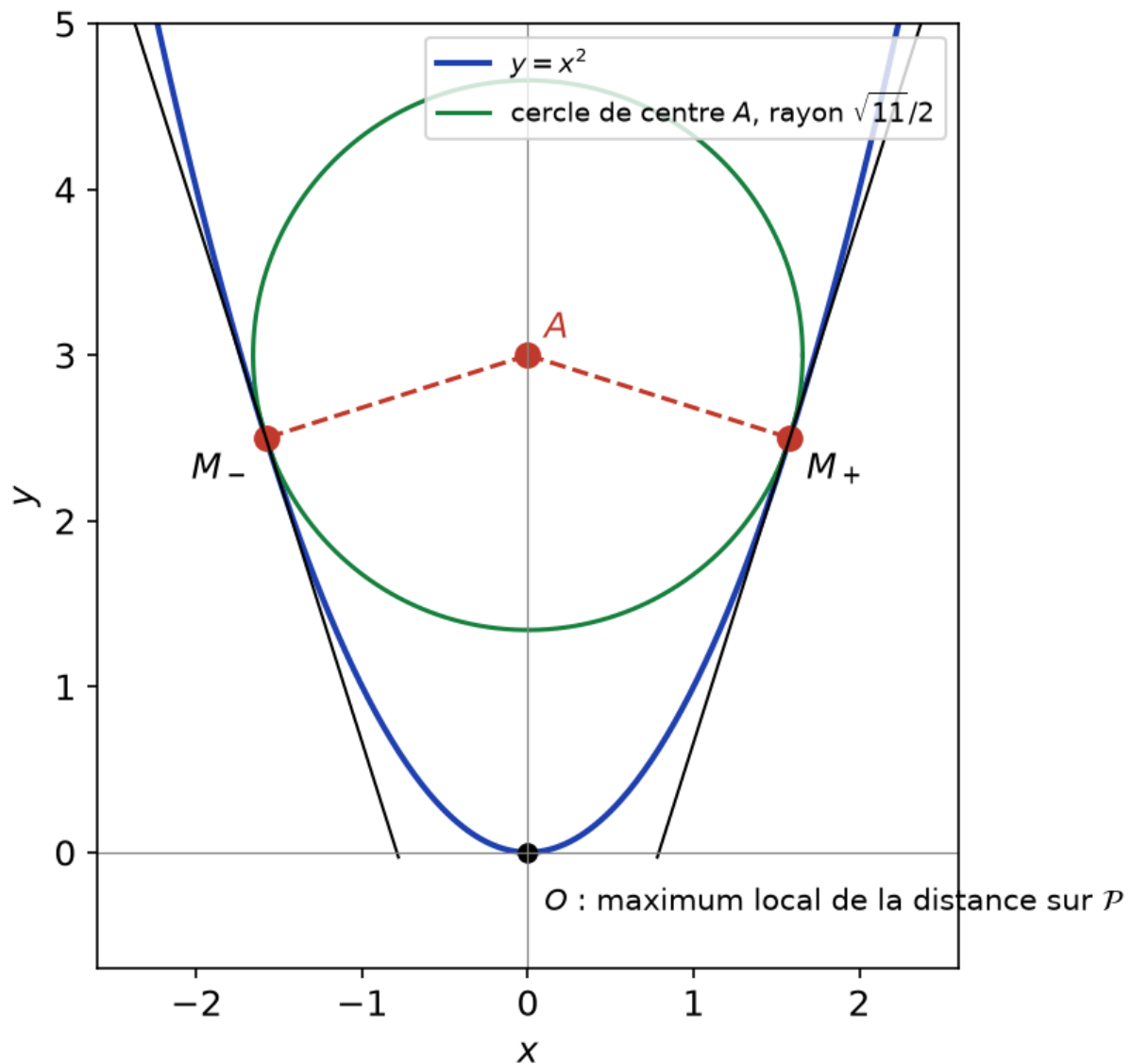
3. Sur le cercle, $y^2 = 1 - x^2$ avec $x \in [-1, 1]$. Ainsi $f = x^2 + 2(1 - x^2) - x = 2 - x - x^2$. Posons $u(x) = 2 - x - x^2$. Sa dérivée $-1 - 2x$ s'annule en $x = -\frac{1}{2}$, où $u = \frac{9}{4}$. Aux bornes, $u(1) = 0$ et $u(-1) = 2$. **Sur le cercle, f varie donc entre 0, atteint en $(1, 0)$, et $\frac{9}{4}$, atteint en $\left(-\frac{1}{2}, \pm\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.**
4. Un extremum global est atteint soit en un point critique intérieur, soit sur le cercle. On compare donc $-\frac{1}{4}$, 0 et $\frac{9}{4}$. **Le minimum vaut $-\frac{1}{4}$, atteint en $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$. Le maximum vaut $\frac{9}{4}$, atteint en $\left(-\frac{1}{2}, \pm\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ et $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.**

Corrigé de l'exercice 12 : Distance d'un point à une parabole

1. On a $\nabla g(x, y) = (-2x, 1)$. Sa seconde coordonnée vaut toujours 1. **Donc ∇g ne s'annule jamais, en particulier sur $\mathcal{P}$.**
2. Les fonctions F et g sont de classe C^1 . En un extremum de $F|_{\mathcal{P}}$, $\nabla F = (2x, 2(y-3))$ est colinéaire à ∇g . Le déterminant des deux vecteurs est donc nul : $2x \cdot 1 + 2x \cdot 2(y-3) = 2x(2y-5) = 0$. Avec $y = x^2$, on obtient $x = 0$ ou $y = \frac{5}{2}$. **Les candidats sont $O = (0, 0)$ et $M_{\pm} = \left(\pm\frac{\sqrt{10}}{2}, \frac{5}{2}\right)$.**
3. Les points de $\mathcal{P}$ s'écrivent (x, x^2) . Alors $F(x, x^2) = x^2 + (x^2 - 3)^2 = x^4 - 5x^2 + 9$. Sous forme canonique,
- $$F(x, x^2) = \left(x^2 - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{11}{4}.$$
- Le minimum vaut donc $\frac{11}{4}$, atteint pour $x^2 = \frac{5}{2}$. **La distance de A à $\mathcal{P}$ vaut $\frac{\sqrt{11}}{2}$, atteinte en M_+ et M_- .**
4. En $M_{\pm}$, on a $\overrightarrow{AM} = (x, x^2 - 3) = \left(x, -\frac{1}{2}\right)$. Un vecteur tangent à $\mathcal{P}$ est $(1, 2x)$, dérivée de $t \rightarrow (t, t^2)$. Leur produit scalaire vaut $x - \frac{1}{2} \cdot 2x = 0$. **Le vecteur $\overrightarrow{AM}$ est donc orthogonal à la tangente**, ce qui traduit $\nabla F(M) \perp T_M \mathcal{P}$.
5. Posons $u = x^2$. La fonction $u \rightarrow \left(u - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{11}{4}$ est strictement décroissante sur $\left[0, \frac{5}{2}\right]$.

Ainsi, pour $0 < |x| < \sqrt{5/2}$, on a $F(x, x^2) < F(0,0) = 9$. Le point O est un **maximum local strict** de $F|_{\mathcal{P}}$, bien qu'il vérifie la condition de Lagrange.

Comme le montre la figure ci-dessous, le cercle de centre A et de rayon $\frac{\sqrt{11}}{2}$ est tangent à la parabole en M_+ et M_- .



Corrigé de l'exercice 13 : Forme quadratique sur le cercle unité

1. Le cercle $\mathcal{C}$ est fermé et borné, donc compact. Comme q est continue, **elle admet un maximum et un minimum sur $\mathcal{C}$.**
2. Posons $g(x,y) = x^2 + y^2 - 1$. Son gradient $(2x, 2y)$ ne s'annule pas sur $\mathcal{C}$. En un extremum lié, il existe donc λ tel que $(6x + 2y, 2x + 6y) = \lambda(2x, 2y)$. En divisant par 2, on obtient $3x + y = \lambda x$ et $x + 3y = \lambda y$. **Autrement dit, $Sv = \lambda v$ avec $S = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ et $v = (x,y)$ unitaire.**
3. On a $q(v) = \langle Sv, v \rangle$. Si $Sv = \lambda v$ avec $|v| = 1$, alors $q(v) = \lambda |v|^2$. **Donc $q(v) = \lambda$.**
4. Le polynôme caractéristique de S est $(3 - X)^2 - 1 = (X - 2)(X - 4)$. Les sous-espaces propres sont dirigés par $(1,1)$ pour 4 et par $(1,-1)$ pour 2. D'après les questions précédentes, les extremums sont des valeurs propres. **Le maximum vaut 4, atteint en $\pm \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)$. Le minimum vaut 2, atteint en $\pm \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1)$.**

Corrigé de l'exercice 14 : Boîte de volume fixé et de surface minimale

1. On a $\nabla g = (yz, xz, xy)$. Sur U , toutes les coordonnées sont strictement positives. **Donc ∇g ne s'annule pas sur X .**
2. On a $\nabla S = 2(y + z, x + z, x + y)$. La colinéarité s'écrit $\nabla S = \mu \nabla g$, car $\nabla g \neq 0$. Ainsi $2(y+z) = \mu yz$. En multipliant par x et en utilisant $xyz = 1$, on obtient $2(xy + xz) = \mu$. De même, $2(xy + yz) = \mu$ et $2(xz + yz) = \mu$. Les deux premières égalités donnent $xz = yz$, donc $x = y$. Les deux dernières donnent $xy = xz$, donc $y = z$. Enfin, $x^3 = 1$. **Le seul point possible est $(1,1,1)$.**
3. Tous les termes de h sont positifs. Si $x < \frac{1}{3}$, alors $\frac{1}{x} > 3$, donc $h > 3$. Si $x = \frac{1}{3}$, alors $h = 3 + xy + \frac{1}{y} > 3$. Si $x \geq 9$ et $y \geq \frac{1}{3}$, alors $xy \geq 3$, donc $h > 3$. Par symétrie, on traite de même $y \leq \frac{1}{3}$ et $y \geq 9$. **Ainsi $h > 3$ hors de K et sur le bord de K .**
4. Le carré K est compact et h y est continue. Elle atteint donc un minimum m en un point $c \in K$. Or $(1,1) \in K$, donc $m \leq h(1,1) = 3$. Par la question 3, c n'est pas sur le bord de K : il est intérieur, donc c'est un point critique de h . Hors de K , on a $h > 3 \geq m$, donc m est le minimum global. Les points critiques vérifient $y = \frac{1}{x^2}$ et $x = \frac{1}{y^2}$, donc

$x = x^4$ et $x = y = 1$. Ainsi $m = 3$. Enfin, sur X , $S(x,y,z) = 2h(x,y)$ avec $z = \frac{1}{xy}$. **Le pavé optimal est le cube de côté 1, d'aire minimale 6.**

Point de méthode : la condition de Lagrange ne donne que des candidats. L'existence du minimum doit être prouvée à part, ici en se ramenant à un compact.

Corrigé de l'exercice 15 : Une équation de transport

1. L'application Φ est linéaire. Si $x = u$ et $y = 2u - v$, alors $u = x$ et $v = 2x - y$.
Donc Φ est bijective, de réciproque $(x,y) \rightarrow (x, 2x - y)$, et ces deux applications linéaires sont de classe C^1 .
2. On a $g(u,v) = f(u, 2u - v)$. Par la règle de la chaîne,
 $\partial_u g(u,v) = \partial_x f(\Phi(u,v)) + 2 \partial_y f(\Phi(u,v))$.
3. Si f est solution, alors $\partial_u g = 0$ sur $\mathbb{R}^2$. Pour v fixé, $u \rightarrow g(u,v)$ est donc constante sur l'intervalle $\mathbb{R}$. Ainsi $g(u,v) = \varphi(v)$ avec $\varphi(v) = g(0,v)$, de classe C^1 . Par conséquent, $f(x,y) = g(\Phi^{-1}(x,y)) = \varphi(2x - y)$. Réciproquement, si $f(x,y) = \varphi(2x - y)$, alors $\partial_x f + 2\partial_y f = 2\varphi' - 2\varphi' = 0$. **Les solutions sont les $f(x,y) = \varphi(2x - y)$, avec φ de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.**
4. La condition $f(0,y) = \varphi(-y) = y^2$ impose $\varphi(t) = t^2$. **La solution est $f(x,y) = (2x - y)^2$.** On vérifie : $\partial_x f = 4(2x - y)$ et $\partial_y f = -2(2x - y)$, donc $\partial_x f + 2\partial_y f = 0$.

Corrigé de l'exercice 16 : Laplacien des fonctions radiales

1. L'application $(x,y) \rightarrow \sqrt{x^2 + y^2}$ est de classe C^∞ sur U , à valeurs dans $]0, +\infty[$. Par composition, f **est de classe C^2 sur U** . On a $\partial_x r = \frac{x}{r}$. Donc $\partial_x f = \varphi'(r) \frac{x}{r}$. En dérivant à nouveau, avec $\partial_x \left(\frac{x}{r}\right) = \frac{1}{r} - \frac{x^2}{r^3} = \frac{y^2}{r^3}$, on obtient

$$\partial_x^2 f = \varphi''(r) \frac{x^2}{r^2} + \varphi'(r) \frac{y^2}{r^3}.$$

2. Par symétrie des rôles, $\partial_y^2 f = \varphi''(r) \frac{y^2}{r^2} + \varphi'(r) \frac{x^2}{r^3}$. En sommant et avec $x^2 + y^2 = r^2$,
on obtient $\Delta f = \varphi''(r) + \frac{\varphi'(r)}{r}$.
3. Comme r décrit tout $]0, +\infty[$, la condition $\Delta f = 0$ équivaut à $r\varphi''(r) + \varphi'(r) = 0$ pour tout $r > 0$. Autrement dit, $(r\varphi')' = 0$. Il existe donc a tel que $r\varphi'(r) = a$, puis $\varphi(r) = a \ln r + b$. **Les solutions sont** $\varphi(r) = a \ln r + b$, soit $f(x,y) = \frac{a}{2} \ln(x^2 + y^2) + b$.
4. De même, $\Delta f = 1$ équivaut à $(r\varphi')' = r$. Donc $r\varphi'(r) = \frac{r^2}{2} + a$, puis $\varphi'(r) = \frac{r}{2} + \frac{a}{r}$. **Les solutions sont** $\varphi(r) = \frac{r^2}{4} + a \ln r + b$, avec a, b réels. On vérifie : $\varphi'' + \frac{\varphi'}{r} = \frac{1}{2} - \frac{a}{r^2} + \frac{1}{2} + \frac{a}{r^2} = 1$.

Corrigé de l'exercice 17 : Équation des ondes

1. L'application $(x,y) \rightarrow (x+y, x-y)$ est linéaire bijective. Donc g est de classe C^2 si et seulement si f l'est. Par la règle de la chaîne, en évaluant les dérivées de g en $(x+y, x-y)$:
 $\partial_x f = \partial_u g + \partial_v g$ et $\partial_y f = \partial_u g - \partial_v g$.

2. On dérive encore :

$$\begin{aligned}\partial_x^2 f &= \partial_u^2 g + \partial_v \partial_u g + \partial_u \partial_v g + \partial_v^2 g, \\ \partial_y^2 f &= \partial_u^2 g - \partial_v \partial_u g - \partial_u \partial_v g + \partial_v^2 g.\end{aligned}$$

Comme g est de classe C^2 , le théorème de Schwarz donne $\partial_v \partial_u g = \partial_u \partial_v g$. Ainsi $\partial_x^2 f - \partial_y^2 f = 4 \partial_u \partial_v g$.

3. L'équation équivaut donc à $\partial_v(\partial_u g) = 0$ sur $\mathbb{R}^2$. Pour u fixé, $v \rightarrow \partial_u g(u,v)$ est constante. Donc $\partial_u g(u,v) = \alpha(u)$ avec $\alpha(u) = \partial_u g(u,0)$, de classe C^1 . Soit A une primitive de α ; elle est de classe C^2 . Alors $\partial_u(g - A(u)) = 0$, donc $g(u,v) = A(u) + B(v)$, avec $B(v) = g(0,v) - A(0)$ de classe C^2 . Réciproquement, $f(x,y) = A(x+y) + B(x-y)$ vérifie $\partial_x^2 f = A'' + B'' = \partial_y^2 f$. **Les solutions sont exactement les** $f(x,y) = A(x+y) + B(x-y)$.

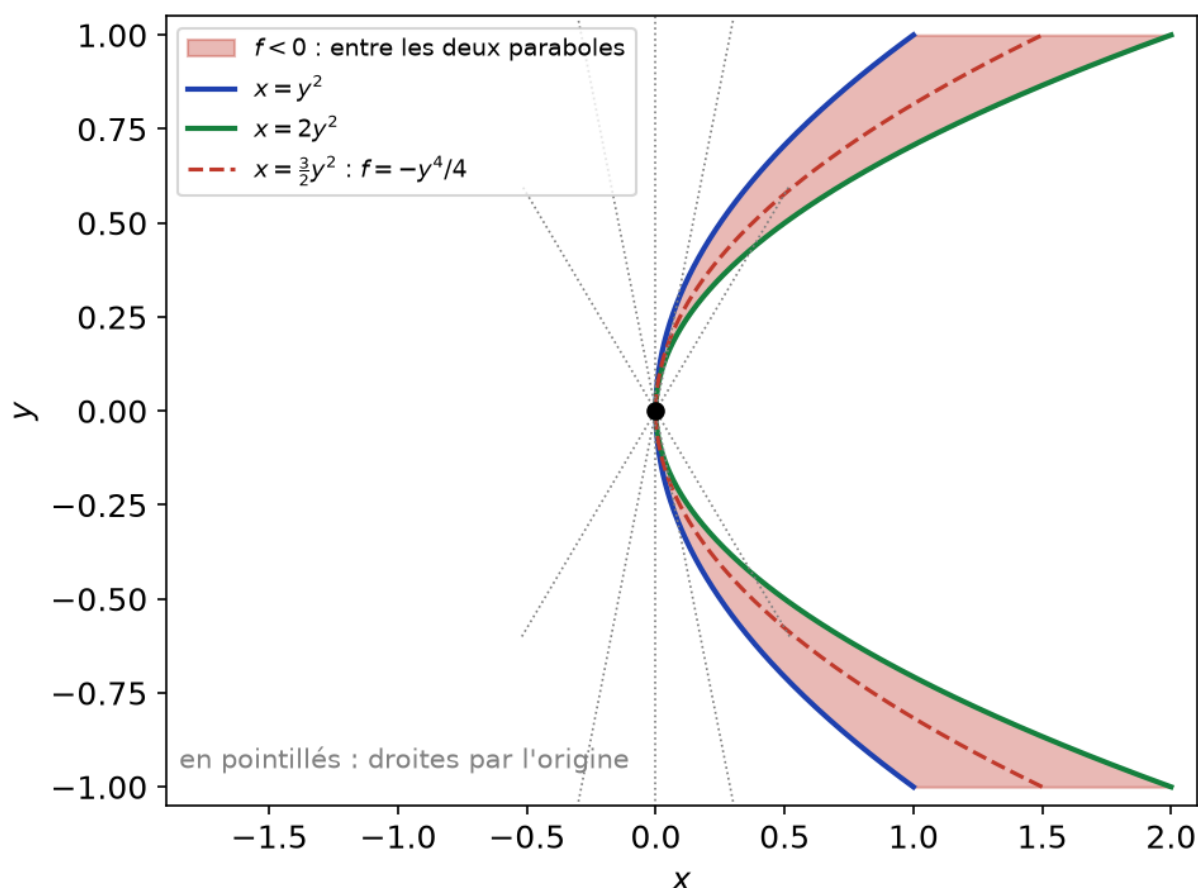
4. Les conditions donnent $A(x) + B(x) = \sin x$ et $A'(x) - B'(x) = 0$. Donc $A - B$ est une constante k . Il vient $A = \frac{\sin + k}{2}$ et $B = \frac{\sin - k}{2}$. Par conséquent,
 $f(x,y) = \frac{1}{2}(\sin(x+y) + \sin(x-y))$. **La solution est** $f(x,y) = \sin x \cos y$. On vérifie que $\partial_x^2 f = \partial_y^2 f = -\sin x \cos y$.

Point de méthode : la constante k disparaît à la fin. C'est normal : on peut ajouter une constante à A et la retrancher à B sans changer f .

Corrigé de l'exercice 18 : Le contre-exemple de Peano

- On a $\partial_x f = 2x - 3y^2$ et $\partial_y f = -6xy + 8y^3$, nuls en $(0,0)$. Ensuite, $\partial_x^2 f = 2$, $\partial_x \partial_y f = -6y$ et $\partial_y^2 f = -6x + 24y^2$. **La hessienne en l'origine vaut**
 $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$: **elle est positive, mais pas définie**. La condition nécessaire de minimum est satisfaite, mais la condition suffisante ne l'est pas.
- On a $\psi(t) = t^2 \cos^2 \theta - 3t^3 \cos \theta \sin^2 \theta + 2t^4 \sin^4 \theta$. Si $\cos \theta \neq 0$, alors $\psi(t) = t^2(\cos^2 \theta + O(t))$. La parenthèse tend vers $\cos^2 \theta > 0$, donc $\psi(t) > 0$ pour $t \neq 0$ assez petit. Si $\cos \theta = 0$, alors $\psi(t) = 2t^4 > 0$ pour $t \neq 0$. **Dans tous les cas, ψ admet un minimum local strict en 0.**
- Le produit $(x - y^2)(x - 2y^2)$ est strictement négatif si et seulement si $y^2 < x < 2y^2$.
Donc $f < 0$ exactement entre les deux paraboles $x = y^2$ et $x = 2y^2$. En particulier,
 $f\left(\frac{3}{2}y^2, y\right) = \frac{y^2}{2} \cdot \left(-\frac{y^2}{2}\right) = -\frac{y^4}{4}$.
- Les points $\left(\frac{3}{2}y^2, y\right)$, avec $y \neq 0$, sont aussi proches que voulu de l'origine. Or f y est strictement négative, alors que $f(0,0) = 0$. **L'origine n'est donc pas un minimum local de f .** Ainsi, un minimum sur chaque droite passant par un point ne garantit pas un minimum local. En effet, la zone négative est « pincée » entre deux paraboles tangentes à l'axe des ordonnées, et aucune droite n'y reste.

La figure ci-dessous illustre ce phénomène. Chaque droite issue de l'origine ne traverse la zone rouge qu'à distance positive de l'origine.



Corrigé de l'exercice 19 : Problème : droite des moindres carrés

1. Notons $r_i = y_i - a x_i - b$ les résidus. Alors

$$\partial_a F = -2 \sum x_i r_i = 2(a S_{xx} + b S_x - S_{xy}) . \text{ De même,}$$

$\partial_b F = -2 \sum r_i = 2(a S_x + n b - S_y)$. **Le point (a, b) est critique si et seulement si $a S_{xx} + b S_x = S_{xy}$ et $a S_x + n b = S_y$.**

2. On dérive encore : $H = 2 \begin{pmatrix} S_{xx} & S_x \\ S_x & n \end{pmatrix}$, **matrice constante**. Son déterminant vaut

$$4(n S_{xx} - S_x^2) . \text{ Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz appliquée à } (x_i) \text{ et } (1, \dots, 1),$$

$$S_x^2 \leq n S_{xx} . \text{ L'égalité aurait lieu seulement si les } x_i \text{ étaient tous égaux, ce qui est exclu.}$$

Donc $\det H > 0$. Comme de plus $\text{tr } H = 2(S_{xx} + n) > 0$, les deux valeurs propres sont strictement positives. **Ainsi H est définie positive.**

3. Le système de la question 1 a pour matrice $\frac{1}{2}H$, inversible. **Il admet donc une unique solution $p = (a_0, b_0)$, unique point critique de F .**

4. Soit $h = (h_1, h_2)$ et $\ell_i = h_1 x_i + h_2$. Les résidus en $p + h$ valent $r_i - \ell_i$, où r_i sont ceux en p . En développant les carrés :

$$F(p+h) = F(p) - 2 \sum r_i \ell_i + \sum \ell_i^2.$$

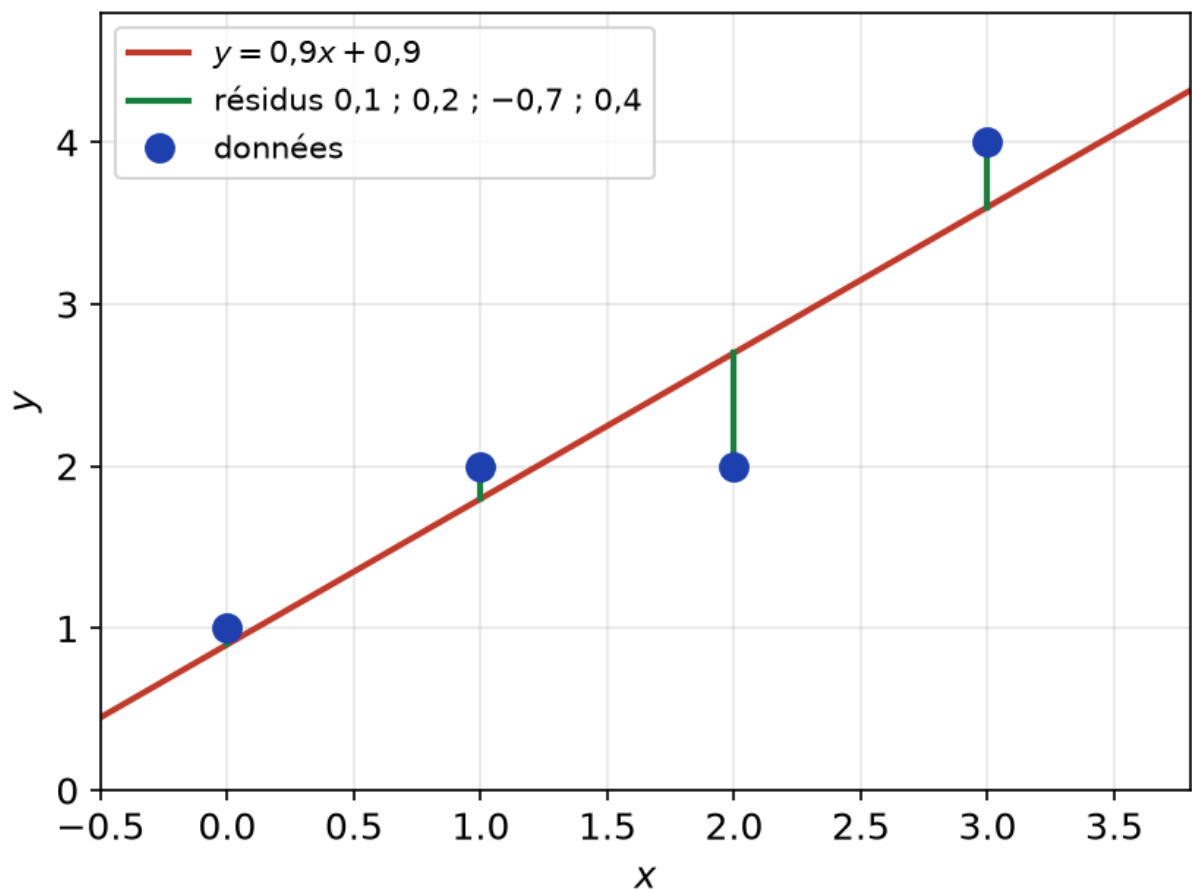
Le terme du milieu vaut $\langle \nabla F(p), h \rangle = 0$. Par ailleurs,

$$\sum \ell_i^2 = h_1^2 S_{xx} + 2h_1 h_2 S_x + n h_2^2 = \frac{1}{2} h^\top H h. \text{ Donc}$$

$F(p+h) = F(p) + \frac{1}{2} h^\top H h$. Comme H est définie positive, ce terme est strictement positif pour $h \neq 0$. **Ainsi F atteint en p son minimum global strict.**

5. Ici, $n = 4$, $S_x = 6$, $S_{xx} = 14$, $S_y = 9$ et $S_{xy} = 0 + 2 + 4 + 12 = 18$. Le système s'écrit $14a + 6b = 18$ et $6a + 4b = 9$. La seconde équation donne $b = \frac{9-6a}{4}$. En reportant, $56a + 54 - 36a = 72$, donc $a = 0,9$, puis $b = 0,9$. Les résidus valent $0,1$, $0,2$, $-0,7$ et $0,4$. **La droite des moindres carrés est $y = 0,9x + 0,9$, et le minimum vaut $F = 0,01 + 0,04 + 0,49 + 0,16 = 0,7$.**

La figure ci-dessous montre la droite obtenue et les résidus en vert. Remarquons que leur somme est nulle, conformément à l'équation $\partial_b F = 0$.



Corrigé de l'exercice 20 : Problème : inégalité arithmético-géométrique

1. L'ensemble K est l'intersection de fermés : les demi-espaces $\{x_i \geq 0\}$ et l'hyperplan $\{x_1 + \dots + x_n = 1\}$. Il est borné, car ses coordonnées sont dans $[0,1]$. En dimension finie, K est donc compact, et la fonction polynomiale f y atteint un maximum M . De plus, $(\frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}) \in K$, donc $M \geq n^{-n} > 0$.
2. Si une coordonnée de a était nulle, on aurait $f(a) = 0 < M$. C'est absurde. Donc toutes les coordonnées de a sont strictement positives, c'est-à-dire $a \in X$.
3. Comme $X \subset K$, on a $f \leq M = f(a)$ sur X . Ainsi $f|_X$ atteint en a un maximum, donc un extremum local. Par ailleurs, U est ouvert, f et g sont de classe C^1 , et $\nabla g = (1, \dots, 1)$ ne s'annule pas. Le théorème des extremums liés s'applique. Il existe donc λ tel que $\nabla f(a) = \lambda (1, \dots, 1)$.

4. On a $\partial_i f(a) = \prod_{j \neq i} a_j = \frac{M}{a_i}$. La condition précédente donne $\frac{M}{a_i} = \lambda$ pour tout i . Donc $\lambda > 0$ et tous les a_i sont égaux à $\frac{M}{\lambda}$. Comme leur somme vaut 1, $a = \left(\frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}\right)$ et $M = \frac{1}{n^n}$.
5. Soit $s = y_1 + \dots + y_n > 0$ et $x_i = \frac{y_i}{s}$. Alors $x \in K$, donc $f(x) \leq \frac{1}{n^n}$, soit $\frac{y_1 \dots y_n}{s^n} \leq \frac{1}{n^n}$. Ainsi $y_1 \dots y_n \leq \left(\frac{s}{n}\right)^n$. La fonction $t \rightarrow t^{1/n}$ est croissante sur $[0, +\infty[$. Donc $(y_1 \dots y_n)^{1/n} \leq \frac{y_1 + \dots + y_n}{n}$.

Corrigé de l'exercice 21 : Problème : quotient de Rayleigh

1. Comme S est symétrique, $\langle Sh, x \rangle = \langle h, Sx \rangle = \langle Sx, h \rangle$. Donc

$$q(x+h) = q(x) + 2\langle Sx, h \rangle + q(h).$$

Or $|q(h)| \leq |S| |h|^2 = o(|h|)$, pour une norme subordonnée. Le terme $h \rightarrow 2\langle Sx, h \rangle$ est linéaire. **Donc q est différentiable, avec $\nabla q(x) = 2Sx$.**

2. La sphère Σ est fermée et bornée en dimension finie, donc compacte. **Comme q est continue, elle atteint sur Σ un maximum et un minimum.**
3. Posons $g(x) = |x|^2 - 1$, de classe C^1 , avec $\nabla g(x) = 2x \neq 0$ sur Σ . En un extremum lié a , il existe λ tel que $2Sa = 2\lambda a$. **Ainsi a est un vecteur propre de S , et $q(a) = \langle \lambda a, a \rangle = \lambda$.**
4. Notons $\lambda_{\min}$ et $\lambda_{\max}$ les valeurs propres extrêmes de S , réelles par le théorème spectral. Par la question 3, $\max_{\Sigma} q$ est une valeur propre, donc $\max_{\Sigma} q \leq \lambda_{\max}$. Réciproquement, un vecteur propre unitaire e associé à $\lambda_{\max}$ donne $q(e) = \lambda_{\max}$. **Donc $\max_{\Sigma} q = \lambda_{\max}$ et, de même, $\min_{\Sigma} q = \lambda_{\min}$.**
5. Posons $\mu = 2 - X$. Le polynôme caractéristique de S vaut, au signe près, $\mu(\mu^2 - 1) - \mu = \mu(\mu^2 - 2)$. **Les valeurs propres sont $2 - \sqrt{2}$, 2 et $2 + \sqrt{2}$.** On vérifie que $S(1, \sqrt{2}, 1) = (2 + \sqrt{2})(1, \sqrt{2}, 1)$ et $S(1, -\sqrt{2}, 1) = (2 - \sqrt{2})(1, -\sqrt{2}, 1)$. Par ailleurs, $q(x, y, z) = \langle S(x, y, z), (x, y, z) \rangle$ avec cette matrice S . Les valeurs propres étant simples, les vecteurs propres unitaires sont opposés deux à deux. **Le maximum de q sur Σ vaut $2 + \sqrt{2}$, atteint en $\pm \frac{1}{2}(1, \sqrt{2}, 1)$. Le minimum vaut $2 - \sqrt{2}$, atteint en**

$$\pm \frac{1}{2}(1, -\sqrt{2}, 1).$$

Point de méthode : par homogénéité, on en déduit $(2-\sqrt{2})|v|^2 \leq q(v) \leq (2+\sqrt{2})|v|^2$ pour tout $v \in \mathbb{R}^3$. Ce type d'encadrement sert à montrer qu'une hessienne est définie positive.

[Revenir aux énoncés des exercices](#)

Pour aller plus loin en maths spé

- Le cours : [optimisation, cours de maths spé](#)
- Les énoncés : [exercices de maths spé sur optimisation](#)
- À maîtriser avant : [Calcul différentiel dans les espaces normés](#), [Endomorphismes autoadjoints et théorème spectral](#)
- Chapitre précédent : [Calcul différentiel dans les espaces normés](#)
- Tester vos connaissances : [QCM de maths spé par chapitre](#)
- Le sommaire : [tous les chapitres de maths spé](#) et les [chapitres de maths sup](#)