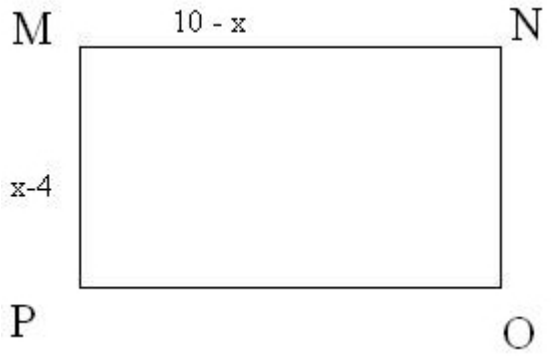
Notion de fonction

I. Notion de fonction : première approche.

1.Activité d'introduction :

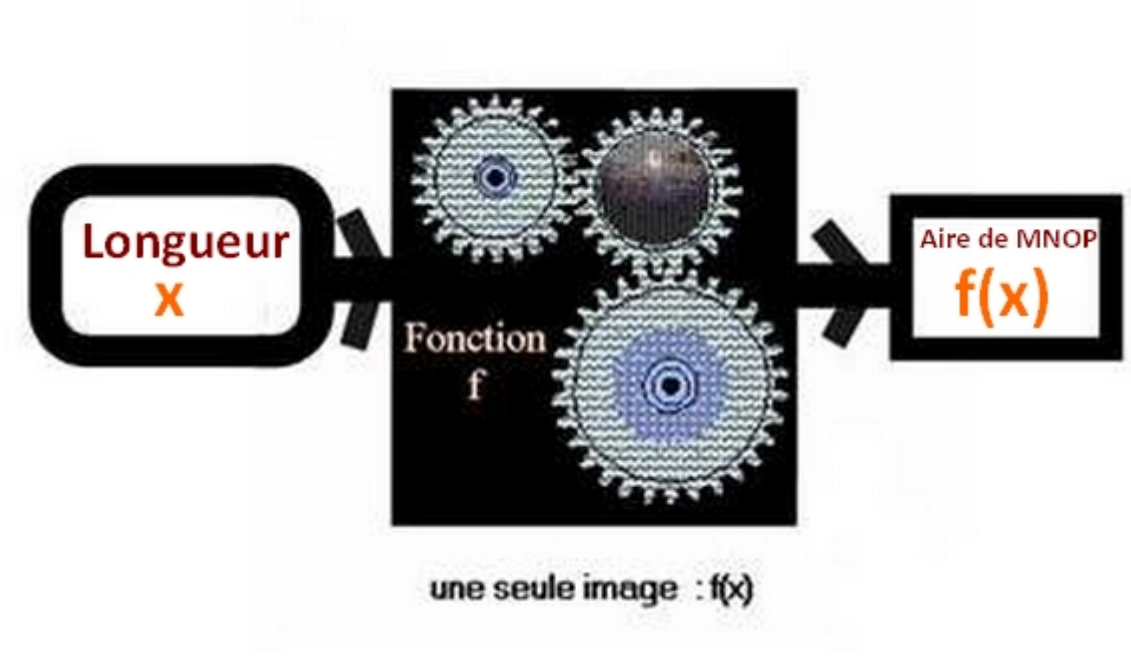
On considère le rectangle MNOP, la longueur x, exprimée en cm, désigne un nombre compris entre 4 et 10.



1. Calculer l'aire du rectangle pour x=4.
L'aire du rectangle est $A_{MNOP} = (4-4)(10-4) = 0 \times \ 6 = 0\,cm^2$.

On met en place un procédé mathématiques qui à tout nombre x associe l'aire du rectangle MNOP.

On considère l'aire du rectangle MNOP que l'on note f(x) .



2. Exprimer f(x) à l'aide de la variable x.

$f(x) = Aire_{MNOP} = Longueur \times \ largeur = (10 - x)(x - 4)$

$f(x) = 10x - 40 - x^2 + 4x$

$f(x) = -x^2 + 14x - 40$

3. Calculer f(5) qui est l'image de 5 par la fonction f.

$f(5) = -5^2 + 14 \times \ 5 - 40 = -25 + 70 - 40 = 5\,cm^2$

4. Calculer l'image de 4 par la fonction f, c'est-à-dire f(4).

$f(4) = -4^2 + 14 \times \ 4 - 40 = -16 + 56 - 40 = 0\,cm^2$

5. Interpréter ce résultat.

Lorsque la longueur x vaut 4 cm, l'aire du rectangle MNOP vaut $0\,cm^2$.

REMARQUE :

le rectangle MNOP est réduit au segment [MN].

6. compléter le tableau de valeurs suivant :

x	4	5	6	7,5	8,5	9
f(x)	0	**5**	8	**8,75**	6,75	**5**

7. Dans le tableau précédent, on lit f(6)=8.

6 étant un antécédent de 8 par la fonction f.

a. Donner un antécédent de 6,75.

Un antécédent de 6,75 par la fonction f est x = 8,5 cm.

b. Déterminer, d'après le tableau ci-dessus, deux antécédents du nombre 5.

Deux antécédents de 5 par la fonction f sont x = 5 cm et x = 9 cm.

c. Pour quelles valeurs de x l'aire du rectangle MNOP vaut-elle 5 ?

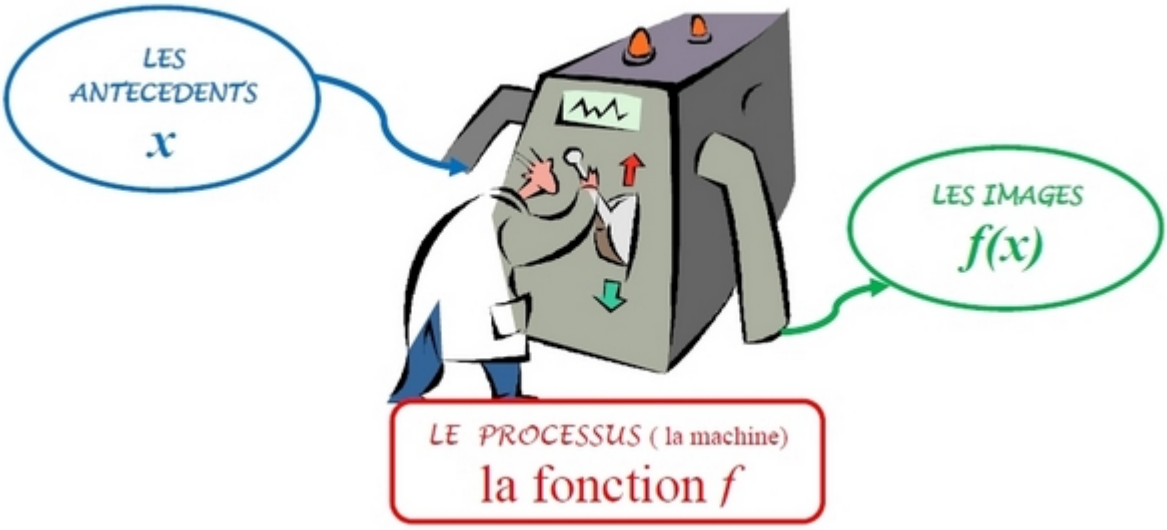
D'après la question 3.b., l'aire du rectangle MNOP vaut 5 cm² lorsque x vaut 5 cm ou x vaut 9 cm.

II .Vocabulaire et notations sur la notion de fonction :

1. Définition d'une fonction :

Définition :

- Une fonction f est un processus mathématiques qui à tout nombre x **associe un unique nombre**, noté f(x).
- Le nombre f(x) est appelé **l'image du nombre x** par la fonction f.
- Le nombre x est appelé **l'antécédent du nombre f(x)** par la fonction f.



2. Notations d'une fonction numérique :

Définition :

Il existe deux façons de noter une fonction :

- Soit f la fonction définie par f(x)= 3x+7 .

- ou $f : x \mapsto 3x + 7$ se lit *la fonction f qui à tout nombre x associe le nombre 3x+7*.

EXEMPLE :

Considérons le programme de calcul suivant :

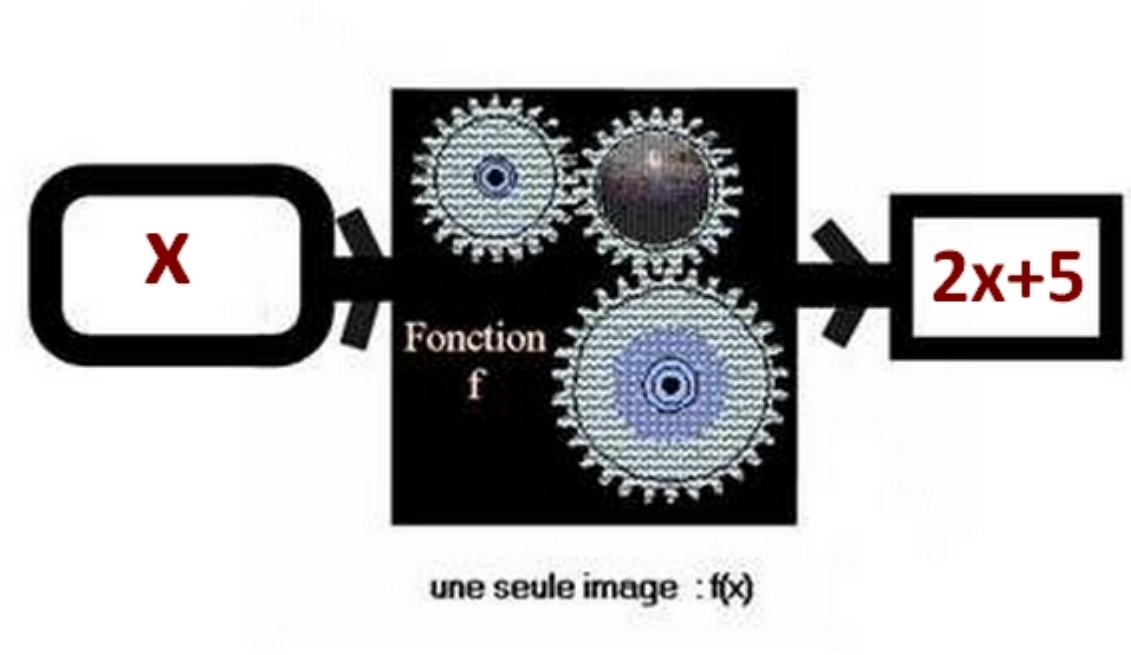
- choisir un nombre x

- Multiplier le résultat par 2

- Ajouter 5

Soit la fonction f qui au nombre x choisi au départ associe le nombre f(x) obtenu à la fin du programme de calcul.

Nous obtenons la fonction f définie par f(x)= 2x+5 .



Calculons l'image de - 3 par cette fonction f :

- 3 est donc un antécédent donc une valeur de x.

Remplaçons x par - 3 dans l'expression de f pour calculer cette image.

$f(-3) = 2 \times \ (-3) + 5 = -6 + 5 = -1$

donc l'image de - 3 par cette fonction f est - 1 et réciproquement, - 3 est un antécédent de - 1 par cette fonction f.

Calculons un antécédent de 7 par cette fonction f :

7 est donc une image, on cherche un antécédent de 7, c'est à dire que l'on cherche un nombre x tel que f(x)= 7.

Nous sommes amenés à résoudre l'équation suivante :

$$\begin{aligned} f(x) &= 7 \\ 2x + 5 &= 7 \\ 2x + 5 - 5 &= 7 - 5 \\ 2x &= 2 \\ \frac{2x}{2} &= \frac{2}{2} \\ x &= 1 \end{aligned}$$

donc un antécédent de 7 par la fonction f est 1.

Nous pouvons le vérifier en calculant l'image de 1, on doit retrouver 7.

$f(x) = 2x + 5$

$f(1) = 2 \times \ 1 + 5 = 2 + 5 = 7$

III. Courbe représentative d'une fonction :

1. Définition de la courbe d'une fonction :

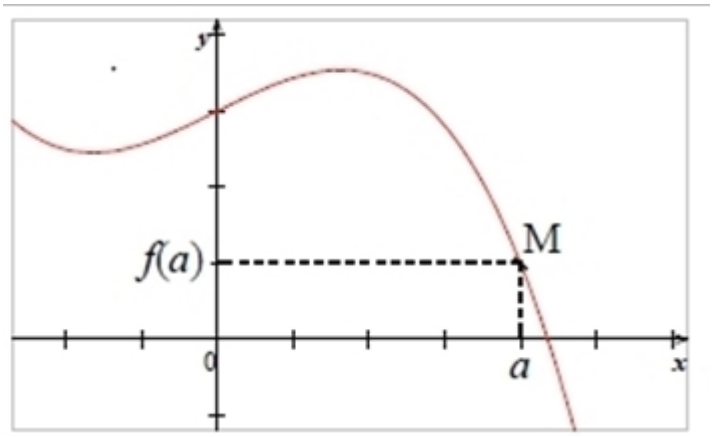
Définition :

Soit f une fonction telle que $f : x \ \mapsto \ f(x)$.

Soit a un nombre relatif et f(a) son image par la fonction f.

Dans un repère orthonormé, on considère les points M de coordonnées M (a;f(a)) .

L'ensemble C_f de ces points constitue la représentation graphique (ou courbe représentative) de la fonction f dans ce repère.



EXEMPLE :

Reprenons l'activité du début du cours et la fonction f qui a la longueur x associe l'aire du rectangle MNOP.

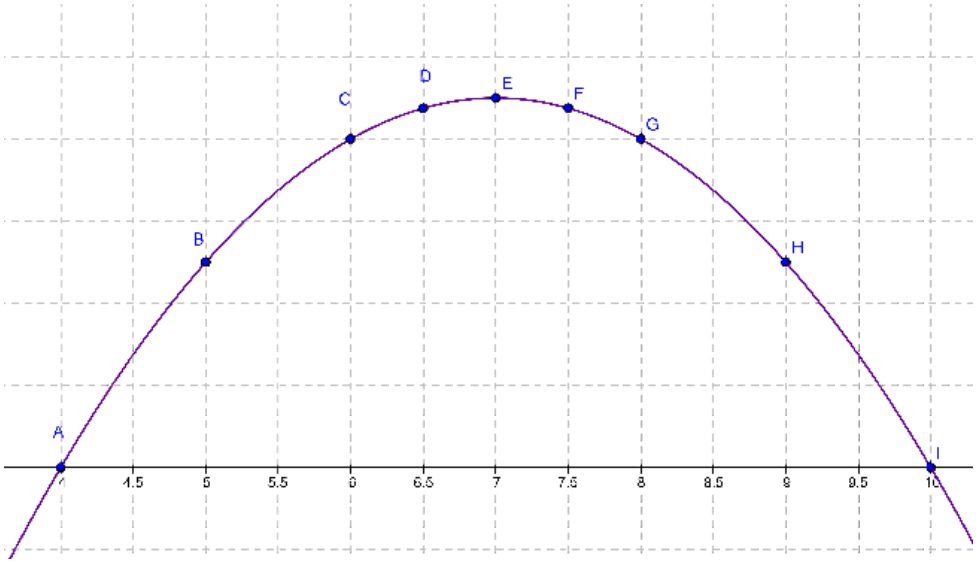
Nous avions obtenu l'expression de la fonction f qui est $f(x) = -x^2 + 14x - 40$.

2. Tableau de valeurs :

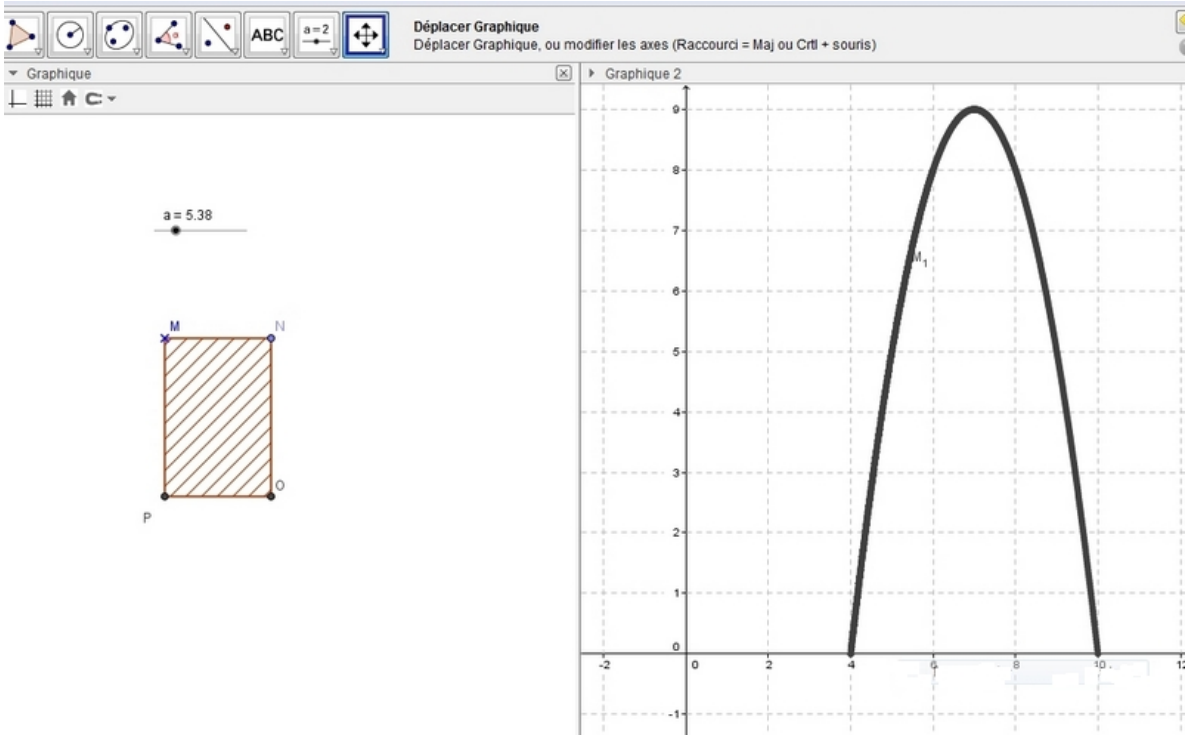
A l'aide d'un tableur, complétons le tableau de valeurs suivant afin de tracer la courbe représentative de cette fonction f.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	x	4	5	6	6,5	7	7,5	8	9	10
2	f(x)	0	5	8	8,75	9	8,75	8	5	0
3	Points	A	B	C	D	E	F	G	H	I
4										
5										

Voici ce que donne la courbe de la fonction f :



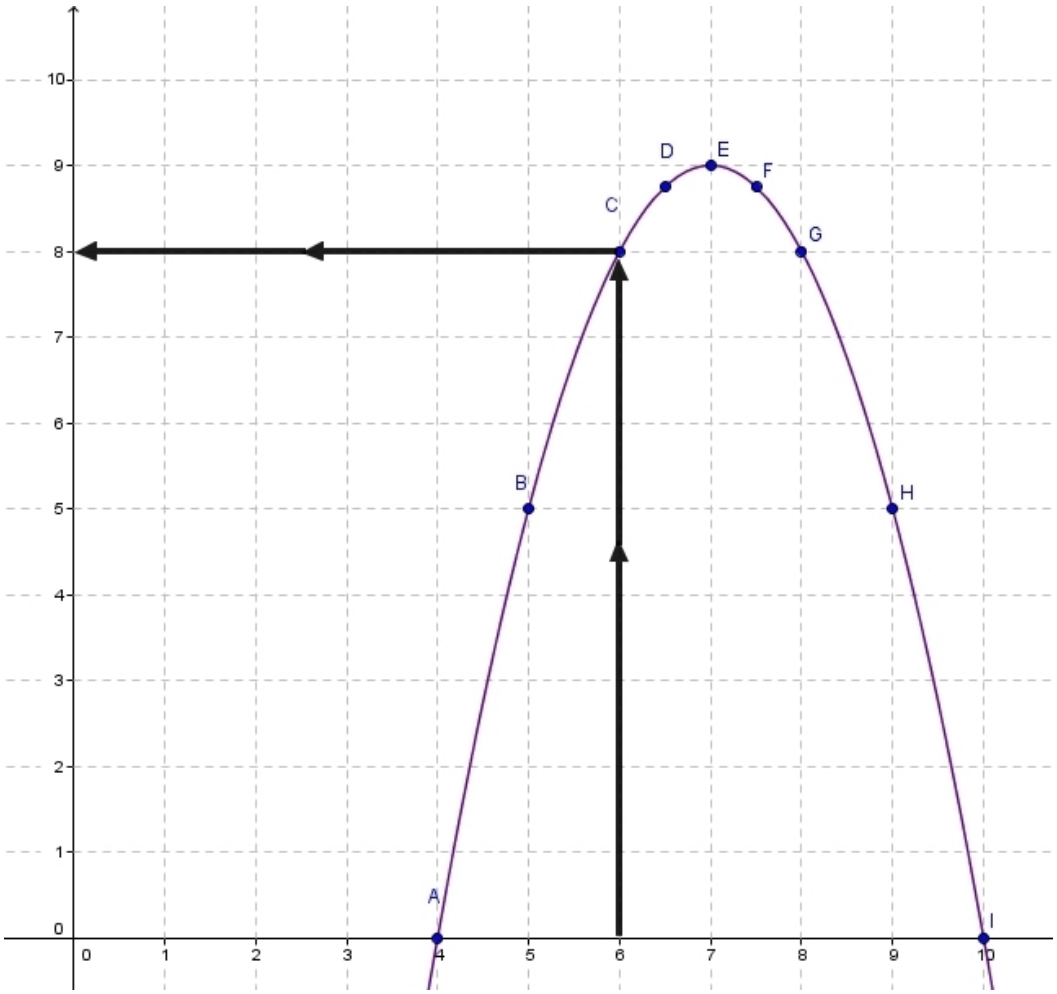
A l'aide du logiciel de géométrie dynamique GEOGEBRA, nous pouvons créer le rectangle MNOP et faire varier la valeur de x entre 4 et 10 et faire afficher dans une seconde fenêtre la courbe de la fonction f, voilà ce que cela donne :



3. Déterminer graphiquement une image ou un antécédent

a. Déterminer une image à l'aide de la courbe de la fonction f

Déterminer l'image de 6 par la fonction f.

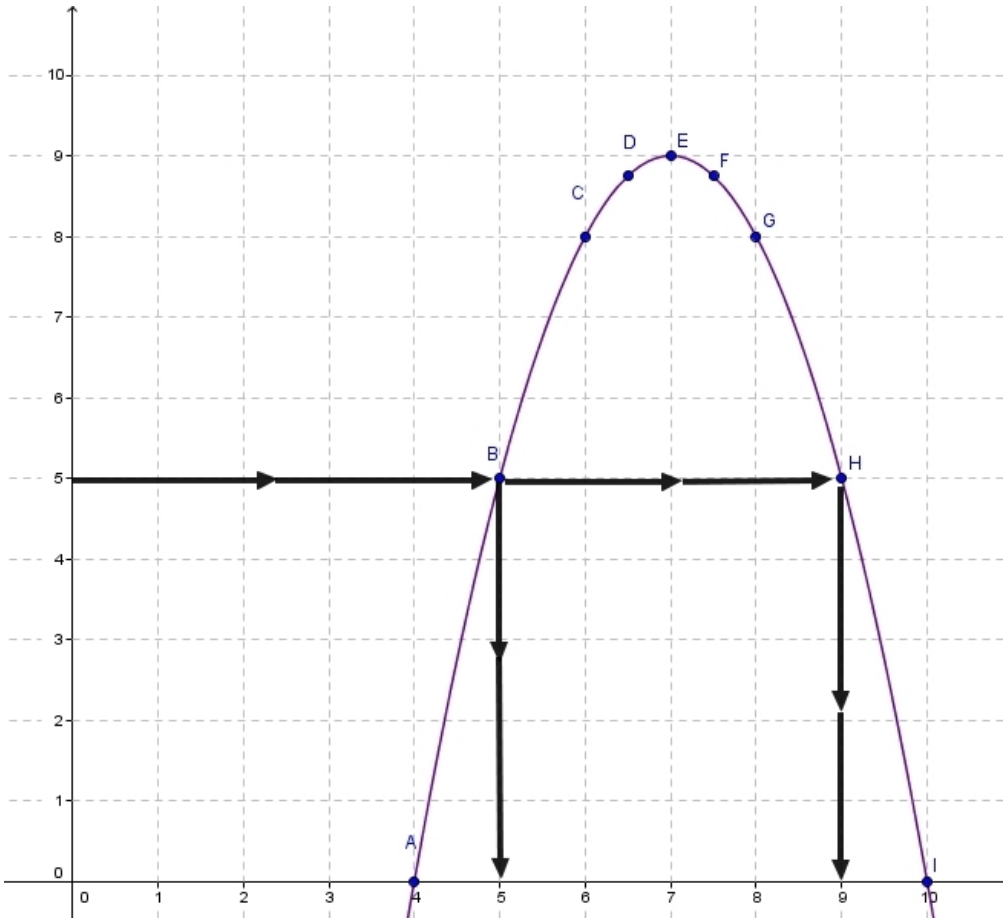


L'image de 6 par la fonction f est 8 ce qui équivaut à écrire f(6)=8.

En pratique, cela signifie que lorsque x vaut 6 cm alors l'aire du rectangle MNOP est de 8 cm².

b. Déterminer un antécédent à l'aide de la courbe de la fonction f

Déterminer le(s) antécédent(s) de 5 par la fonction f.



Il existent deux antécédents de 5 par la fonction f qui sont 5 et 9 ce qui équivaut à écrire que f(5)=5 et que f(9)=5.

En pratique cela signifie que l'aire du rectangle vaut 5 cm² lorsque x vaut 5 cm ou lorsque x vaut 9 cm.