

Nombres réels

Exercice 1 : Inégalités classiques

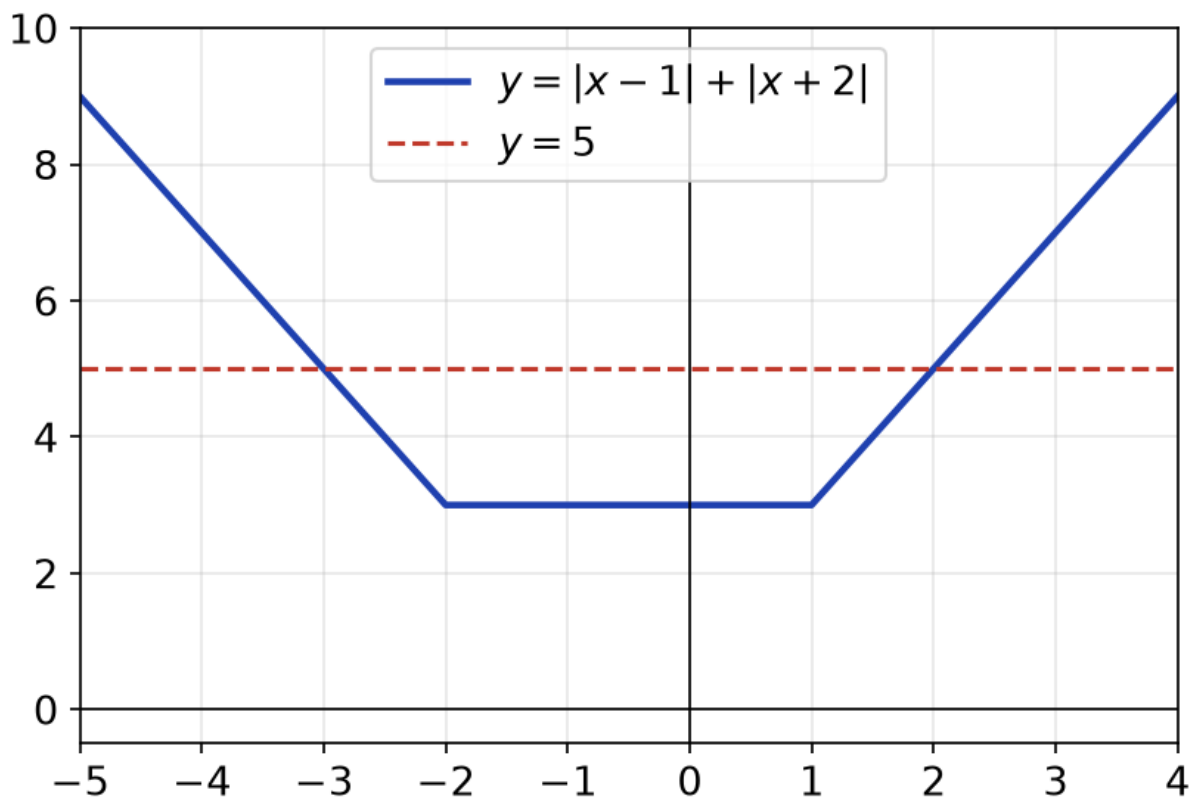
Dans cet exercice, a , b , c désignent des réels quelconques et x , y des réels strictement positifs.

1. Montrer que $ab \leq \frac{a^2 + b^2}{2}$.
2. En déduire que $ab + bc + ca \leq a^2 + b^2 + c^2$.
3. Montrer que $\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$, puis que $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y}$.
4. Montrer que, pour tout réel t , $t(1-t) \leq \frac{1}{4}$, et préciser le cas d'égalité.

Exercice 2 : Équations et inéquations avec valeurs absolues

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes. On pourra s'aider de la figure ci-dessous pour la deuxième question.

1. $|2x - 3| < 5$.
2. $|x - 1| + |x + 2| \leq 5$.
3. $|x + 1| \geq |2x - 1|$.
4. $|x - 3| = 2x$.



Exercice 3 : Autour de l'inégalité triangulaire

Soient x et y deux réels.

1. Montrer que $||x| - |y|| \leq |x - y|$.
2. Montrer que $|x + y| = |x| + |y|$ si et seulement si $xy \geq 0$.
3. Montrer que $|x| + |y| \leq |x + y| + |x - y|$.
4. Montrer que, pour tout $x \in [-2, 3]$, on a $|x^3 - 2x + 1| \leq 34$.

Exercice 4 : Intervalles de $\mathbb{R}$

1. Écrire comme un intervalle ou une réunion d'intervalles les ensembles $A = \left\{x \in \mathbb{R}, |x - 2| < 3\right\}$,
 $B = \left\{x \in \mathbb{R}, x^2 \leq 4x - 3\right\}$ et $C = \left\{x \in \mathbb{R}, |x| \geq 2\right\}$. Déterminer ensuite $A \cap B$ et $A \cap C$.
2. Montrer que $\bigcap_{n \geq 1} \left]-\frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}\right[= [0, 1]$.
3. Montrer que $\bigcup_{n \geq 2} \left[\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}\right] =]0, 1[$.
4. En utilisant la définition d'un intervalle, montrer que l'intersection de deux intervalles est un intervalle. La réunion de deux intervalles est-elle toujours un intervalle ?

Exercice 5 : Premiers calculs de parties entières

1. Calculer $\lfloor 3,7 \rfloor$, $\lfloor -3,7 \rfloor$, $\lfloor -5 \rfloor$, $\lfloor \sqrt{10} \rfloor$ et $\lfloor -\pi \rfloor$.
2. Montrer que, pour tout réel x et tout entier relatif k , $\lfloor x + k \rfloor = \lfloor x \rfloor + k$.
3. Montrer que $\lfloor x \rfloor + \lfloor -x \rfloor$ vaut 0 si $x \in \mathbb{Z}$ et -1 sinon.
4. Résoudre l'équation $\lfloor 2x - 1 \rfloor = 3$.

Exercice 6 : Bornes de parties simples

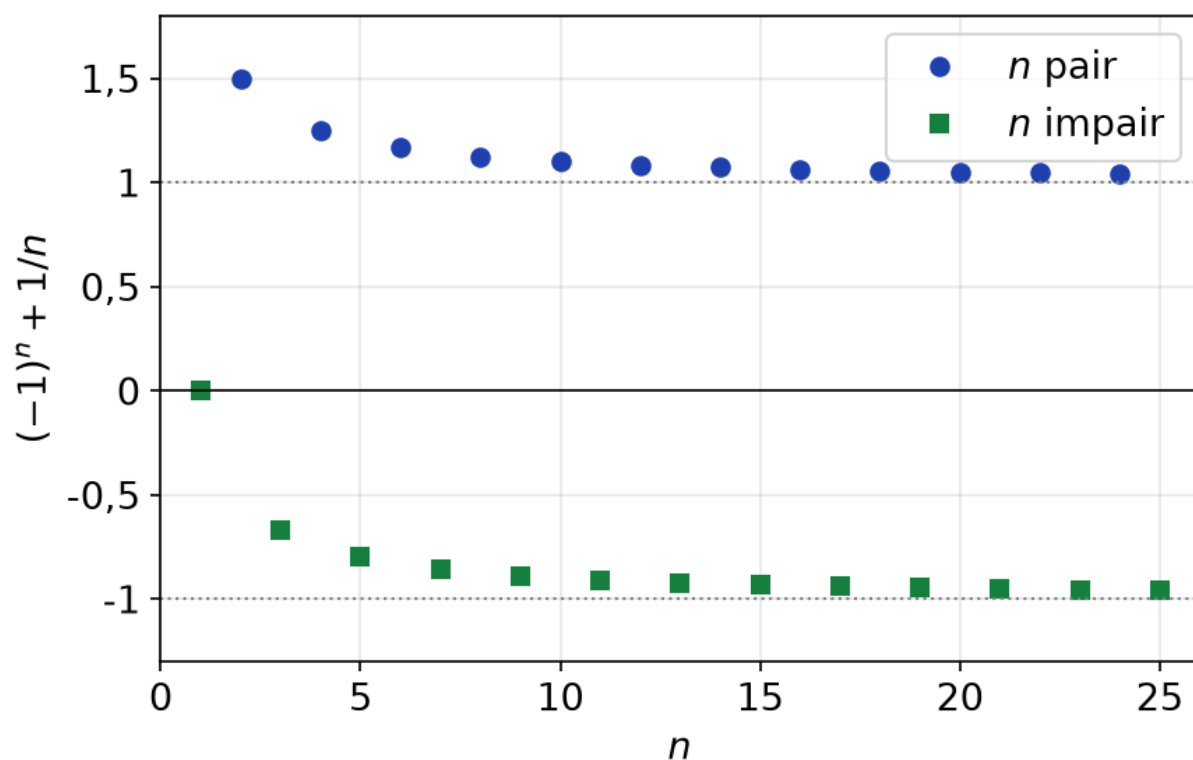
Pour chacune des parties suivantes, dire si elle est majorée, minorée, puis déterminer, lorsqu'ils existent, sa borne supérieure, sa borne inférieure, son maximum et son minimum.

1. $A = \left\{1 - \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*\right\}$.

2. $B = \left\{ (-1)^n + \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^* \right\}$. La figure ci-dessous représente les premiers termes.

3. $C = [0, 1[\cup \{2\}$.

4. $D = \left\{ x \in \mathbb{R}, x^2 < 3 \right\}$.



Exercice 7 : Borne supérieure par la caractérisation epsilon

On considère $A = \left\{ \frac{2n+1}{n+2}, n \in \mathbb{N} \right\}$.

1. Écrire $\frac{2n+1}{n+2}$ sous la forme $\alpha - \frac{\beta}{n+2}$ avec α, β réels.

2. Montrer que A admet un plus petit élément et le déterminer.

3. Montrer que $\sup A = 2$ à l'aide de la caractérisation par ε . La partie A a-t-elle un maximum ?
4. Pour $\varepsilon = 0,2$, puis pour $\varepsilon = 10^{-2}$, déterminer le plus petit entier n tel que $\frac{2n+1}{n+2} > 2 - \varepsilon$.

Exercice 8 : Borne supérieure d'une somme et d'une réunion

Soient A et B deux parties non vides et majorées de $\mathbb{R}$. On note $A + B = \left\{ \begin{matrix} a \\ ,b, \\ ,a \in A, \\ ,b \in B \end{matrix} \right\}$.

1. Montrer que $A + B$ est non vide et majorée.
2. Montrer que $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$.
3. Montrer que $\sup(A \cup B) = \max(\sup A, \sup B)$.
4. Application : déterminer $\sup(A + B)$ pour $A = [0, 1[$ et $B = \left\{ \begin{matrix} -\frac{1}{n}, \\ ,n \in \mathbb{N}^* \end{matrix} \right\}$. Cette borne est-elle atteinte ?

Exercice 9 : Borne supérieure et opérations

Soit A une partie non vide et bornée de $\mathbb{R}$.

1. Soit $\lambda > 0$. Montrer que $\sup(\lambda A) = \lambda \sup A$, où $\lambda A = \left\{ \begin{matrix} \lambda a, \\ ,a \in A \end{matrix} \right\}$.
2. Soit $\lambda < 0$. Montrer que $\sup(\lambda A) = \lambda \inf A$.

3. On pose $\delta = \sup A - \inf A$. Montrer que $\delta = \sup \left\{ |x - y|, \begin{array}{l} x \in A, \\ y \in A \end{array} \right\}$.

Exercice 10 : Partie entière de $2x$

Soit x un réel. On pose $n = \lfloor x \rfloor$ et $t = x - n$.

- Justifier que $t \in [0, 1[$.
- Montrer que $\lfloor 2x \rfloor - 2\lfloor x \rfloor \in \{0, 1\}$, et que cette différence est nulle si et seulement si $t < \frac{1}{2}$.
- Montrer que $\lfloor x \rfloor + \left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor = \lfloor 2x \rfloor$.

Exercice 11 : Encadrements par la partie entière

- Soient $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\left\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor$.
- Montrer que $0 \leq x - \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} < \frac{1}{n}$. En déduire la limite de $\frac{\lfloor nx \rfloor}{n}$ quand n tend vers $+\infty$.
- Pour $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $\lfloor \sqrt{n^2 + n} \rfloor$ et $\lfloor \sqrt{n^2 + 2n + 2} \rfloor$.
- Soient N et d deux entiers naturels non nuls. Montrer que le nombre de multiples de d dans $\{1, 2, \dots, N\}$ est $\left\lfloor \frac{N}{d} \right\rfloor$. Combien y a-t-il de multiples de 7 entre 1 et 1000 ?

Exercice 12 : Propriété d'Archimède

1. Montrer, à l'aide de l'axiome de la borne supérieure, que $\mathbb{N}$ n'est pas majoré dans $\mathbb{R}$.
2. Montrer que $\inf \left\{ \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^* \right\} = 0$.
3. Soit a un réel tel que $0 \leq a \leq \frac{1}{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $a = 0$.
4. Déterminer le plus petit entier naturel n tel que $0,07n > 12,3$.

Exercice 13 : Densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$

1. Soient $x < y$ deux réels. En reprenant la démonstration du cours, montrer qu'il existe un rationnel r tel que $x < r < y$.
2. En déduire que l'intervalle $]x, y[$ contient une infinité de rationnels.
3. Appliquer la méthode de la question 1 à $x = \sqrt{2}$ et $y = 1,415$ avec $n = 10^4$, sachant que $14142,1 < 10^4 \sqrt{2} < 14142,2$. Vérifier le résultat par un calcul exact.
4. Montrer que tout réel x est la borne supérieure de l'ensemble $\left\{ r \in \mathbb{Q}, r < x \right\}$.

Exercice 14 : Irrationnels et densité de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

1. Montrer que $\sqrt{6}$ est irrationnel.
2. Soient $r \in \mathbb{Q}$ et $s \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Montrer que $r + s$ est irrationnel, et que rs est irrationnel si $r \neq 0$.
3. Montrer que $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ est irrationnel.
4. Montrer que la somme de deux irrationnels peut être rationnelle.
5. Soient $x < y$. Montrer que $]x, y[$ contient un irrationnel de la forme $r\sqrt{2}$ avec $r \in \mathbb{Q}^*$.

Exercice 15 : Approximations décimales

Soit x un réel. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $d_n = 10^{-n} \lfloor 10^n x \rfloor$ et $d'_n = d_n + 10^{-n}$.

1. Montrer que $d_n \leq x < d'_n$.
2. Montrer que la suite (d_n) est croissante et que la suite (d'_n) est décroissante.
3. Calculer d_0, d_1, d_2, d_3 pour $x = \sqrt{2}$, en justifiant, puis pour $x = -\frac{2}{3}$.
4. Montrer que $x = \sup \left\{ d_n, n \in \mathbb{N} \right\}$. En déduire que l'ensemble des décimaux est dense dans $\mathbb{R}$.

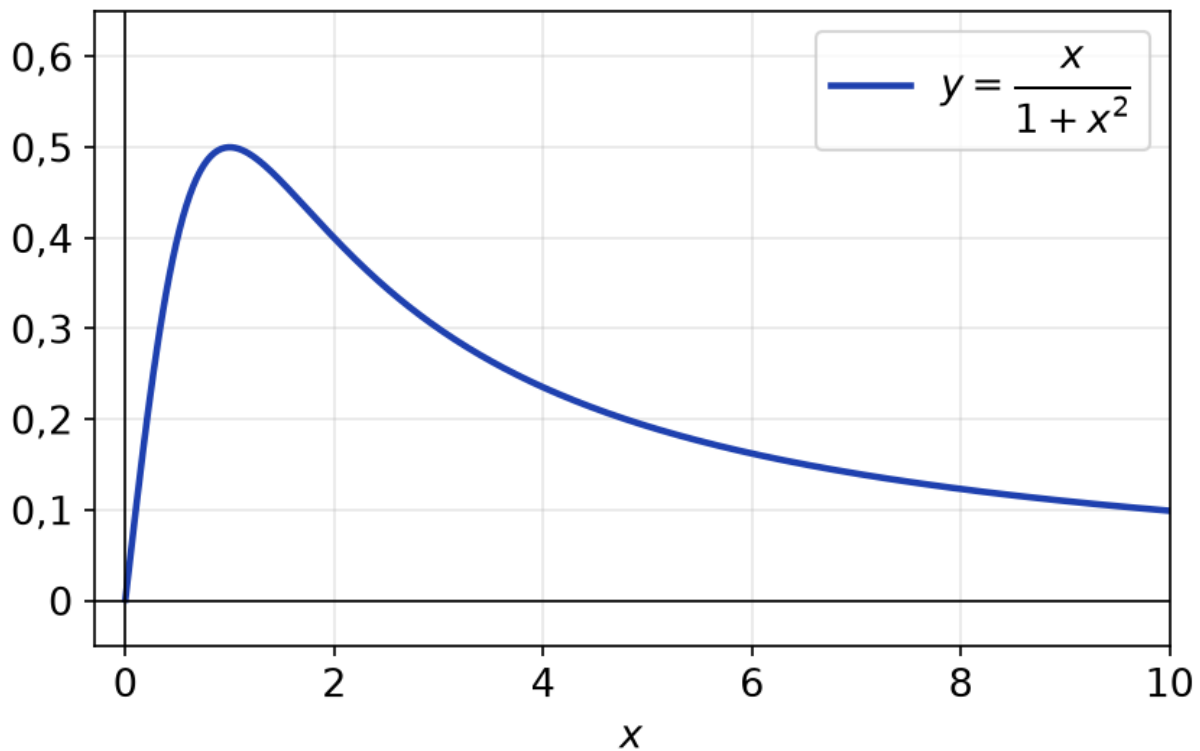
Exercice 16 : Caractérisation séquentielle de la borne supérieure

Soient A une partie non vide de $\mathbb{R}$ et M un majorant de A .

1. On suppose $M = \sup A$. Construire une suite (a_n) d'éléments de A qui converge vers M .
2. Réciproquement, on suppose qu'il existe une suite (a_n) d'éléments de A qui converge vers M . Montrer que $M = \sup A$.
3. Application : montrer que $\sup \left\{ \frac{n^2}{n^2 + 1}, n \in \mathbb{N} \right\} = 1$.

Exercice 17 : Bornes de l'image d'une fonction

On considère la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$, représentée ci-dessous, et on pose $A = \left\{ f(x), x > 0 \right\}$.



1. Montrer que $f(x) \leq \frac{1}{2}$ pour tout $x > 0$, et préciser le cas d'égalité. En déduire $\max A$.
2. Montrer que $\inf A = 0$. Cette borne est-elle atteinte ?
3. Montrer que, pour tous réels x et y , $f(x) - f(y) = \frac{(x-y)(1-xy)}{(1+x^2)(1+y^2)}$. En déduire que f est strictement décroissante sur $[1, +\infty[$.
4. Déterminer les bornes de $B = \left\{ \begin{matrix} f(x), \\ x \geq 2 \end{matrix} \right\}$, ainsi que son maximum et son minimum s'ils existent.

Exercice 18 : Parties à deux indices

1. Soit $A = \left\{ \begin{matrix} \frac{1}{n} + \frac{1}{m}, \\ (n, m) \in (\mathbb{N}^*)^2 \end{matrix} \right\}$. Déterminer $\sup A$ et $\inf A$. Sont-elles atteintes ?

2. Soit $B = \left\{ \frac{1}{n} - \frac{1}{m}, (n, m) \in (\mathbb{N}^*)^2 \right\}$. Déterminer $\sup B$ et $\inf B$. Sont-elles atteintes ?

Exercice 19 : $\mathbb{Q}$ ne vérifie pas l'axiome de la borne supérieure

On pose $E = \left\{ r \in \mathbb{Q}, \begin{array}{l} r \\ 0 \text{ et } r^2 < 2 \end{array} \right\}$. On admet que $\sqrt{2}$ est irrationnel.

1. Montrer que E est non vide et que 2 majore E .
2. On suppose qu'il existe un rationnel s qui est le plus petit majorant rationnel de E . Justifier que $s > 0$ et que $s^2 \neq 2$.
3. On suppose $s^2 < 2$. On pose $h = \min\left(1, \frac{2-s^2}{2s+2}\right)$. Montrer que h est un rationnel strictement positif et que $(s+h)^2 < 2$. Conclure à une contradiction.
4. On suppose $s^2 > 2$. On pose $h = \frac{s^2-2}{2s}$. Montrer que $0 < h < s$, que $(s-h)^2 > 2$, puis que $s-h$ est un majorant rationnel de E . Conclure.
5. Montrer que, dans $\mathbb{R}$, on a $\sup E = \sqrt{2}$.

Exercice 20 : Théorème des segments emboîtés

Soient (a_n) et (b_n) deux suites réelles telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
 $a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n$.

1. Montrer que $a_p \leq b_q$ pour tous entiers p et q .
2. On pose $\alpha = \sup \left\{ a_n, n \in \mathbb{N} \right\}$. Justifier l'existence de α et montrer que $\alpha \in [a_n, b_n]$ pour tout n . En déduire que $\bigcap_n [a_n, b_n]$ est non vide.

- On suppose de plus que $b_n - a_n$ tend vers 0. Montrer que $\bigcap_n [a_n, b_n] = \{\alpha\}$.
- Montrer que $\bigcap_{n \geq 1}]0, \frac{1}{n}[= \emptyset$. Pourquoi cela ne contredit-il pas la question 2 ?
- En utilisant l'exercice 15, montrer que le résultat de la question 2 devient faux si l'on remplace $\mathbb{R}$ par $\mathbb{Q}$.

Exercice 21 : Problème : sous-groupes additifs de $\mathbb{R}$

Soit G un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$, non réduit à $\{0\}$. On rappelle que G contient 0, et qu'il est stable par addition et par passage à l'opposé.

- Montrer que $G_+ = G \cap]0, +\infty[$ est non vide. On pose $a = \inf G_+$; justifier son existence et montrer que $a \geq 0$.
- On suppose $a > 0$.
 - Montrer que $a \in G$. (On pourra raisonner par l'absurde et trouver deux éléments g, g' de G tels que $a < g' < g < 2a$.)
 - En déduire que $G = a\mathbb{Z} = \left\{ \begin{matrix} ka, \\ k \in \mathbb{Z} \end{matrix} \right\}$. (Pour $x \in G$, on pourra considérer $x - \left\lfloor \frac{x}{a} \right\rfloor a$.)
- On suppose $a = 0$. Soient $x < y$ deux réels. Montrer qu'il existe $g \in G$ tel que $0 < g < y - x$, puis qu'il existe un entier k tel que $kg \in]x, y[$. Conclure que G est dense dans $\mathbb{R}$.
- Application : on pose $H = \left\{ m + n\sqrt{2} \mid (m, n) \in \mathbb{Z}^2 \right\}$.
 - Montrer que H est un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$ non réduit à $\{0\}$.
 - Montrer que H n'est pas de la forme $a\mathbb{Z}$ avec $a > 0$. En déduire que H est dense dans $\mathbb{R}$.

3. En déduire qu'il existe des entiers m et n tels que $0 < m + n\sqrt{2} < 10^{-3}$.

Exercice 22 : Point fixe d'une application croissante

Soit $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ une application croissante, pas nécessairement continue. On pose

$$E = \left\{ x \in [0, 1], \begin{array}{l} f(x) \geq x \end{array} \right\}.$$

1. Montrer que E admet une borne supérieure s , et que $s \in [0, 1]$.
2. Montrer que $f(s)$ est un majorant de E . En déduire que $f(s) \geq s$.
3. Montrer que $f(s) \in E$. Conclure que $f(s) = s$.
4. Exemple : on définit $f(x) = \frac{1}{3} + \frac{x}{3}$ si $0 \leq x < \frac{1}{2}$, et $f(x) = \frac{3}{4}$ si $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$. Vérifier que f est croissante à valeurs dans $[0, 1]$, déterminer E , s , et tous les points fixes de f .
5. Montrer par un contre-exemple que le résultat tombe en défaut si f est décroissante.

Le corrigé des exercices

Chaque exercice est corrigé en détail, question par question, sur la page suivante.



Pour aller plus loin en L1

- Le cours : [nombres réels, cours de maths en L1](#)
- À maîtriser avant : [Logique, raisonnement et ensembles](#)
- Chapitre précédent : [Nombres complexes et trigonométrie](#)
- Chapitre suivant : [Suites numériques](#)
- Tester vos connaissances : [QCM de maths en L1 par chapitre](#)
- Le sommaire : [tous les chapitres de maths de L1](#) et la [licence de maths de L1 à L3](#)