

Nombres réels et suites

Exercice 1 : Nombres irrationnels

1. Montrer que $\sqrt{6}$ est irrationnel.
2. En déduire que $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ est irrationnel.
3. Soit $r \in \mathbb{Q}$ et $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Montrer que $r + x$ est irrationnel, puis que rx est irrationnel si $r \neq 0$.
4. Donner deux irrationnels distincts dont le produit est rationnel, et deux irrationnels dont la somme est rationnelle.

Exercice 2 : Partie entière et approximations décimales

Soit x un réel. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $d_n = \frac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n}$ et $e_n = d_n + 10^{-n}$.

1. Montrer que $\lfloor x + m \rfloor = \lfloor x \rfloor + m$ pour tout $m \in \mathbb{Z}$.
2. Soit $y \in \mathbb{R}$. Montrer que $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq \lfloor x + y \rfloor \leq \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1$.
3. Montrer que la suite (d_n) est croissante et que la suite (e_n) est décroissante.
4. En déduire que (d_n) et (e_n) sont adjacentes et convergent vers x .
5. Calculer d_0, d_1, d_2, d_3 pour $x = \frac{22}{7}$.

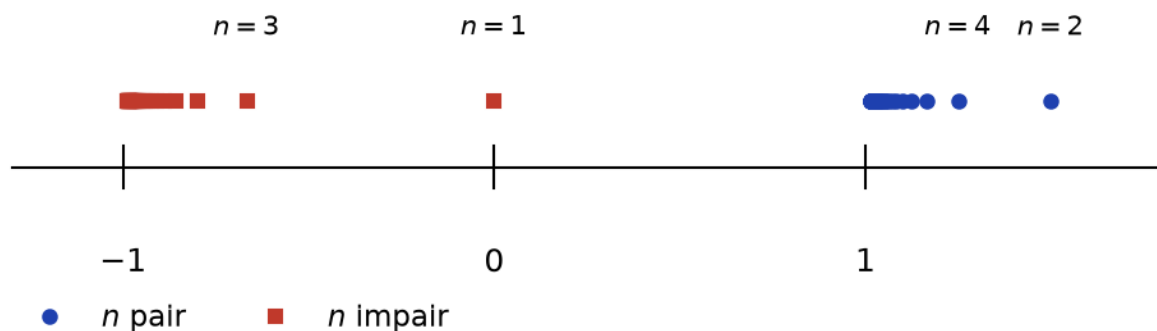
Exercice 3 : Bornes d'ensembles de réels

Pour chacune des parties suivantes, dire si elle est majorée, minorée, puis déterminer, lorsqu'ils existent, sa borne supérieure, sa borne inférieure, son maximum et son minimum.

$$1. \quad A = \left\{ (-1)^n + \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^* \right\}, \text{ dont les premiers points sont représentés ci-dessous.}$$

$$2. \quad B = \left\{ \frac{1}{n} + \frac{1}{m}, (n, m) \in (\mathbb{N}^*)^2 \right\}.$$

$$3. \quad C = \left\{ x \in \mathbb{Q}, x^2 < 2 \right\}, \text{ vue comme partie de } \mathbb{R}.$$



Exercice 4 : Bornes supérieures et opérations

Soit A et B deux parties non vides et bornées de $\mathbb{R}$. On note $A + B = \left\{ \begin{matrix} a \\ b, \\ a \in A, \\ b \in B \end{matrix} \right\},$

$$-A = \left\{ -a, a \in A \right\} \text{ et, pour } \lambda > 0, \quad \lambda A = \left\{ \lambda a, a \in A \right\}.$$

1. Justifier l'existence de $\sup(A+B)$ et montrer que $\sup(A+B) = \sup A + \sup B$.
2. Montrer que $\sup(\lambda A) = \lambda \sup A$ et que $\sup(-A) = -\inf A$.
3. On suppose $A \subset B$. Comparer $\sup A$ et $\sup B$, puis $\inf A$ et $\inf B$.
4. On pose $AB = \left\{ \begin{matrix} ab, \\ , a \in A, \\ , b \in B \end{matrix} \right\}$. Avec $A = B = [-2, 1]$, calculer $\sup(AB)$ et le comparer à $\sup A \times \sup B$.

Exercice 5 : Intervalles et droite achevée

1. À l'aide de la caractérisation des intervalles, montrer que l'intersection de deux intervalles est un intervalle.
2. Montrer que la réunion de deux intervalles n'est pas toujours un intervalle. Montrer ensuite que si $I \cap J \neq \emptyset$, alors $I \cup J$ est un intervalle.
3. Les ensembles $F = \left\{ \begin{matrix} x \in \mathbb{R}, \\ , |x-1| + |x+1| \leq 4 \end{matrix} \right\}$ et $G = \left\{ \begin{matrix} x \in \mathbb{R}^*, \\ , \frac{1}{x} < 1 \end{matrix} \right\}$ sont-ils des intervalles ?
4. Déterminer, dans $\overline{\mathbb{R}}$, la borne supérieure et la borne inférieure de $H = \left\{ \begin{matrix} x \in \mathbb{Q}, \\ , x > 0 \end{matrix} \right\}$ et de $K = \left\{ \begin{matrix} n' - 10n, \\ , n \in \mathbb{N} \end{matrix} \right\}$.

Exercice 6 : Retour à la définition de la limite

1. Soit $u_n = \frac{2n+1}{n+3}$. Montrer, en revenant à la définition, que (u_n) converge vers 2. Donner un rang N à partir duquel $|u_n - 2| \leq 10^{-3}$.
2. Montrer, par la définition, que $v_n = n^2 - 3n$ tend vers $+\infty$.
3. Montrer, par la définition, que la suite $((-1)^n)$ ne converge pas.

4. Soit (w_n) une suite qui converge vers $\ell > 0$. Montrer que $w_n > \frac{\ell}{2}$ à partir d'un certain rang.

Exercice 7 : Calculs de limites

Déterminer la limite éventuelle de chacune des suites suivantes, définies pour $n \geq 1$.

1. $a_n = \sqrt{n^2 + 3n} - \sqrt{n^2 + 1}$.

2. $b_n = \frac{n^2 + (-1)^n n}{2n^2 + 1}$.

3. $c_n = \frac{3^n - 2^n}{3^n + 2^n}$.

4. $d_n = n^{1/n}$.

5. $e_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

Exercice 8 : Encadrements et majorations de l'écart

1. Soit $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2 + k}$. Montrer que $|u_n - 1| \leq \frac{1}{n+1}$ et conclure.

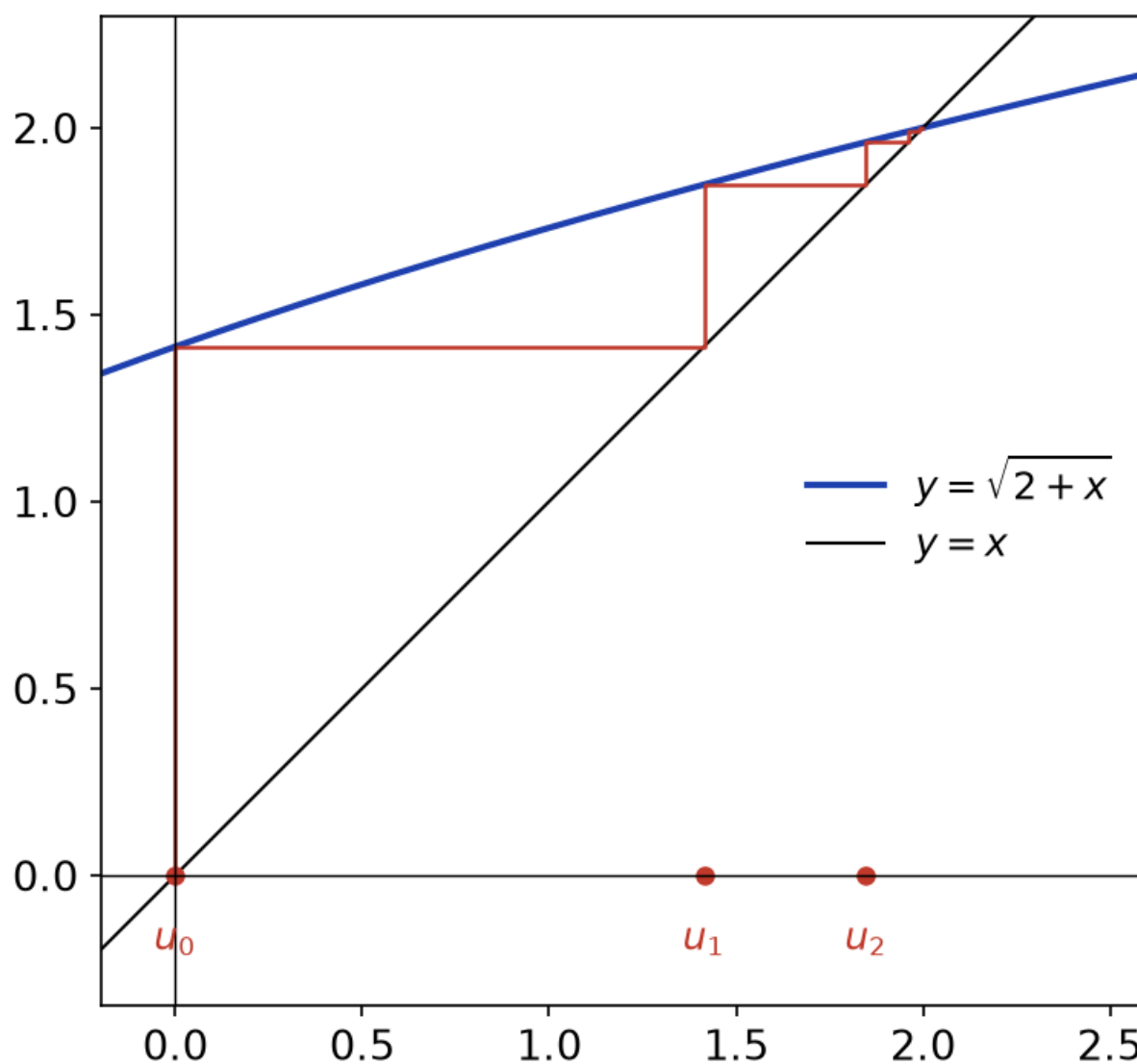
2. Soit $x \in \mathbb{R}$ et $t_n = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n \lfloor kx \rfloor$. Montrer que $\left|t_n - \frac{x}{2}\right| \leq \frac{1 + |x|/2}{n}$ et conclure.

3. Soit $s_n = \frac{n!}{n^n}$. Montrer que $0 < s_n \leq \frac{1}{n}$ et conclure.

4. Montrer que $0 < \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \leq \frac{1}{2\sqrt{n}}$ et conclure.

Exercice 9 : Suite récurrente et vitesse de convergence

On définit $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. La figure ci-dessous représente les premiers termes.



1. Montrer que $0 \leq u_n < 2$ pour tout n .
2. Montrer que (u_n) est strictement croissante.
3. En déduire que (u_n) converge, puis déterminer sa limite.
4. Montrer que $2 - u_{n+1} \leq \frac{2 - u_n}{3}$, puis que $0 < 2 - u_n \leq \frac{2}{3^n}$ pour tout n .

5. Donner un rang à partir duquel u_n est une valeur approchée de 2 à 10^{-6} près.

Exercice 10 : Limite monotone et deux sommes classiques

On pose, pour $n \geq 1$, $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$ et $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.

1. Montrer que $\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$ pour $k \geq 2$. En déduire que (S_n) converge vers une limite σ telle que $\frac{5}{4} \leq \sigma \leq 2$.
2. Montrer que $H_{2n} - H_n \geq \frac{1}{2}$ pour tout $n \geq 1$. En déduire que $H_n \rightarrow +\infty$.
3. Montrer que $H_{2^p} \geq 1 + \frac{p}{2}$ pour tout $p \in \mathbb{N}$. Donner un entier n tel que $H_n \geq 10$.

Exercice 11 : Série harmonique alternée et suites adjacentes

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k}$, avec $S_0 = 0$.

1. Montrer que les suites $a_n = S_{2n}$ et $b_n = S_{2n+1}$ sont adjacentes.
2. En déduire que (S_n) converge. On note ℓ sa limite.
3. Montrer que $\frac{7}{12} \leq \ell \leq \frac{47}{60}$, puis que $|S_n - \ell| \leq \frac{1}{n+1}$ pour tout n .
4. Combien de termes suffit-il de sommer pour obtenir ℓ à 10^{-3} près ?

Exercice 12 : Moyenne arithmético-géométrique

Soit $a \geq b > 0$. On pose $a_0 = a$, $b_0 = b$ et, pour tout n , $a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$ et $b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$.

1. Montrer que, pour tous réels $x, y > 0$, $\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$. En déduire que les suites sont bien définies, strictement positives, et que $b_n \leq a_n$ pour tout n .
2. Montrer que (a_n) est décroissante et (b_n) croissante.
3. Montrer que $a_{n+1} - b_{n+1} \leq \frac{a_n - b_n}{2}$, puis que $0 \leq a_n - b_n \leq \frac{a-b}{2^n}$.
4. En déduire que les deux suites convergent vers une même limite, notée $M(a, b)$.
5. Pour $a = 9$ et $b = 1$, calculer a_1, b_1, a_2, b_2 et en déduire un encadrement de $M(9, 1)$ d'amplitude inférieure à $0,2$.

Exercice 13 : Divergence par suites extraites

1. Montrer que la suite $u_n = \cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)$ diverge.
2. Montrer que la suite $v_n = (-1)^n \frac{n}{n+1}$ diverge.
3. On suppose que la suite $w_n = \sin n$ converge vers un réel ℓ .
 1. Exprimer $\sin(n+1) - \sin(n-1)$ à l'aide de $\cos n$. En déduire que $\cos n \rightarrow 0$.
 2. En considérant la suite extraite $(\sin 2n)$, montrer que $\ell = 0$.
 3. Obtenir une contradiction et conclure.
4. Soit $x_n = n(-1)^n$ pour $n \geq 1$. Montrer que (x_n) n'est pas bornée, mais ne tend pas vers $+\infty$.

Exercice 14 : Suites extraites paires, impaires et multiples de 3

1. Soit (u_n) une suite réelle telle que (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers une même limite ℓ . Démontrer que (u_n) converge vers ℓ .
2. On suppose que (u_{2n}) , (u_{2n+1}) et (u_{3n}) convergent, sans supposer leurs limites égales. Montrer que (u_n) converge.
3. Construire une suite divergente telle que (u_{2n}) et (u_{3n}) convergent.
4. Montrer qu'une suite croissante qui possède une suite extraite convergente est convergente.

Exercice 15 : Densité des nombres dyadiques et des irrationnels

On note $\mathcal{D} = \left\{ \frac{p}{2^n}, p \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \right\}$ l'ensemble des nombres dyadiques. Soit $x \in \mathbb{R}$.

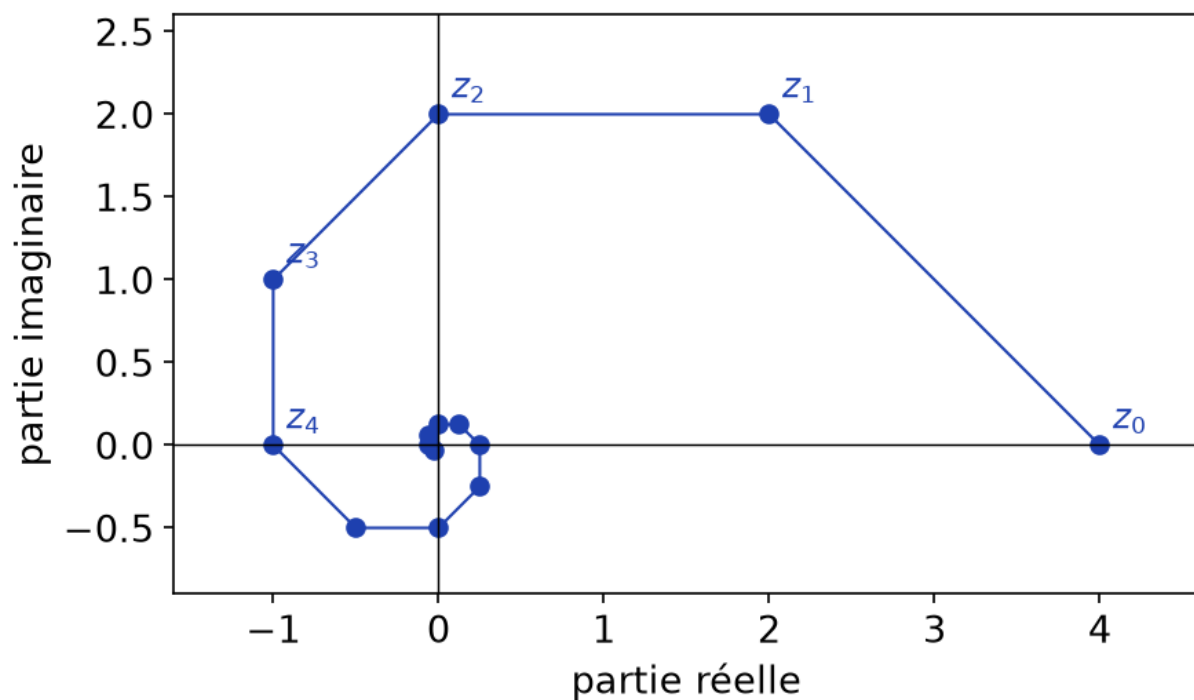
1. On pose $a_n = \frac{\lfloor 2^n x \rfloor}{2^n}$. Montrer que $a_n \in \mathcal{D}$ et $|a_n - x| < \frac{1}{2^n}$. En déduire que $\mathcal{D}$ est dense dans $\mathbb{R}$.
2. Soit $a < b$ deux réels. Construire explicitement un élément de $\mathcal{D}$ dans $]a, b[$.
3. Montrer que $\frac{1}{3} \notin \mathcal{D}$. Montrer ensuite que $c_n = a_n + \frac{\sqrt{2}}{2^{n+1}}$ est irrationnel et tend vers x . Qu'en déduit-on ?
4. Montrer que tout réel est la limite d'une suite **strictement croissante** de rationnels.

Exercice 16 : Caractérisation séquentielle de la borne supérieure

1. Soit $E = \left\{ \frac{1}{n} - \frac{1}{m}, (n, m) \in (\mathbb{N}^*)^2 \right\}$. Déterminer $\sup E$ et $\inf E$. Sont-ils atteints ?
2. Soit $C = \left\{ x \in \mathbb{Q}, x^3 < 2 \right\}$. Montrer que C admet une borne supérieure et que $\sup C = \sqrt[3]{2}$.
3. Soit $F = \left\{ x + \frac{1}{x}, x \in]0, 1[\right\}$. Déterminer $\inf F$ et $\sup F$ dans $\bar{\mathbb{R}}$.
4. Soit A une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$, de borne supérieure M , telle que $M \notin A$.
Montrer qu'il existe une suite **strictement croissante** d'éléments de A qui converge vers M .

Exercice 17 : Suites complexes

On définit $z_0 = 4$ et $z_{n+1} = \frac{1+i}{2} z_n$. La figure ci-dessous montre les premiers termes dans le plan complexe.



1. Calculer z_1, z_2, z_3, z_4 sous forme algébrique.

2. Calculer $|z_n|$ et en déduire que (z_n) converge vers 0.
3. Déterminer le plus petit rang n tel que $|z_n| \leq 10^{-3}$.
4. Soit $w_n = \frac{n + 2in^2}{n^2 + i}$. Montrer que $|w_n - 2i| \leq \frac{n+2}{n^2}$ pour $n \geq 1$ et conclure.
5. Soit $\theta \in \mathbb{R}$ avec $\theta \notin 2\pi\mathbb{Z}$. Montrer que la suite $(e^{in\theta})$ diverge.

Exercice 18 : Valeur d'adhérence unique et Bolzano-Weierstrass

Soit (u_n) une suite réelle **bornée** et $\ell \in \mathbb{R}$. On suppose que toute suite extraite convergente de (u_n) a pour limite ℓ .

1. On suppose que (u_n) ne converge pas vers ℓ . Montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ et une application strictement croissante φ telle que $|u_{\varphi(n)} - \ell| > \varepsilon$ pour tout n .
2. À l'aide du théorème de Bolzano-Weierstrass, aboutir à une contradiction. Conclure.
3. Soit $x_n = n(-1)^n$ pour $n \geq 1$. Montrer que toute suite extraite convergente de (x_n) tend vers 0, mais que (x_n) diverge. Quelle hypothèse manque ?

Exercice 19 : Moyennes de Cesàro

Pour une suite $(u_n)_{n \geq 1}$, on pose $c_n = \frac{u_1 + u_2 + \dots + u_n}{n}$.

1. Montrer que si $u_n \rightarrow \ell \in \mathbb{R}$, alors $c_n \rightarrow \ell$.
2. Montrer que la réciproque est fausse.
3. Montrer que si $u_n \rightarrow +\infty$, alors $c_n \rightarrow +\infty$.
4. Application. Soit $v_0 = 1$ et $v_{n+1} = v_n + \frac{1}{v_n}$. Montrer que $v_n \rightarrow +\infty$, puis que

$$\frac{v_n^2}{n} \rightarrow 2.$$

Exercice 20 : Point fixe d'une application croissante

Soit $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ une application **croissante**, non nécessairement continue. On pose

$$A = \left\{ x \in [0, 1], \begin{array}{l} f(x) \geq x \end{array} \right\}.$$

1. Montrer que A admet une borne supérieure c et que $c \in [0, 1]$.
2. Montrer que $f(c)$ majore A . En déduire que $c \leq f(c)$.
3. Montrer que $f(c) \in A$. En déduire que $f(c) = c$.
4. Exemple : $f(x) = \frac{1}{4}$ si $x < \frac{1}{2}$ et $f(x) = \frac{3}{4}$ si $x \geq \frac{1}{2}$. Déterminer A , puis c , et vérifier le résultat. Quels sont les points fixes de f ?
5. Montrer par un exemple que le résultat tombe en défaut pour une application décroissante.

Exercice 21 : Problème : méthode de Héron et borne supérieure dans $\mathbb{Q}$

On définit $u_0 = 2$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{1}{2} \left(u_n + \frac{2}{u_n} \right)$. On pose aussi $v_n = \frac{2}{u_n}$ et $e_n = u_n - \sqrt{2}$.

1. Montrer que u_n est bien défini, rationnel et strictement positif pour tout n .
2. Montrer que $u_{n+1} - \sqrt{2} = \frac{(u_n - \sqrt{2})^2}{2u_n}$. En déduire que $u_n \geq \sqrt{2}$ pour tout n .
3. Montrer que (u_n) est décroissante, puis qu'elle converge vers $\sqrt{2}$.
4. Montrer que (u_n) et (v_n) sont adjacentes et que $v_n \leq \sqrt{2} \leq u_n$.

5. Montrer que $e_{n+1} \leq \frac{e_n^2}{2}$, puis que $e_n \leq 2 \cdot 3^{-2^n}$ pour tout n .
6. Calculer u_1, u_2, u_3 et v_3 . En déduire un encadrement de $\sqrt{2}$ par deux rationnels, d'amplitude $\frac{1}{235416}$.
7. Soit $V = \left\{ \frac{v_n}{n} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$. Montrer que V est une partie non vide et majorée de $\mathbb{Q}$ qui n'admet pas de borne supérieure dans $\mathbb{Q}$.

Le corrigé des exercices

Chaque exercice est corrigé en détail, question par question, sur la page suivante.



Pour aller plus loin en maths sup

- Le cours : [nombres réels et suites, cours de maths sup](#)
- À maîtriser avant : [Logique, ensembles, applications et relations](#), [Calculs algébriques : sommes, produits, inégalités](#)
- Chapitre précédent : [Équations différentielles linéaires d'ordre 1 et 2](#)
- Chapitre suivant : [Suites particulières et suites récurrentes](#)
- Tester vos connaissances : [QCM de maths sup par chapitre](#)
- Le sommaire : [tous les chapitres de maths sup](#) et les [chapitres de maths spé](#)