

Nombres réels et suites

I. Des entiers aux nombres réels

Vous manipulez les réels depuis le collège. Cependant, leur construction n'a jamais été discutée. En maths sup, on ne construit pas $\mathbb{R}$: on l'admet, muni de ses opérations, de son ordre et d'une propriété fondamentale, la propriété de la borne supérieure. Tout le reste de l'analyse en découle.

1. Les ensembles de nombres

On dispose d'abord de la chaîne d'inclusions $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$. Ici, $\mathbb{D}$ désigne l'ensemble des nombres décimaux, c'est-à-dire des nombres de la forme $\frac{p}{10^n}$ avec $p \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$.

Définition :

Un réel est **rationnel** s'il s'écrit $\frac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$. Un réel qui n'est pas rationnel est dit **irrationnel**. L'ensemble des irrationnels est noté $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Proposition :

Le réel $\sqrt{2}$ est irrationnel.

Démonstration :

Supposons par l'absurde $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ avec p, q entiers naturels non nuls et q minimal. Alors $p^2 = 2q^2$, donc p^2 est pair. Par conséquent p est pair, car le carré d'un impair est impair. Écrivons $p = 2p_1$. On obtient $q^2 = 2p_1^2$, donc q est pair à son tour. Ainsi $\sqrt{2} = \frac{p_1}{q/2}$ avec un dénominateur strictement plus petit que q . C'est absurde.

Remarque :

La somme d'un rationnel et d'un irrationnel est irrationnelle. De même, le produit d'un rationnel non nul par un irrationnel est irrationnel. En revanche, la somme de deux irrationnels peut être rationnelle : $\sqrt{2} + (-\sqrt{2}) = 0$.

2. Partie entière et approximations décimales

Théorème :

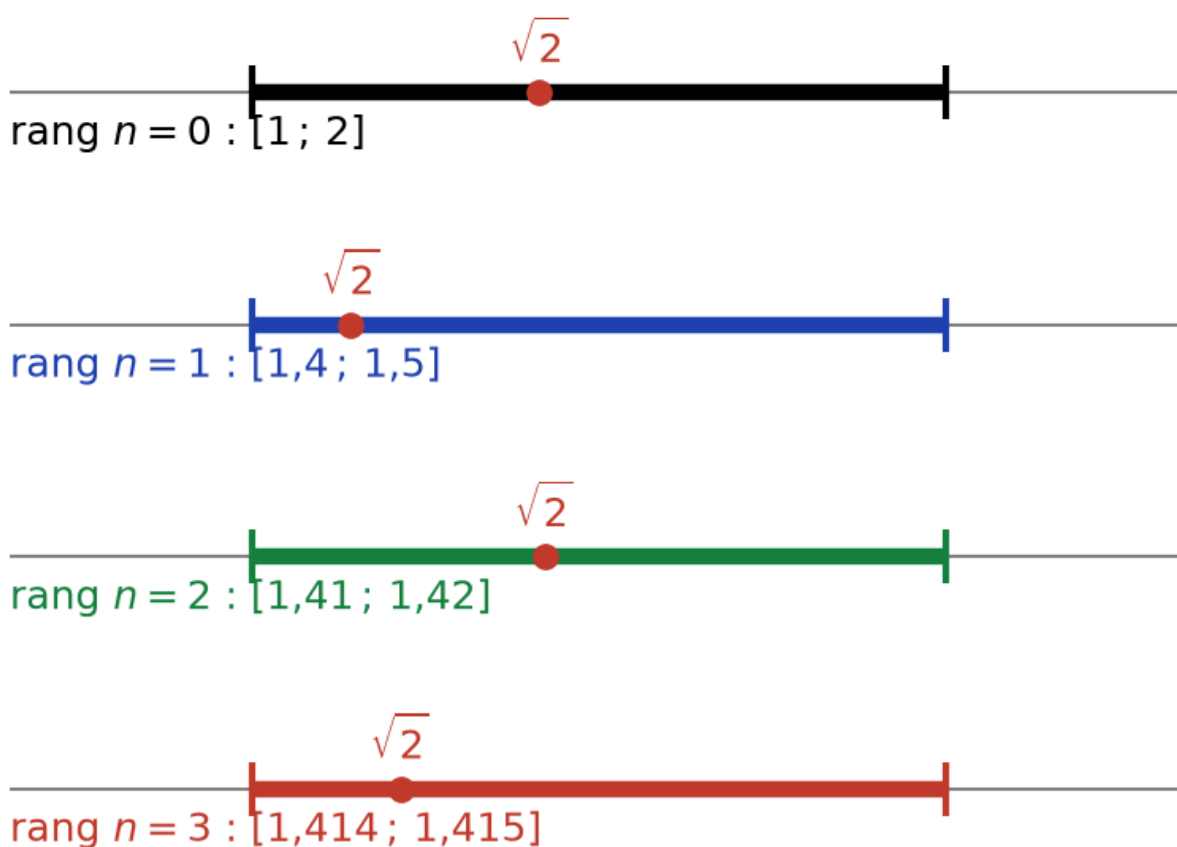
Pour tout réel x , il existe un unique entier relatif n tel que $n \leq x < n + 1$. Cet entier est la **partie entière** de x , notée $\lfloor x \rfloor$.

L'existence repose sur la propriété d'Archimède : pour tout réel x , il existe un entier strictement supérieur à x . L'unicité vient du fait que deux entiers distincts sont écartés d'au moins 1.

Définition :

Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. Le décimal $d_n = \frac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n}$ est l'**approximation décimale par défaut** de x à 10^{-n} près. Le décimal $d_n + 10^{-n}$ est l'approximation par excès. On a $d_n \leq x < d_n + 10^{-n}$.

En effet, il suffit de diviser par 10^n l'encadrement $\lfloor 10^n x \rfloor \leq 10^n x < \lfloor 10^n x \rfloor + 1$. La figure ci-dessous montre les intervalles successifs obtenus pour $x = \sqrt{2}$, chacun agrandi pour rester lisible.



Exemple :

Comme $1,414^2 = 1,999396$ et $1,415^2 = 2,002225$, on a $1,414 \leq \sqrt{2} < 1,415$. Donc $d_3 = 1,414$ pour $x = \sqrt{2}$.

II. La propriété de la borne supérieure

La différence essentielle entre $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$ n'est pas algébrique. Elle tient à l'ordre : dans $\mathbb{R}$, les parties majorées ont toujours une « meilleure » borne. C'est cette propriété qui garantit l'existence de limites.

1. Majorants, maximum, borne supérieure

Définition :

Soit A une partie de $\mathbb{R}$. Un réel M est un **majorant** de A si $a \leq M$ pour tout $a \in A$. Si un majorant de A appartient à A , c'est le **plus grand élément** (ou maximum) de A . La **borne supérieure** de A , notée $\sup A$, est, si elle existe, le plus petit des majorants de A .

On définit de même minorant, minimum et borne inférieure $\inf A$, plus grand des minorants. Un maximum est toujours une borne supérieure. En revanche, la réciproque est fausse, comme le montre l'exemple de $[0, 1[$: sa borne supérieure vaut 1, mais il n'a pas de maximum.

2. L'axiome de la borne supérieure

Théorème :

Toute partie **non vide et majorée** de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure. De même, toute partie non vide et minorée admet une borne inférieure.

Ce théorème est admis : il fait partie de la définition de $\mathbb{R}$. La version « borne inférieure » s'en déduit, car $\inf A = -\sup(-A)$, où $-A = \{-a, a \in A\}$.

Attention :

L'ensemble $\mathbb{Q}$ ne vérifie pas cette propriété. Par exemple, $B = \left\{x \in \mathbb{Q}, x^2 < 2\right\}$ est une partie non vide et majorée de $\mathbb{Q}$. Or elle n'a pas de borne supérieure dans $\mathbb{Q}$, car sa borne supérieure dans $\mathbb{R}$ est $\sqrt{2}$.

3. Caractérisations pratiques

Proposition :

Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$ et $M \in \mathbb{R}$. Alors $M = \sup A$ si et seulement si :

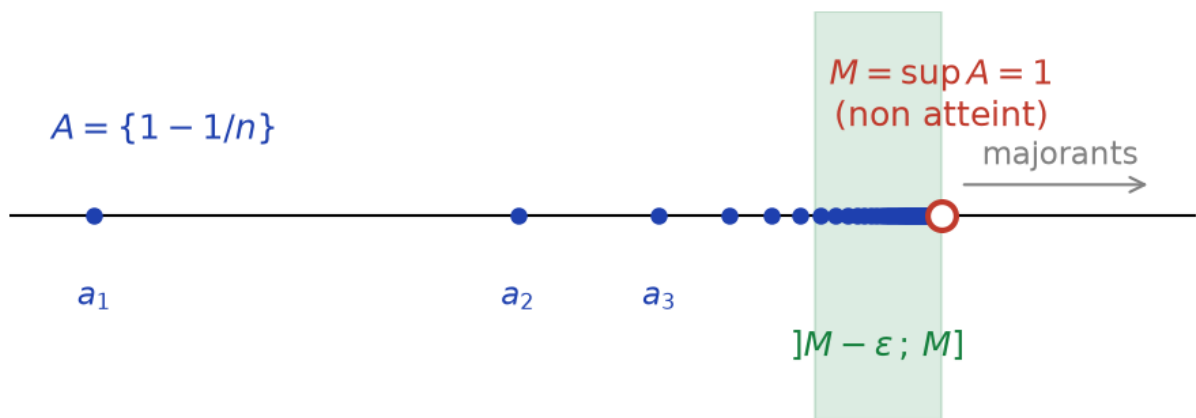
M majore A et, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $a \in A$ tel que $M - \varepsilon < a \leq M$.

De façon équivalente, $M = \sup A$ si et seulement si M majore A et il existe une suite (a_n) d'éléments de A qui converge vers M .

Démonstration :

Si $M = \sup A$ et $\varepsilon > 0$, alors $M - \varepsilon$ n'est pas un majorant, car il est plus petit que le plus petit des majorants. Il existe donc $a \in A$ avec $a > M - \varepsilon$. Réciproquement, soit M' un majorant avec $M' < M$. Avec $\varepsilon = M - M'$, on trouve $a \in A$ tel que $a > M'$, ce qui est contradictoire. Ainsi M est le plus petit majorant. Pour la version séquentielle, on choisit $\varepsilon = \frac{1}{n+1}$ et l'on obtient a_n avec $|a_n - M| < \frac{1}{n+1}$.

Comme le montre la figure ci-dessous, la borne supérieure est « collée » à l'ensemble : toute bande $]M - \varepsilon, M]$ contient des points de A , même lorsque M n'est pas atteint.



Méthode :

Pour déterminer la borne supérieure d'une partie A :

1. On justifie son existence : A est non vide et majorée.
2. On devine le candidat M (calcul de quelques valeurs, étude de monotonie).
3. On prouve que M majore A .
4. Enfin, on exhibe une suite d'éléments de A qui tend vers M , ou bien on montre que $M \in A$.

Exemple :

Soit $A = \left\{1 - \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*\right\}$. D'abord, A est non vide et majoré par 1. Ensuite, la suite $a_n = 1 - \frac{1}{n}$ est dans A et tend vers 1. Donc $\sup A = 1$. De plus, $1 \notin A$, donc A n'a pas de maximum. Enfin, $\min A = 0$, atteint pour $n = 1$.

III. Intervalles, densité et droite achevée

1. Caractérisation des intervalles

Théorème :

Une partie I de $\mathbb{R}$ est un **intervalle** si et seulement si, pour tous $x \leq y$ dans I , on a $[x, y] \subset I$.

Autrement dit, les intervalles sont exactement les parties « sans trou ». La preuve du sens difficile utilise les bornes de I dans $\overline{\mathbb{R}}$. Posons $a = \inf I$ et $b = \sup I$, éventuellement infinis. Tout point strictement compris entre a et b se trouve entre deux éléments de I , donc dans I . Ainsi I est l'un des intervalles d'extrémités a et b .

Exemple :

L'ensemble $\left\{ x \in \mathbb{R}, \begin{array}{l} x^2 > 1 \end{array} \right\}$ n'est pas un intervalle. En effet, il contient -2 et 2 , mais pas 0 , qui est compris entre les deux.

2. Densité de $\mathbb{Q}$ et des irrationnels

Définition :

Une partie D de $\mathbb{R}$ est **dense** dans $\mathbb{R}$ si tout intervalle ouvert non vide $]a, b[$ contient au moins un élément de D .

Théorème :

Les ensembles $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sont denses dans $\mathbb{R}$.

Démonstration :

Soit $a < b$. Choisissons $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $10^{-n} < b - a$. Le décimal $r = d_n + 10^{-n}$ associé à a vérifie $a < r \leq a + 10^{-n} < b$. Donc $r \in]a, b[\cap \mathbb{Q}$. Pour les irrationnels, on applique ce résultat à l'intervalle $]a - \sqrt{2}, b - \sqrt{2}[$: il contient un rationnel r . Alors $r + \sqrt{2}$ est irrationnel et appartient à $]a, b[$.

Proposition :

Une partie D est dense dans $\mathbb{R}$ si et seulement si tout réel est limite d'une suite d'éléments de D . Par exemple, tout réel x est limite de la suite rationnelle (d_n) de ses approximations décimales.

C'est la **caractérisation séquentielle de la densité**. Dans un sens, on choisit

$u_n \in D \cap]x - \frac{1}{n+1}, x + \frac{1}{n+1}[$. Dans l'autre, un intervalle $]a, b[$ contient $x = \frac{a+b}{2}$; donc il contient les termes d'une suite de D qui tend vers x , à partir d'un certain rang.

3. La droite achevée

Notation :

On note $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, ordonné en posant $-\infty < x < +\infty$ pour tout réel x . C'est la **droite achevée**.

Dans $\overline{\mathbb{R}}$, toute partie non vide admet une borne supérieure. Par convention, si A n'est pas majorée, on pose $\sup A = +\infty$. Par exemple, $\sup \mathbb{N} = +\infty$. Cette convention simplifie l'énoncé du théorème de la limite monotone.

IV. Limite d'une suite numérique

1. Vocabulaire

Une suite réelle (u_n) est **majorée** s'il existe M tel que $u_n \leq M$ pour tout n . Elle est minorée de façon analogue. Elle est **bornée** si elle est à la fois majorée et minorée, ce qui équivaut à l'existence de K tel que $|u_n| \leq K$ pour tout n . Elle est croissante si $u_{n+1} \geq u_n$ pour tout n , décroissante si $u_{n+1} \leq u_n$ pour tout n , et monotone si elle est l'un ou l'autre.

2. Définitions de la limite

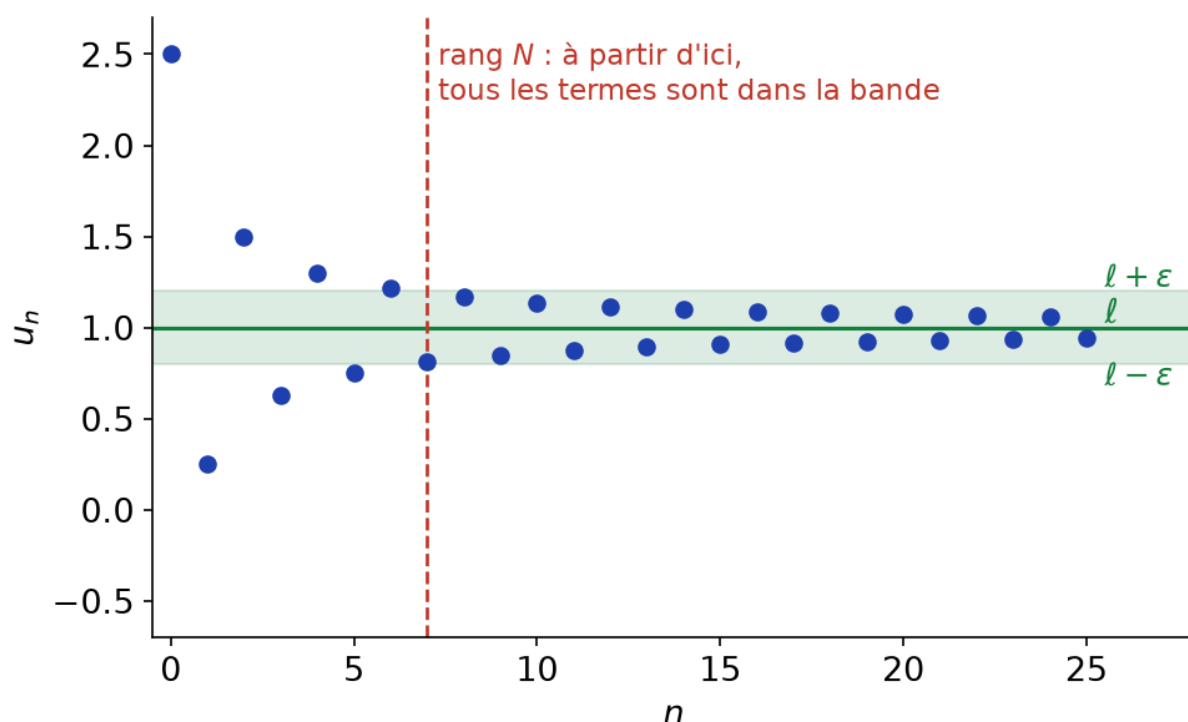
Définition :

Soit $\ell \in \mathbb{R}$. La suite (u_n) **converge** vers ℓ si :

$$\begin{aligned} &\forall \varepsilon > 0, \\ &,\exists N \in \mathbb{N}, \\ &,\forall n \geq N, \\ &|u_n - \ell| \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

La suite tend vers $+\infty$ si $\begin{aligned} &\forall A \in \mathbb{R}, \\ &,\exists N \in \mathbb{N}, \\ &,\forall n \geq N, \\ &u_n \geq A \end{aligned}$. Une suite qui ne converge pas est dite **divergente**.

Géométriquement, quelle que soit la largeur de la bande $[\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon]$, tous les termes finissent par y entrer et par y rester. La figure ci-dessous illustre cette définition : le rang N dépend de ε .



Théorème :

La limite d'une suite, si elle existe, est **unique**. De plus, toute suite convergente est bornée.

Démonstration :

Supposons que (u_n) converge vers ℓ et vers ℓ' , avec $\ell \neq \ell'$. Posons $\varepsilon = \frac{|\ell - \ell'|}{3}$. Pour n assez grand, on a à la fois $|u_n - \ell| \leq \varepsilon$ et $|u_n - \ell'| \leq \varepsilon$. Donc, par l'inégalité triangulaire, $|\ell - \ell'| \leq 2\varepsilon < |\ell - \ell'|$, ce qui est absurde. Ensuite, avec $\varepsilon = 1$, on a $|u_n| \leq |\ell| + 1$ pour $n \geq N$. Ainsi $|u_n| \leq \max(|u_0|, \dots, |u_{N-1}|, |\ell| + 1)$ pour tout n .

3. Opérations sur les limites

Si $u_n \rightarrow \ell$ et $v_n \rightarrow \ell'$, alors $u_n + v_n \rightarrow \ell + \ell'$, $u_n v_n \rightarrow \ell \ell'$ et $\lambda u_n \rightarrow \lambda \ell$.
Si de plus $\ell' \neq 0$, alors v_n est non nul à partir d'un certain rang et $\frac{u_n}{v_n} \rightarrow \frac{\ell}{\ell'}$. Ces règles s'étendent aux limites infinies, sauf dans les quatre **formes indéterminées** : $\infty - \infty$, $0 \times \infty$, $\frac{\infty}{\infty}$ et $\frac{0}{0}$.

Exemple :

Pour lever l'indétermination de $\sqrt{n^2 + n} - n$, on multiplie par la quantité conjuguée :

$$\sqrt{n^2 + n} - n = \frac{n}{\sqrt{n^2 + n} + n} = \frac{1}{\sqrt{1 + 1/n} + 1} \longrightarrow \frac{1}{2}.$$

Méthode :

Pour établir que $u_n \rightarrow \ell$ de façon **quantitative**, on cherche une majoration $|u_n - \ell| \leq v_n$ avec $v_n \rightarrow 0$. Par exemple, si $u_n = \frac{2n+1}{n+3}$, alors $|u_n - 2| = \frac{5}{n+3} \leq \frac{5}{n}$. Cette majoration donne un rang explicite : $|u_n - 2| \leq \varepsilon$ dès que $n \geq \frac{5}{\varepsilon}$.

V. Inégalités et limites : encadrement, monotonie, adjacence

1. Passage à la limite dans une inégalité

Propriété :

Si $u_n \rightarrow \ell$, $v_n \rightarrow \ell'$ et $u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang, alors $\ell \leq \ell'$.

Attention :

Les inégalités strictes deviennent larges à la limite. Par exemple, $\frac{1}{n} > 0$ pour tout $n \geq 1$, et pourtant la limite vaut 0 .

2. Théorèmes d'encadrement

Théorème :

Supposons $v_n \leq u_n \leq w_n$ à partir d'un certain rang. Si (v_n) et (w_n) convergent vers une même limite ℓ , alors (u_n) converge vers ℓ . De même, si $u_n \geq v_n$ et $v_n \rightarrow +\infty$, alors $u_n \rightarrow +\infty$.

Démonstration :

Soit $\varepsilon > 0$. À partir d'un certain rang, $\ell - \varepsilon \leq v_n$ et $w_n \leq \ell + \varepsilon$. Par conséquent $\ell - \varepsilon \leq u_n \leq \ell + \varepsilon$, c'est-à-dire $|u_n - \ell| \leq \varepsilon$.

Exemple :

Pour tout réel x , on a $nx - 1 < \lfloor nx \rfloor \leq nx$. En divisant par n , on obtient $x - \frac{1}{n} < \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \leq x$. Donc $\frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \rightarrow x$ par encadrement.

3. Théorème de la limite monotone

Théorème :

Toute suite croissante et majorée converge, vers $\sup\{u_n, n \in \mathbb{N}\}$. Toute suite croissante non majorée tend vers $+\infty$. Les énoncés sont symétriques pour les suites décroissantes.

Démonstration :

L'ensemble $\{u_n\}$ est non vide et majoré, donc il admet une borne supérieure ℓ . Soit $\varepsilon > 0$. Par caractérisation de la borne supérieure, il existe N tel que $\ell - \varepsilon < u_N$. Ensuite, par croissance, pour $n \geq N$ on a $\ell - \varepsilon < u_N \leq u_n \leq \ell$. Donc $u_n \rightarrow \ell$. Si la suite n'est pas majorée, tout réel A est dépassé par un terme u_N , puis par tous les suivants.

Ce théorème est **qualitatif** : il affirme l'existence de la limite sans la calculer. C'est pourquoi on le complète souvent par une étude quantitative.

4. Suites adjacentes

Définition :

Deux suites (u_n) et (v_n) sont **adjacentes** si l'une est croissante, l'autre décroissante, et si $v_n - u_n \rightarrow 0$.

Théorème :

Deux suites adjacentes convergent vers une même limite ℓ . De plus, si (u_n) croît et (v_n)

décroît, on a $u_n \leq \ell \leq v_n$ pour tout n .

Démonstration :

La suite $(v_n - u_n)$ est décroissante et tend vers 0. Elle est donc positive : $u_n \leq v_n$. Ainsi $u_n \leq v_n \leq v_0$: la suite (u_n) est croissante et majorée, donc converge vers ℓ . De même, (v_n) converge vers ℓ' . Enfin $\ell' - \ell = \lim (v_n - u_n) = 0$. L'encadrement vient des monotonies.

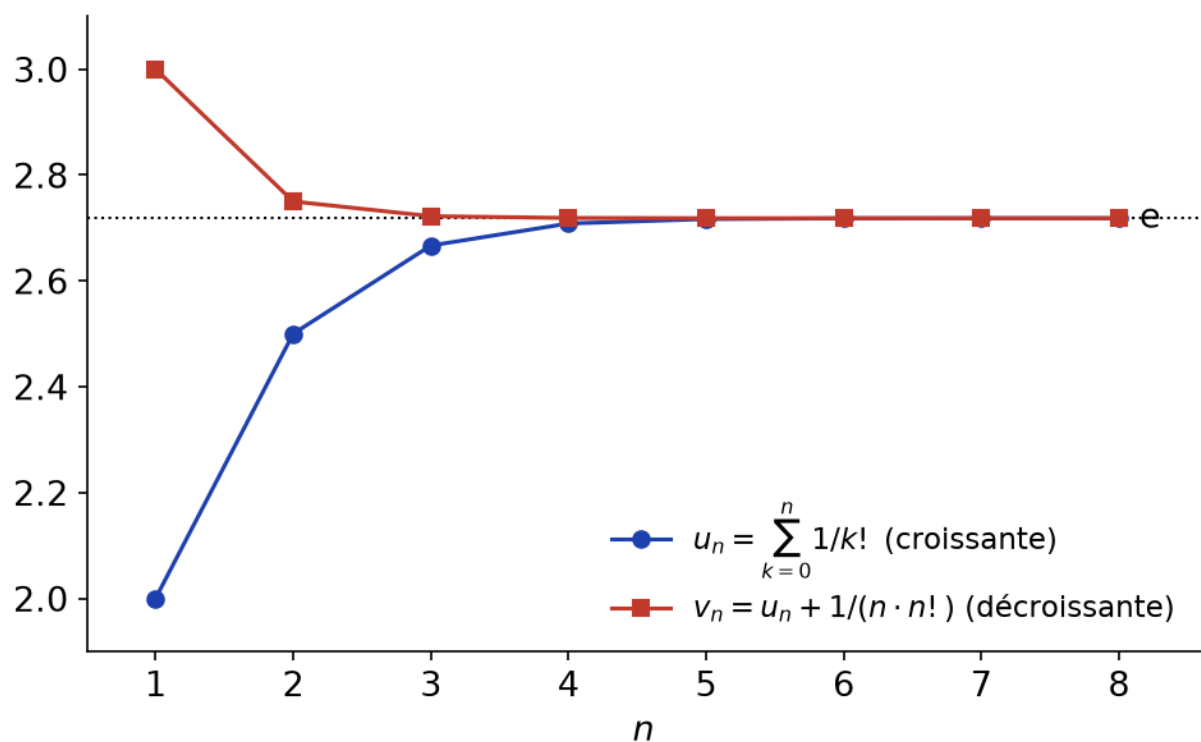
Méthode :

Pour montrer que deux suites sont adjacentes, on étudie le signe de $u_{n+1} - u_n$, puis celui de $v_{n+1} - v_n$, puis la limite de $v_n - u_n$. L'encadrement $u_n \leq \ell \leq v_n$ fournit alors gratuitement une valeur approchée de ℓ à $v_n - u_n$ près.

Exemple :

Posons $u_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n \cdot n!}$ pour $n \geq 1$. Clairement (u_n) croît.

Ensuite, un calcul donne $v_{n+1} - v_n = \frac{-1}{n(n+1)(n+1)!} < 0$. Enfin $v_n - u_n \rightarrow 0$. Les deux suites sont donc adjacentes. Leur limite commune est le nombre e , comme le suggère la figure ci-dessous.



VI. Suites extraites et théorème de Bolzano-Weierstrass

1. Suites extraites

Définition :

Une **suite extraite** (ou sous-suite) de (u_n) est une suite $(u_{\varphi(n)})$, où $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ est strictement croissante. On vérifie par récurrence que $\varphi(n) \geq n$ pour tout n .

Proposition :

Si (u_n) tend vers $\ell \in \bar{\mathbb{R}}$, alors toute suite extraite de (u_n) tend aussi vers ℓ .

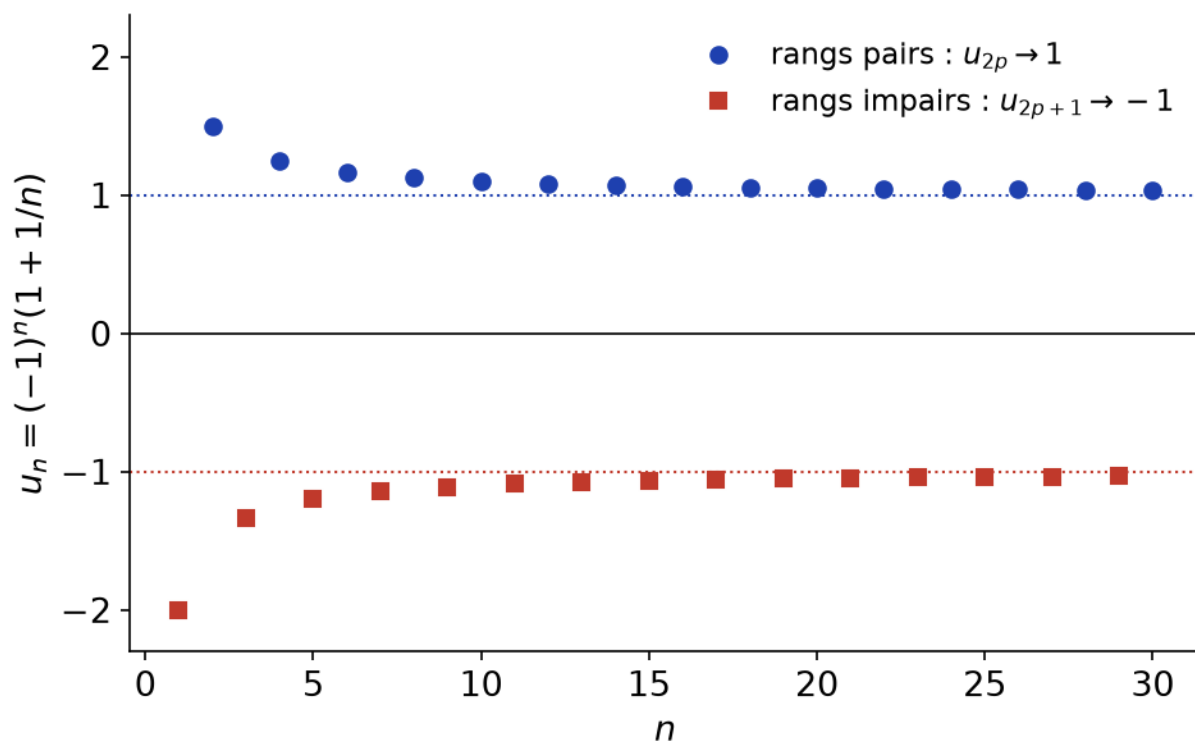
La preuve est immédiate : si $n \geq N$, alors $\varphi(n) \geq n \geq N$. Ce résultat s'utilise surtout par contraposée, pour prouver une divergence.

Méthode :

Pour montrer qu'une suite **diverge**, il suffit d'exhiber deux suites extraites qui ont des limites différentes, ou une suite extraite divergente.

Exemple :

Soit $u_n = (-1)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right)$. On a $u_{2p} \rightarrow 1$ et $u_{2p+1} \rightarrow -1$. Comme $1 \neq -1$, la suite (u_n) diverge. La figure ci-dessous sépare les deux suites extraites.



Proposition :

Si (u_{2n}) et (u_{2n+1}) tendent vers une même limite ℓ , alors (u_n) tend vers ℓ .

En effet, pour $\varepsilon > 0$, on trouve un rang N_1 pour les termes pairs et un rang N_2 pour les impairs. Ainsi, pour $n \geq \max(2N_1, 2N_2 + 1)$, on a $|u_n - \ell| \leq \varepsilon$.

2. Le théorème de Bolzano-Weierstrass

Théorème :

De toute suite réelle **bornée**, on peut extraire une suite convergente.

Démonstration :

On procède par dichotomie. Supposons $a_0 \leq u_n \leq b_0$ pour tout n . L'un des deux intervalles $[a_0, m]$ et $[m, b_0]$, où $m = \frac{a_0 + b_0}{2}$, contient u_n pour une infinité d'indices n . On le note $[a_1, b_1]$. En répétant l'opération, on obtient des suites (a_k) croissante et (b_k) décroissante, avec $b_k - a_k = \frac{b_0 - a_0}{2^k}$. Elles sont donc adjacentes et convergent vers un même ℓ . Ensuite, on choisit des indices $\varphi(0) < \varphi(1) < \dots$ avec $u_{\varphi(k)} \in [a_k, b_k]$, ce qui est possible car chaque intervalle contient une infinité de termes. Enfin, par encadrement, $u_{\varphi(k)} \rightarrow \ell$.

Remarque :

Une limite de suite extraite s'appelle une **valeur d'adhérence**. Le théorème affirme qu'une suite bornée en possède au moins une. Il est purement qualitatif : il ne dit pas quelle extraction choisir.

VII. Suites complexes

La définition de la convergence s'étend mot pour mot aux suites à valeurs dans $\mathbb{C}$, en remplaçant la valeur absolue par le module. Ainsi $z_n \rightarrow \ell$ signifie que $|z_n - \ell| \rightarrow 0$.

Proposition :

Une suite complexe (z_n) converge vers ℓ si et seulement si $\operatorname{Re}(z_n) \rightarrow \operatorname{Re}(\ell)$ et $\operatorname{Im}(z_n) \rightarrow \operatorname{Im}(\ell)$. Les opérations sur les limites, l'unicité et le caractère borné des suites convergentes restent valables. Le théorème de Bolzano-Weierstrass aussi : de toute suite complexe bornée, on extrait une suite convergente.

Démonstration :

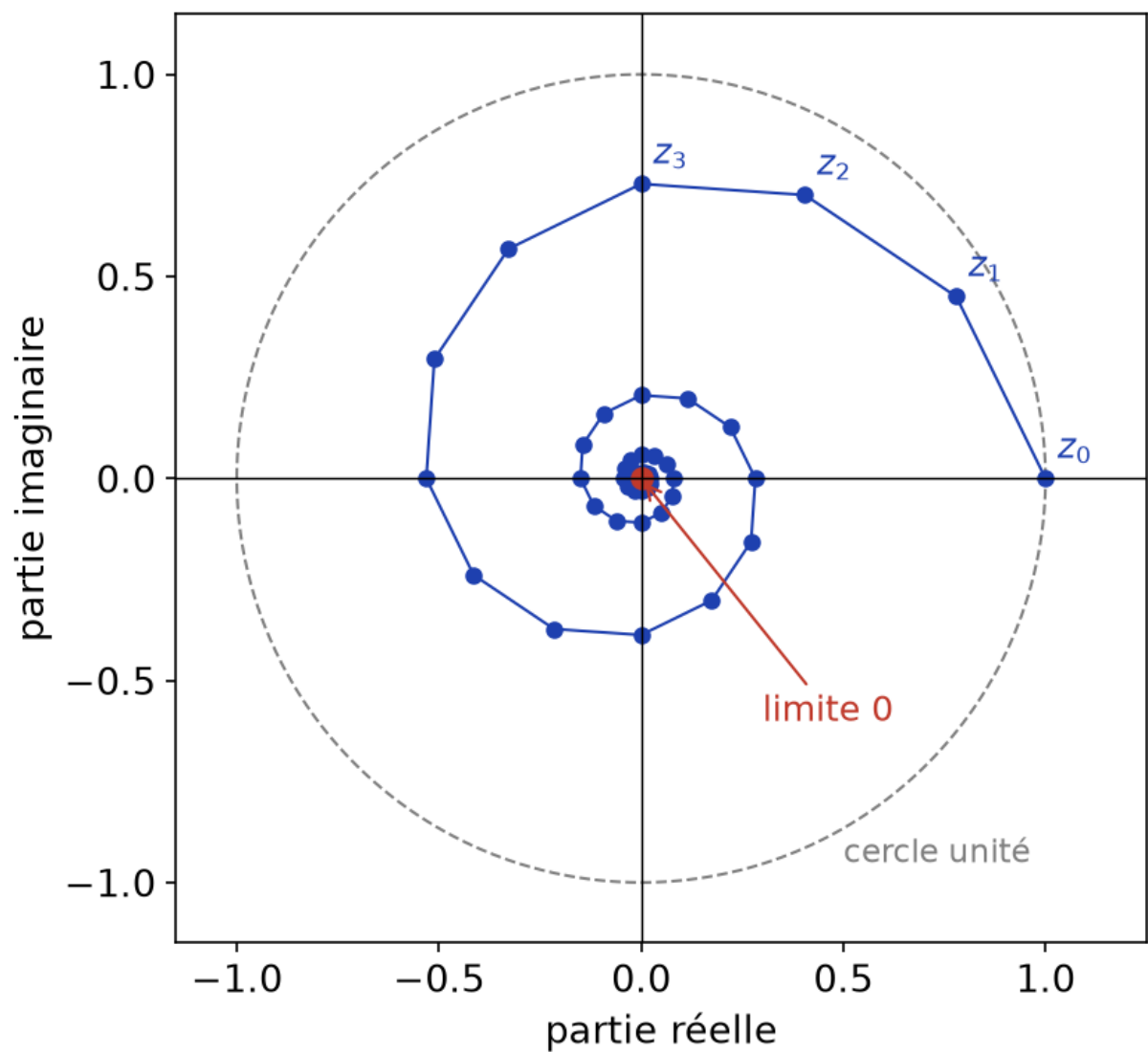
Il suffit d'écrire $\max(|\operatorname{Re}(z)|, |\operatorname{Im}(z)|) \leq |z| \leq |\operatorname{Re}(z)| + |\operatorname{Im}(z)|$ avec $z = z_n - \ell$, puis d'encadrer. Pour Bolzano-Weierstrass, on extrait d'abord une sous-suite dont la partie réelle converge. Ensuite, on extrait de celle-ci une nouvelle sous-suite dont la partie imaginaire converge.

Attention :

Il n'y a pas d'ordre sur $\mathbb{C}$. Par conséquent, les notions de suite monotone, de suite majorée, le théorème d'encadrement et le théorème de la limite monotone n'ont pas de sens pour une suite complexe. Seule la majoration du module a un sens.

Exemple :

Soit $q \in \mathbb{C}$ et $z_n = q^n$. Si $|q| < 1$, alors $|z_n| = |q|^n \rightarrow 0$, donc $z_n \rightarrow 0$. Pour $q = 0,9 e^{i\pi/6}$, les termes décrivent une spirale qui s'enroule vers l'origine, comme le montre la figure ci-dessous.



Si $|q| > 1$, le module tend vers $+\infty$ et la suite diverge. Enfin, si $|q| = 1$ et $q \neq 1$, la suite diverge encore. En effet, une limite ℓ vérifierait $\ell = q\ell$, donc $\ell = 0$, ce qui contredit $|z_n| = 1$.

VIII. Ce qu'il faut retenir

- Les irrationnels existent ($\sqrt{2}$) et tout réel est approché par ses décimaux $d_n = 10^{-n} \lfloor 10^n x \rfloor$ à 10^{-n} près.
- Toute partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure : c'est l'axiome qui distingue $\mathbb{R}$ de $\mathbb{Q}$.

- $M = \sup A$ si et seulement si M majore A et une suite d'éléments de A tend vers M .
- Les intervalles sont les parties sans trou ; $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sont denses, ce qui se traduit par des suites.
- La définition de la limite par ε et N donne l'unicité de la limite et le caractère borné des suites convergentes.
- Pour prouver une convergence, on majore $|u_n - \ell|$ par une suite qui tend vers 0 , ou l'on encadre.
- Une suite monotone a toujours une limite dans $\overline{\mathbb{R}}$; deux suites adjacentes ont une limite commune qu'elles encadrent.
- Deux suites extraites de limites distinctes prouvent la divergence ; une suite bornée possède une sous-suite convergente.
- Pour une suite complexe, on raisonne sur le module ou sur les parties réelle et imaginaire, jamais avec l'ordre.

Questions fréquentes sur nombres réels et suites

Quelle est la différence entre borne supérieure et maximum ?

Le maximum d'une partie A est un majorant qui appartient à A . La borne supérieure est le plus petit des majorants, et elle n'appartient pas forcément à A . Par exemple, $[0, 1[$ a pour borne supérieure 1 mais n'a pas de maximum. Si un maximum existe, il est égal à la borne supérieure.

Comment prouver qu'une suite diverge en maths sup ?

La méthode la plus efficace consiste à exhiber deux suites extraites de limites différentes, par exemple les termes de rang pair et ceux de rang impair. On peut aussi montrer que la suite n'est pas bornée, car toute suite convergente est bornée. Pour les cas délicats, comme $\sin n$, on raisonne par l'absurde à l'aide d'extractions bien choisies.

Faut-il savoir refaire la preuve du théorème de Bolzano-Weierstrass ?

Oui, elle est classique en colle. La preuve par dichotomie construit deux suites adjacentes de bornes d'intervalles contenant chacun une infinité de termes, puis extrait un terme dans chaque intervalle. Elle réutilise ainsi le théorème des suites adjacentes, donc la propriété de la borne supérieure.

Pourquoi la propriété de la borne supérieure est-elle si importante ?

C'est elle qui distingue $\mathbb{R}$ de $\mathbb{Q}$: dans $\mathbb{Q}$, la partie des rationnels de carré inférieur à 2 est majorée mais sans borne supérieure. Le théorème de la limite monotone, les suites adjacentes, Bolzano-Weierstrass et plus tard le théorème des valeurs intermédiaires en découlent tous.

Pour aller plus loin en maths sup

- Les énoncés : [exercices de maths sup sur nombres réels et suites](#)
- À maîtriser avant : [Logique, ensembles, applications et relations](#), [Calculs algébriques : sommes, produits, inégalités](#)
- Chapitre précédent : [Équations différentielles linéaires d'ordre 1 et 2](#)
- Chapitre suivant : [Suites particulières et suites récurrentes](#)
- Tester vos connaissances : [QCM de maths sup par chapitre](#)
- Le sommaire : [tous les chapitres de maths sup](#) et les [chapitres de maths spé](#)