

Nombres réels et suites

Corrigé de l'exercice 1 : Nombres irrationnels

1. Supposons par l'absurde $\sqrt{6} = \frac{p}{q}$, avec $p, q \in \mathbb{N}^*$ et la fraction irréductible. Alors $p^2 = 6q^2$, donc p^2 est pair. Par conséquent p est pair, car le carré d'un entier impair est impair. Écrivons $p = 2k$. On obtient $4k^2 = 6q^2$, soit $2k^2 = 3q^2$. Ainsi $3q^2$ est pair, donc q^2 est pair, et q est pair. Donc p et q sont tous deux pairs, ce qui contredit l'irréductibilité. **Le réel $\sqrt{6}$ est irrationnel.**
2. Supposons que $r = \sqrt{2} + \sqrt{3}$ soit rationnel. En élevant au carré, on obtient $r^2 = 2 + 2\sqrt{6} + 3 = 5 + 2\sqrt{6}$. Donc $\sqrt{6} = \frac{r^2 - 5}{2}$, qui serait rationnel comme combinaison de rationnels. C'est impossible d'après la question 1. **Ainsi $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ est irrationnel.**
3. Si $r + x = s$ était rationnel, alors $x = s - r$ serait rationnel, car $\mathbb{Q}$ est stable par différence. C'est absurde. De même, si $r \neq 0$ et $rx = s \in \mathbb{Q}$, alors $x = \frac{s}{r}$ serait rationnel. **Donc $r + x$ et rx (pour $r \neq 0$) sont irrationnels.**
4. Les réels $\sqrt{2}$ et $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ sont irrationnels d'après la question 3. Leur produit vaut $\sqrt{16} = 4$. Ensuite, $\sqrt{2}$ et $1 - \sqrt{2}$ sont irrationnels, toujours par la question 3, et leur somme vaut 1. **Le produit et la somme de deux irrationnels peuvent donc être rationnels.**

Point de méthode : pour montrer qu'un nombre est irrationnel, on raisonne presque toujours par l'absurde, en le supposant rationnel puis en se ramenant à un irrationnel connu.

Corrigé de l'exercice 2 : Partie entière et approximations

décimales

1. Par définition, $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$. En ajoutant m , on obtient $\lfloor x \rfloor + m \leq x + m < \lfloor x \rfloor + m + 1$. Or $\lfloor x \rfloor + m$ est un entier. Par unicité de la partie entière, $\lfloor x + m \rfloor = \lfloor x \rfloor + m$.
2. D'une part, $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq x + y$. C'est un entier inférieur à $x + y$, donc il est inférieur à $\lfloor x + y \rfloor$, qui est le plus grand de ces entiers. D'autre part, $x + y < \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 2$. Ainsi $\lfloor x + y \rfloor < \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 2$, et comme ce sont des entiers, $\lfloor x + y \rfloor \leq \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1$.
3. Posons $p_n = \lfloor 10^n x \rfloor$. L'entier $10 p_n$ vérifie $10 p_n \leq 10^{n+1} x$. Donc $10 p_n \leq p_{n+1}$, puisque p_{n+1} est le plus grand entier inférieur à $10^{n+1} x$. En divisant par 10^{n+1} , on obtient $d_n \leq d_{n+1}$. Ensuite, $10^{n+1} x < 10(p_n + 1)$, donc $p_{n+1} < 10 p_n + 10$. Comme ce sont des entiers, $p_{n+1} + 1 \leq 10 p_n + 10$. En divisant par 10^{n+1} , il vient $e_{n+1} \leq e_n$.
La suite (d_n) croît et la suite (e_n) décroît.
4. On a $e_n - d_n = 10^{-n} \rightarrow 0$. Avec la question 3, les suites sont donc adjacentes. Elles convergent vers une même limite ℓ . De plus, $d_n \leq x < e_n$ pour tout n . En passant à la limite dans ces inégalités larges, $\ell \leq x \leq \ell$. **Les deux suites convergent vers x .**
5. On a $\frac{22}{7} = 3,142857\dots$. En effet, $22 = 3 \times 7 + 1$, puis la division de 1 par 7 donne 0,142857... Ainsi $10^3 \times \frac{22}{7} = 3142,857\dots$. **Donc $d_0 = 3$, $d_1 = 3,1$, $d_2 = 3,14$ et $d_3 = 3,142$.**

Corrigé de l'exercice 3 : Bornes d'ensembles de réels

1. Pour $n = 2p$ pair, l'élément vaut $1 + \frac{1}{2^p}$, qui appartient à $]1, \frac{3}{2}]$. Pour $n = 2p + 1$ impair, il vaut $-1 + \frac{1}{2^{p+1}}$, qui appartient à $] -1, 0]$. Ainsi A est majoré par $\frac{3}{2}$, valeur atteinte pour $n = 2$. Donc $\max A = \sup A = \frac{3}{2}$. Ensuite, tous les éléments sont strictement supérieurs à -1 , donc A est minoré par -1 . De plus, la suite $-1 + \frac{1}{2^{p+1}}$ est formée d'éléments de A et tend vers -1 . Par caractérisation séquentielle, $\inf A = -1$. Enfin, $-1 \notin A$. **Ainsi $\sup A = \max A = \frac{3}{2}$, $\inf A = -1$ et A n'a pas de minimum.** La figure de l'énoncé montre bien les points de rang impair qui s'accroissent à droite de

-1.

2. Pour tous $n, m \geq 1$, on a $0 < \frac{1}{n} + \frac{1}{m} \leq 2$. La valeur 2 est atteinte pour $n = m = 1$, donc $\max B = \sup B = 2$. Ensuite, 0 minore B , et la suite $\frac{2}{n}$, obtenue avec $m = n$, est dans B et tend vers 0. Donc $\inf B = 0$. Comme tous les éléments sont strictement positifs, $0 \notin B$. **Ainsi $\sup B = \max B = 2$, $\inf B = 0$, sans minimum.**
3. D'abord, $0 \in C$, donc C est non vide. Ensuite, si $x \in C$, alors $x^2 < 2$, donc $|x| < \sqrt{2}$. Ainsi C est majoré par $\sqrt{2}$ et minoré par $-\sqrt{2}$. Considérons alors les approximations décimales par défaut d_n de $\sqrt{2}$. Elles sont rationnelles, donc différentes de $\sqrt{2}$. Par conséquent $1 \leq d_n < \sqrt{2}$, d'où $d_n^2 < 2$ et $d_n \in C$. Comme $d_n \rightarrow \sqrt{2}$, on obtient $\sup C = \sqrt{2}$. Par symétrie ($x \in C \Leftrightarrow -x \in C$), $\inf C = -\sqrt{2}$. Ces bornes sont irrationnelles, donc n'appartiennent pas à C . **Ainsi $\sup C = \sqrt{2}$, $\inf C = -\sqrt{2}$, et C n'a ni maximum ni minimum.**

Corrigé de l'exercice 4 : Bornes supérieures et opérations

1. La partie $A + B$ est non vide. De plus, pour $a \in A$ et $b \in B$, on a $a + b \leq \sup A + \sup B$. Elle est donc majorée et admet une borne supérieure. Ensuite, par caractérisation séquentielle, il existe $a_n \in A$ et $b_n \in B$ avec $a_n \rightarrow \sup A$ et $b_n \rightarrow \sup B$. La suite $(a_n + b_n)$ est à valeurs dans $A + B$ et tend vers $\sup A + \sup B$. Comme ce réel majore $A + B$, $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$.
2. Pour $a \in A$, on a $\lambda a \leq \lambda \sup A$, car $\lambda > 0$. De plus, $\lambda a_n \rightarrow \lambda \sup A$. Donc $\sup(\lambda A) = \lambda \sup A$. Ensuite, pour $a \in A$, $a \geq \inf A$, donc $-a \leq -\inf A$. Enfin, si $a'_n \in A$ tend vers $\inf A$, alors $-a'_n \in -A$ tend vers $-\inf A$. **Ainsi $\sup(\lambda A) = \lambda \sup A$ et $\sup(-A) = -\inf A$.**
3. Tout élément de A est dans B , donc est majoré par $\sup B$. Ainsi $\sup B$ est un majorant de A , et il est supérieur au plus petit d'entre eux. De même, $\inf B$ minore A . **Donc $\sup A \leq \sup B$ et $\inf B \leq \inf A$.**
4. Soit $a, b \in [-2, 1]$. Alors $|a| \leq 2$ et $|b| \leq 2$, donc $ab \leq |a||b| \leq 4$. De plus, $4 = (-2) \times (-2) \in AB$. Donc $\sup(AB) = \max(AB) = 4$. Or $\sup A \times \sup B = 1$. **On a $\sup(AB) = 4 \neq 1$: la formule du produit est fausse en général.**

Point de méthode : pour établir une égalité de bornes supérieures, on vérifie d'abord l'inégalité « majorant », puis on conclut par une suite d'éléments qui tend vers le candidat.

Corrigé de l'exercice 5 : Intervalles et droite achevée

- Soit I et J deux intervalles, et $x \leq y$ deux éléments de $I \cap J$. Comme I est un intervalle, $[x, y] \subset I$. De même, $[x, y] \subset J$. Donc $[x, y] \subset I \cap J$. **Par la caractérisation des intervalles, $I \cap J$ est un intervalle**, éventuellement vide.
- D'abord, $[0, 1] \cup [2, 3]$ contient 1 et 2, mais pas $\frac{3}{2}$: ce n'est pas un intervalle. Supposons maintenant qu'il existe $c \in I \cap J$. Soit $x \leq y$ dans $I \cup J$, et $z \in [x, y]$. Si x et y sont dans le même intervalle, c'est terminé. Supposons par exemple $x \in I$ et $y \in J$. Si $z \leq c$, alors $x \leq z \leq c$ avec $x, c \in I$, donc $z \in I$. Sinon, $c < z \leq y$ avec $c, y \in J$, donc $z \in J$. Le cas $x \in J$ et $y \in I$ est symétrique. **Ainsi $I \cup J$ est un intervalle dès que $I \cap J \neq \emptyset$.**
- On étudie F selon la position de x . Si $x \geq 1$, la condition s'écrit $2x \leq 4$, soit $x \leq 2$. Si $-1 \leq x \leq 1$, elle s'écrit $2 \leq 4$, toujours vraie. Enfin, si $x \leq -1$, elle s'écrit $-2x \leq 4$, soit $x \geq -2$. Donc $F = [-2, 2]$, qui est un intervalle. Pour G : si $x < 0$, alors $\frac{1}{x} < 0 < 1$; si $x > 0$, la condition équivaut à $x > 1$. Donc $G =]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[$. Ce n'est pas un intervalle, car $-1 \in G$ et $2 \in G$, mais $\frac{1}{2} \notin G$. **Seul F est un intervalle.**
- La partie H contient tous les entiers $n \geq 1$, donc elle n'est pas majorée : $\sup H = +\infty$. Ensuite, 0 minore H et $\frac{1}{n} \in H$ tend vers 0, donc $\inf H = 0$. Pour K , on écrit $n^2 - 10n = (n - 5)^2 - 25 \geq -25$, avec égalité pour $n = 5$. Enfin $n^2 - 10n \rightarrow +\infty$, donc K n'est pas majorée. **Ainsi $\sup H = +\infty$, $\inf H = 0$, $\sup K = +\infty$ et $\inf K = \min K = -25$.**

Corrigé de l'exercice 6 : Retour à la définition de la limite

- On calcule $u_n - 2 = \frac{2n+1-2n-6}{n+3} = \frac{-5}{n+3}$. Donc $|u_n - 2| = \frac{5}{n+3}$. Soit $\varepsilon > 0$ et $N = \left\lceil \frac{5}{\varepsilon} \right\rceil$. Pour $n \geq N$, on a $n+3 > \frac{5}{\varepsilon}$, donc $|u_n - 2| < \varepsilon$. Ainsi $u_n \rightarrow 2$.

Pour $\varepsilon = 10^{-3}$, la condition $\frac{5}{n+3} \leq 10^{-3}$ équivaut à $n + 3 \geq 5000$. **Le rang $N = 4997$ convient, et c'est le plus petit.**

- Pour $n \geq 4$, on a $n - 3 \geq 1$, donc $v_n = n(n - 3) \geq n$. Soit A un réel et $N = \max(4, \lceil A \rceil)$. Pour $n \geq N$, on obtient $v_n \geq n \geq A$. **Donc $v_n \rightarrow +\infty$.**
- Supposons que $(-1)^n \rightarrow \ell$. Avec $\varepsilon = \frac{1}{2}$, il existe N tel que $|(-1)^n - \ell| \leq \frac{1}{2}$ pour $n \geq N$. En prenant $n = 2N$ puis $n = 2N + 1$, on obtient $|1 - \ell| \leq \frac{1}{2}$ et $|-1 - \ell| \leq \frac{1}{2}$. Par l'inégalité triangulaire, $2 = |1 - (-1)| \leq |1 - \ell| + |\ell + 1| \leq 1$. C'est absurde. **La suite $((-1)^n)$ diverge.**
- Appliquons la définition avec $\varepsilon = \frac{\ell}{2} > 0$. Il existe N tel que, pour $n \geq N$, $|w_n - \ell| \leq \frac{\ell}{2}$. En particulier $w_n \geq \ell - \frac{\ell}{2} = \frac{\ell}{2}$. Pour obtenir l'inégalité stricte, on prend plutôt $\varepsilon = \frac{\ell}{3}$: alors $w_n \geq \frac{2\ell}{3} > \frac{\ell}{2}$. **Donc $w_n > \frac{\ell}{2}$ à partir d'un certain rang.**

Corrigé de l'exercice 7 : Calculs de limites

- On multiplie par la quantité conjuguée :

$$a_n = \frac{(n^2 + 3n) - (n^2 + 1)}{\sqrt{n^2 + 3n} + \sqrt{n^2 + 1}} = \frac{3 - 1/n}{\sqrt{1 + 3/n} + \sqrt{1 + 1/n^2}}.$$

Le numérateur tend vers 3 et le dénominateur vers 2. **Donc $a_n \rightarrow \frac{3}{2}$.**

- En divisant par n^2 , on obtient $b_n = \frac{1 + (-1)^n/n}{2 + 1/n^2}$. Or $\left| \frac{(-1)^n}{n} \right| = \frac{1}{n} \rightarrow 0$. **Donc $b_n \rightarrow \frac{1}{2}$.**

- En divisant par 3^n , on obtient $c_n = \frac{1 - (2/3)^n}{1 + (2/3)^n}$. Comme $0 < \frac{2}{3} < 1$, on a $\left(\frac{2}{3}\right)^n \rightarrow 0$. **Donc $c_n \rightarrow 1$.**

- On écrit $d_n = \exp\left(\frac{\ln n}{n}\right)$. Par croissances comparées, $\frac{\ln n}{n} \rightarrow 0$. Ensuite, par continuité de l'exponentielle en 0, $d_n \rightarrow 1$.

- On écrit $e_n = \exp(n \ln(1 + 1/n))$. Posons $h = \frac{1}{n}$. Alors $n \ln(1 + 1/n) = \frac{\ln(1 + h)}{h}$,

qui tend vers la dérivée de $\ln$ en 1, c'est-à-dire 1. **Donc** $e_n \rightarrow e$.

Corrigé de l'exercice 8 : Encadrements et majorations de l'écart

1. Pour $1 \leq k \leq n$, on a $n^2 + 1 \leq n^2 + k \leq n^2 + n$. Donc $\frac{n}{n^2 + n} \leq \frac{n}{n^2 + k} \leq \frac{n}{n^2 + 1}$. En sommant ces n inégalités, on obtient :

$$1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1} \leq u_n \leq \frac{n^2}{n^2 + 1} \leq 1.$$

Ainsi $0 \leq 1 - u_n \leq \frac{1}{n+1}$. **Donc** $|u_n - 1| \leq \frac{1}{n+1}$ et $u_n \rightarrow 1$.

2. Pour tout k , on a $kx - 1 < \lfloor kx \rfloor \leq kx$. En sommant pour k de 1 à n , et avec $\sum k = \frac{n(n+1)}{2}$, on obtient :

$$x \frac{n(n+1)}{2} - n < \sum_{k=1}^n \lfloor kx \rfloor \leq x \frac{n(n+1)}{2}.$$

En divisant par n^2 puis en retranchant $\frac{x}{2}$, il vient $\frac{x}{2n} - \frac{1}{n} < t_n - \frac{x}{2} \leq \frac{x}{2n}$. Ainsi

$$\left| t_n - \frac{x}{2} \right| \leq \frac{|x|}{2n} + \frac{1}{n}. \text{ **Donc** } \left| t_n - \frac{x}{2} \right| \leq \frac{1 + |x|/2}{n} \text{ et } t_n \rightarrow \frac{x}{2}.$$

3. On écrit $s_n = \frac{1}{n} \times \frac{2}{n} \times \dots \times \frac{n}{n}$. Chaque facteur $\frac{k}{n}$ est dans $]0, 1]$. Donc le produit des $n - 1$ derniers facteurs est dans $]0, 1]$. Ainsi $0 < s_n \leq \frac{1}{n}$. **Par encadrement**, $s_n \rightarrow 0$.

4. Par la quantité conjuguée, $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$. Ce nombre est strictement positif. De plus, le dénominateur est supérieur à $2\sqrt{n}$. **Donc** $0 < \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \leq \frac{1}{2\sqrt{n}}$, et cette différence tend vers 0.

Point de méthode : une majoration de la forme $|u_n - \ell| \leq v_n$ donne à la fois la convergence et une vitesse. C'est plus précis qu'un simple calcul de limite.

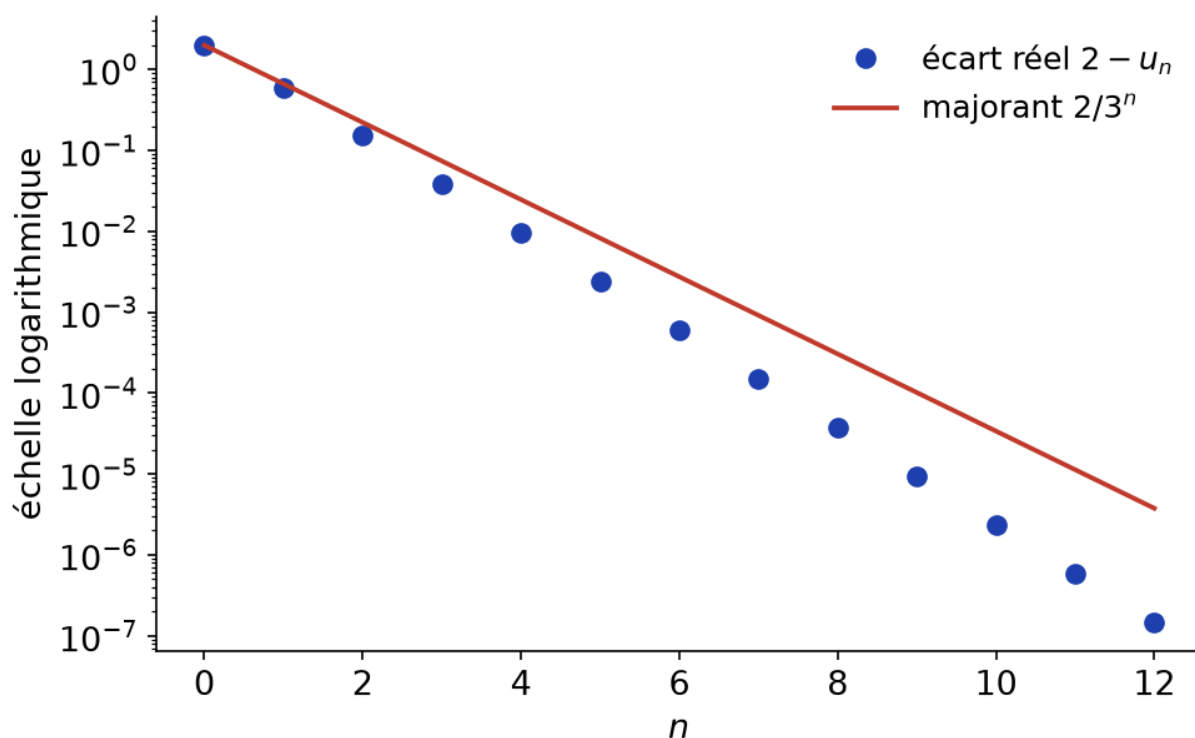
Corrigé de l'exercice 9 : Suite récurrente et vitesse de convergence

1. Raisonnons par récurrence. Pour $n = 0$, on a $0 \leq 0 < 2$. Supposons $0 \leq u_n < 2$. Alors $2 + u_n \geq 0$, donc u_{n+1} est bien défini et positif. De plus, $2 + u_n < 4$, donc $u_{n+1} < \sqrt{4} = 2$ par stricte croissance de la racine carrée. **Ainsi** $0 \leq u_n < 2$ **pour tout** n .
2. On calcule $u_{n+1}^2 - u_n^2 = 2 + u_n - u_n^2 = (2 - u_n)(1 + u_n)$. D'après la question 1, les deux facteurs sont strictement positifs. Donc $u_{n+1}^2 > u_n^2$. Comme u_n et u_{n+1} sont positifs, on en déduit $u_{n+1} > u_n$. **La suite est strictement croissante.**
3. La suite est croissante et majorée par 2. Par le théorème de la limite monotone, elle converge vers un réel $\ell \in [0, 2]$. Ensuite, $u_{n+1}^2 = 2 + u_n$. En passant à la limite, $\ell^2 = 2 + \ell$, soit $(\ell - 2)(\ell + 1) = 0$. Comme $\ell \geq 0$, **la limite vaut** $\ell = 2$.
4. On calcule, avec la quantité conjuguée :

$$2 - u_{n+1} = \frac{4 - (2 + u_n)}{2 + \sqrt{2 + u_n}} = \frac{2 - u_n}{2 + u_{n+1}}.$$

Or $u_{n+1} \geq u_1 = \sqrt{2} > 1$, par croissance. Donc $2 + u_{n+1} \geq 3$, et $2 - u_{n+1} \leq \frac{2 - u_n}{3}$. Par récurrence immédiate, $2 - u_n \leq \frac{2 - u_0}{3^n} = \frac{2}{3^n}$. La positivité vient de la question 1. **Ainsi** $0 < 2 - u_n \leq \frac{2}{3^n}$.

5. Il suffit que $\frac{2}{3^n} \leq 10^{-6}$, soit $3^n \geq 2 \times 10^6$. Or $3^{13} = 1\,594\,323$ et $3^{14} = 4\,782\,969$. **Dès que** $n \geq 14$, u_n **approche** 2 à 10^{-6} **près**. La figure ci-dessous compare l'écart réel au majorant obtenu : la majoration est un peu pessimiste, mais elle a le mérite d'être démontrée.



Point de méthode : la limite monotone fournit la convergence, qualitative ; la majoration géométrique fournit la vitesse, quantitative. Les deux étapes sont distinctes.

Corrigé de l'exercice 10 : Limite monotone et deux sommes classiques

1. Pour $k \geq 2$, on a $\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} = \frac{1}{k(k-1)} \geq \frac{1}{k^2}$, car $k(k-1) \leq k^2$. En sommant de $k = 2$ à n , la somme télescopique donne :

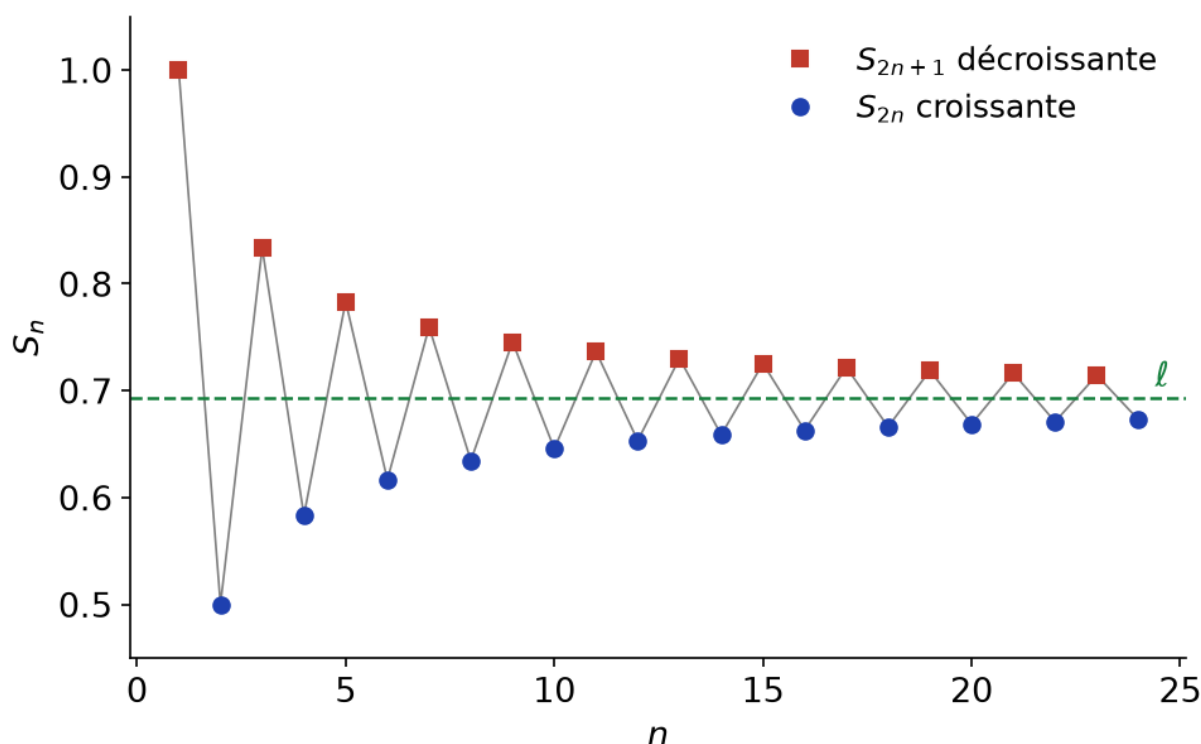
$$S_n \leq 1 + \sum_{k=2}^n \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) = 1 + 1 - \frac{1}{n} = 2 - \frac{1}{n} < 2.$$

Ensuite, $S_{n+1} - S_n = \frac{1}{(n+1)^2} > 0$, donc (S_n) croît. Elle est majorée par 2, donc elle converge vers $\sigma \leq 2$ par limite monotone. Enfin, par croissance, $S_n \geq S_2 = \frac{5}{4}$ pour $n \geq 2$. En passant à la limite, $\sigma \geq \frac{5}{4}$. **Donc (S_n) converge et $\frac{5}{4} \leq \sigma \leq 2$.**

2. La somme $H_{2n} - H_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$ comporte n termes, chacun supérieur à $\frac{1}{2n}$. Donc $H_{2n} - H_n \geq \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$. Or (H_n) est croissante. Si elle convergeait vers L , la suite extraite (H_{2n}) tendrait aussi vers L , et $H_{2n} - H_n \rightarrow 0$. C'est contradictoire avec la minoration par $\frac{1}{2}$. Ainsi (H_n) est croissante et diverge. Par le théorème de la limite monotone, elle n'est pas majorée. **Donc** $H_n \rightarrow +\infty$.
3. Raisonnons par récurrence sur p . Pour $p = 0$, $H_1 = 1$. Supposons $H_{2^p} \geq 1 + \frac{p}{2}$. En appliquant la question 2 avec $n = 2^p$, on obtient $H_{2^{p+1}} \geq H_{2^p} + \frac{1}{2} \geq 1 + \frac{p+1}{2}$. Pour avoir $H_n \geq 10$, il suffit donc que $1 + \frac{p}{2} \geq 10$, soit $p = 18$. **L'entier** $n = 2^{18} = 262\,144$ **convient**. Cette divergence est donc très lente.

Corrigé de l'exercice 11 : Série harmonique alternée et suites adjacentes

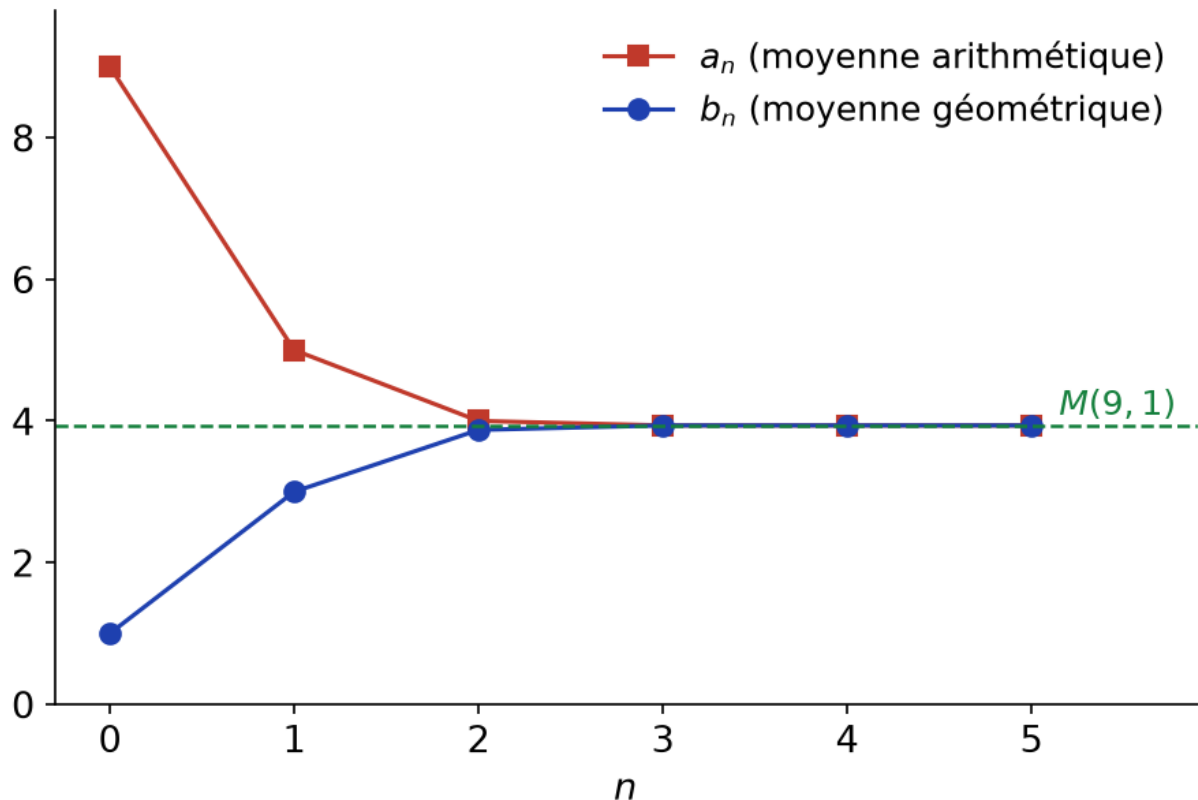
1. On calcule d'abord $a_{n+1} - a_n = S_{2n+2} - S_{2n} = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} > 0$. Donc (a_n) est croissante. Ensuite, $b_{n+1} - b_n = S_{2n+3} - S_{2n+1} = -\frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+3} < 0$. Donc (b_n) est décroissante. Enfin, $b_n - a_n = \frac{1}{2n+1} \rightarrow 0$. **Les suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes.**
2. Deux suites adjacentes convergent vers une même limite ℓ . Ainsi les suites extraites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) tendent toutes deux vers ℓ . D'après le cours, **la suite (S_n) converge vers ℓ .**
3. Le théorème des suites adjacentes donne $a_n \leq \ell \leq b_n$ pour tout n . Avec $n = 2$, on calcule $a_2 = S_4 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{7}{12}$ et $b_2 = S_5 = \frac{7}{12} + \frac{1}{5} = \frac{47}{60}$. Donc $\frac{7}{12} \leq \ell \leq \frac{47}{60}$. Passons à l'écart. Si $n = 2m$, alors $S_{2m} \leq \ell \leq S_{2m+1}$, donc $|S_n - \ell| \leq S_{2m+1} - S_{2m} = \frac{1}{n+1}$. Si $n = 2m+1$, alors $S_{2m+2} \leq \ell \leq S_{2m+1}$, donc $|S_n - \ell| \leq S_{2m+1} - S_{2m+2} = \frac{1}{2m+2} = \frac{1}{n+1}$. **Ainsi $|S_n - \ell| \leq \frac{1}{n+1}$ pour tout n .**
4. Il suffit que $\frac{1}{n+1} \leq 10^{-3}$, c'est-à-dire $n \geq 999$. **La somme des 999 premiers termes donne ℓ à 10^{-3} près.** La figure ci-dessous montre les sommes partielles de rang pair qui montent et celles de rang impair qui descendent vers ℓ . On montre plus tard que $\ell = \ln 2$.



Corrigé de l'exercice 12 : Moyenne arithmético-géométrique

- Pour $x, y > 0$, on a $\frac{x+y}{2} - \sqrt{xy} = \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2}{2} \geq 0$. Montrons ensuite par récurrence que a_n et b_n sont définis et strictement positifs. C'est vrai au rang 0. Si c'est vrai au rang n , alors $a_{n+1} > 0$, et $a_n b_n > 0$, donc b_{n+1} est défini et strictement positif. Enfin, $b_0 \leq a_0$ par hypothèse, et pour $n \geq 0$, l'inégalité précédente donne $b_{n+1} \leq a_{n+1}$. **Les suites sont bien définies, strictement positives, et $b_n \leq a_n$ pour tout n .**
- Comme $b_n \leq a_n$, on a $a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \leq \frac{a_n + a_n}{2} = a_n$. De même, $b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} \geq \sqrt{b_n b_n} = b_n$. **Donc (a_n) décroît et (b_n) croît.**
- Comme $b_{n+1} \geq b_n$, on a $a_{n+1} - b_{n+1} \leq a_{n+1} - b_n = \frac{a_n - b_n}{2}$. Par récurrence, on en déduit $a_n - b_n \leq \frac{a_0 - b_0}{2^n}$. La positivité vient de la question 1. **Donc $0 \leq a_n - b_n \leq \frac{a - b}{2^n}$.**
- Les suites sont monotones de sens contraires et leur différence tend vers 0, par encadrement. Elles sont donc adjacentes. **Elles convergent vers une limite commune $M(a, b)$, qui vérifie $b_n \leq M(a, b) \leq a_n$ pour tout n .**
- Avec $a = 9$ et $b = 1$, on trouve $a_1 = 5$ et $b_1 = \sqrt{9} = 3$. Ensuite, $a_2 = 4$ et

$b_2 = \sqrt{15}$. Comme $3,87^2 = 14,9769 < 15$, on a $\sqrt{15} > 3,87$. **Donc**
 $3,87 < \sqrt{15} \leq M(9, 1) \leq 4$, **encadrement d'amplitude inférieure à 0,13**. En réalité, la convergence est bien plus rapide que $\frac{1}{2^n}$, comme le montre la figure ci-dessous : $a_3 \approx 3,9365$ et $b_3 \approx 3,9360$.



Point de méthode : pour une récurrence double, on établit d'abord l'ordre entre les deux suites. Les monotonies en découlent alors en une ligne.

Corrigé de l'exercice 13 : Divergence par suites extraites

- On a $u_{6p} = \cos(2p\pi) = 1$ et $u_{6p+3} = \cos((2p+1)\pi) = -1$. Ces deux suites extraites sont constantes, de limites 1 et -1 distinctes. **Donc** (u_n) **diverge**.
- On a $v_{2p} = \frac{2p}{2p+1} \rightarrow 1$ et $v_{2p+1} = -\frac{2p+1}{2p+2} \rightarrow -1$. **Les limites diffèrent, donc** (v_n) **diverge**.

3. Supposons que $\sin n \rightarrow \ell$.

1. La formule $\sin p - \sin q = 2\cos\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}$ donne
 $\sin(n+1) - \sin(n-1) = 2\cos n \sin 1$. Or les suites $(\sin(n+1))$ et $(\sin(n-1))$ tendent vers ℓ , car ce sont des décalées de $(\sin n)$. Donc $2\cos n \sin 1 \rightarrow 0$. Comme $\sin 1 \neq 0$, puisque $0 < 1 < \pi$, **on obtient** $\cos n \rightarrow 0$.
2. La suite $(\sin 2n)$ est extraite de $(\sin n)$, avec $\varphi(n) = 2n$. Elle tend donc vers ℓ .
Mais $\sin 2n = 2\sin n \cos n \rightarrow 2\ell \times 0 = 0$. Par unicité de la limite, $\ell = 0$.
3. On aurait alors $1 = \sin^2 n + \cos^2 n \rightarrow 0 + 0 = 0$, ce qui est absurde. **La suite $(\sin n)$ diverge.**

4. Pour $n = 2p$, on a $x_{2p} = \frac{1}{2p}$. Donc (x_n) n'est pas majorée, ni bornée. Pour $n = 2p+1$, on a $x_{2p+1} = \frac{1}{2p+1} \rightarrow 0$. Si (x_n) tendait vers $+\infty$, cette suite extraite tendrait aussi vers $+\infty$. **Donc (x_n) n'est pas bornée et ne tend pas vers $+\infty$.**

Point de méthode : pour prouver une divergence, on cherche deux suites extraites de limites différentes. Lorsque c'est impossible à expliciter, comme pour $\sin n$, on raisonne par l'absurde avec des extractions bien choisies.

Corrigé de l'exercice 14 : Suites extraites paires, impaires et multiples de 3

1. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe N_1 tel que $|u_{2p} - \ell| \leq \varepsilon$ pour $p \geq N_1$. De même, il existe N_2 tel que $|u_{2p+1} - \ell| \leq \varepsilon$ pour $p \geq N_2$. Posons $N = \max(2N_1, 2N_2 + 1)$. Soit $n \geq N$. Si $n = 2p$, alors $p \geq N_1$. Si $n = 2p+1$, alors $p \geq N_2$. Dans les deux cas, $|u_n - \ell| \leq \varepsilon$. **Donc $u_n \rightarrow \ell$.**
2. Notons ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 les limites de (u_{2n}) , (u_{2n+1}) et (u_{3n}) . La suite (u_{6n}) est extraite à la fois de (u_{2n}) et de (u_{3n}) . Elle tend donc vers ℓ_1 et vers ℓ_3 , d'où $\ell_1 = \ell_3$. De même, (u_{6n+3}) est extraite de (u_{2n+1}) , car $6n+3 = 2(3n+1) + 1$. Elle est aussi extraite de (u_{3n}) , car $6n+3 = 3(2n+1)$. Donc $\ell_2 = \ell_3$. Ainsi

$\ell_1 = \ell_2$. Par la question 1, (u_n) converge.

3. Posons $u_n = 1$ si n n'est divisible ni par 2 ni par 3, et $u_n = 0$ sinon. Alors $u_{2n} = 0$ et $u_{3n} = 0$ pour tout n : ces suites extraites convergent. Pourtant $u_{6n+1} = 1$ pour tout n , tandis que $u_{6n} = 0$. **Cette suite diverge, alors que (u_{2n}) et (u_{3n}) convergent.**
4. Soit (u_n) croissante et $(u_{\varphi(n)})$ une suite extraite qui converge vers ℓ . Cette suite extraite est croissante, donc $u_{\varphi(n)} \leq \ell$ pour tout n . Ensuite, comme $\varphi(n) \geq n$, la croissance donne $u_n \leq u_{\varphi(n)} \leq \ell$. Ainsi (u_n) est croissante et majorée. **Par limite monotone, (u_n) converge, et sa limite est ℓ .**

Corrigé de l'exercice 15 : Densité des nombres dyadiques et des irrationnels

1. Le nombre $p = \lfloor 2^n x \rfloor$ est un entier relatif, donc $a_n = \frac{p}{2^n} \in \mathcal{D}$. Ensuite, $p \leq 2^n x < p + 1$. En divisant par 2^n , on obtient $a_n \leq x < a_n + \frac{1}{2^n}$, donc $|a_n - x| < \frac{1}{2^n}$. Ainsi $a_n \rightarrow x$. Tout réel est donc limite d'une suite d'éléments de $\mathcal{D}$. **Par la caractérisation séquentielle de la densité, $\mathcal{D}$ est dense dans $\mathbb{R}$.**
2. Par la propriété d'Archimède, il existe n tel que $2^n > \frac{1}{b-a}$, car $2^n \geq n$. Posons $r = \frac{\lfloor 2^n a \rfloor + 1}{2^n}$. Comme $\lfloor 2^n a \rfloor \leq 2^n a < \lfloor 2^n a \rfloor + 1$, on a $a < r \leq a + \frac{1}{2^n}$. **Donc $r \in \mathcal{D}$ et $a < r < b$.**
3. Si $\frac{1}{3} = \frac{p}{2^n}$, alors $2^n = 3p$, donc 3 divise 2^n . C'est impossible, car 2 est le seul facteur premier de 2^n . Donc $\frac{1}{3} \notin \mathcal{D}$, et $\mathcal{D} \neq \mathbb{Q}$. Ensuite, $\frac{\sqrt{2}}{2^{n+1}}$ est le produit d'un rationnel non nul par un irrationnel : il est irrationnel. Ajouté au rationnel a_n , il donne un irrationnel c_n . Enfin, $|c_n - x| \leq |a_n - x| + \frac{\sqrt{2}}{2^{n+1}} \leq \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^n}$, qui tend vers 0. **Tout réel est limite d'une suite d'irrationnels : $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.**
4. Soit x un réel. Pour $n \geq 1$, l'intervalle $\left] x - \frac{1}{n}, x - \frac{1}{n+1} \right[$ est non vide. Par densité de $\mathbb{Q}$, il contient un rationnel r_n . Alors $r_n < x - \frac{1}{n+1} < r_{n+1}$, donc la suite est strictement croissante. De plus, $|r_n - x| < \frac{1}{n}$. **La suite (r_n) est strictement croissante, rationnelle, et tend vers x .**

Corrigé de l'exercice 16 : Caractérisation séquentielle de la borne supérieure

1. Pour $n, m \geq 1$, on a $\frac{1}{n} - \frac{1}{m} < \frac{1}{n} \leq 1$. Donc 1 majore E et n'est jamais atteint. Ensuite, avec $n = 1$, la suite $1 - \frac{1}{m}$ est dans E et tend vers 1. Donc $\sup E = 1$. Enfin, E est symétrique : échanger n et m change l'élément en son opposé. Donc $\inf E = -\sup E = -1$, non atteint. **Ainsi $\sup E = 1$ et $\inf E = -1$, et aucune de ces bornes n'est atteinte.**
2. D'abord, $0 \in C$. Ensuite, si $x \in C$, alors $x^3 < 2 < 8$, donc $x < 2$ par stricte croissance de $t \rightarrow t^3$. Ainsi C est non vide et majoré : il admet une borne supérieure. Posons $\alpha = \sqrt[3]{2}$. Si $x \in C$, alors $x^3 < \alpha^3$, donc $x < \alpha$: α majore C . Soit d_n l'approximation décimale par défaut de α à 10^{-n} , et $r_n = d_n - 10^{-n}$. Alors r_n est rationnel et $r_n < d_n \leq \alpha$. Donc $r_n^3 < 2$ et $r_n \in C$. Enfin, $r_n \rightarrow \alpha$, car $d_n \rightarrow \alpha$. **Par caractérisation séquentielle, $\sup C = \sqrt[3]{2}$.**
3. Pour $x \in]0, 1[$, on a $x + \frac{1}{x} - 2 = \frac{(x-1)^2}{x} > 0$. Donc 2 minore F , sans être atteint. De plus, avec $x_n = 1 - \frac{1}{n+1}$, qui tend vers 1, on obtient $x_n + \frac{1}{x_n} \rightarrow 2$. Donc $\inf F = 2$. Ensuite, avec $x = \frac{1}{n}$ pour $n \geq 2$, on obtient $\frac{1}{n} + n \geq n$. Ainsi F n'est pas majorée. **Donc $\inf F = 2$ et $\sup F = +\infty$ dans $\mathbb{R}$.**
4. On construit la suite par récurrence. Comme $M \notin A$, tout élément de A est strictement inférieur à M . On choisit $a_0 \in A$ avec $a_0 > M - 1$. Supposons a_n construit. Le réel $m_n = \max\left(a_n, M - \frac{1}{n+2}\right)$ est strictement inférieur à M . Ce n'est donc pas un majorant de A . Il existe alors $a_{n+1} \in A$ avec $a_{n+1} > m_n$. Ainsi $a_{n+1} > a_n$ et $M - \frac{1}{n+2} < a_{n+1} < M$. **La suite (a_n) est strictement croissante, à valeurs dans A , et converge vers M par encadrement.**

Corrigé de l'exercice 17 : Suites complexes

1. On calcule $z_1 = 2(1+i) = 2+2i$. Ensuite, $z_2 = (1+i)^2 = 2i$. Puis $z_3 = \frac{1+i}{2} \times 2i = i-1$. Enfin, $z_4 = \frac{(1+i)(-1+i)}{2} = \frac{-1+i-i-1}{2} = -1$. **Ainsi $z_1 = 2+2i$, $z_2 = 2i$, $z_3 = -1+i$ et $z_4 = -1$, conformément à la figure de l'énoncé.**

2. La suite est géométrique de raison $q = \frac{1+i}{2}$, de module $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Donc $z_n = 4q^n$ et $|z_n| = 4\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n = 4 \times 2^{-n/2}$. Comme $\frac{\sqrt{2}}{2} < 1$, on a $|z_n - 0| \rightarrow 0$. **Donc** $z_n \rightarrow 0$.
3. La condition $4 \times 2^{-n/2} \leq 10^{-3}$ équivaut à $2^{n/2} \geq 4000$. Or $2^{12} = 4096 \geq 4000$, tandis que $2^{11,5} = 2048\sqrt{2} \approx 2896 < 4000$. La suite $|z_n|$ est décroissante. **Le plus petit rang est** $n = 24$.
4. On calcule $w_n - 2i = \frac{n + 2in^2 - 2in^2 - 2i^2}{n^2 + i} = \frac{n + 2}{n^2 + i}$. Or $|n^2 + i| = \sqrt{n^4 + 1} \geq n^2$. Donc $|w_n - 2i| \leq \frac{n+2}{n^2} = \frac{1}{n} + \frac{2}{n^2}$, qui tend vers 0. **Ainsi** $w_n \rightarrow 2i$.
5. Posons $q = e^{i\theta}$, qui est différent de 1 puisque $\theta \notin 2\pi\mathbb{Z}$. Supposons que $q^n \rightarrow \ell$. Alors $q^{n+1} \rightarrow \ell$, mais aussi $q^{n+1} = q \cdot q^n \rightarrow q\ell$. Par unicité, $\ell = q\ell$, donc $\ell = 0$ car $q \neq 1$. Or $||q^n| - |\ell|| \leq |q^n - \ell|$, donc $|q^n| \rightarrow |\ell| = 0$. C'est absurde, car $|q^n| = 1$. **La suite** $(e^{in\theta})$ **diverge**.

Corrigé de l'exercice 18 : Valeur d'adhérence unique et Bolzano-Weierstrass

1. Nier « $u_n \rightarrow \ell$ » donne : il existe $\varepsilon > 0$ tel que, pour tout N , il existe $n \geq N$ avec $|u_n - \ell| > \varepsilon$. Construisons φ par récurrence. On choisit $\varphi(0) \geq 0$ avec $|u_{\varphi(0)} - \ell| > \varepsilon$. Ensuite, $\varphi(n)$ étant construit, on applique la négation avec $N = \varphi(n) + 1$. On obtient $\varphi(n+1) > \varphi(n)$ avec $|u_{\varphi(n+1)} - \ell| > \varepsilon$. **L'application φ est strictement croissante et $|u_{\varphi(n)} - \ell| > \varepsilon$ pour tout n .**
2. La suite $(u_{\varphi(n)})$ est bornée, comme (u_n) . Par le théorème de Bolzano-Weierstrass, elle admet une suite extraite $(u_{\varphi(\psi(n))})$ qui converge vers un réel ℓ' . C'est aussi une suite extraite convergente de (u_n) , car $\varphi \circ \psi$ est strictement croissante. Par hypothèse, $\ell' = \ell$. Mais $|u_{\varphi(\psi(n))} - \ell| > \varepsilon$ pour tout n . En passant à la limite, $|\ell' - \ell| \geq \varepsilon > 0$. C'est contradictoire. **Donc** (u_n) **converge vers ℓ .**
3. Soit $(x_{\varphi(n)})$ une suite extraite convergente. Elle est bornée, disons par K . Si $\varphi(n)$ était pair pour une infinité d'indices, on aurait $x_{\varphi(n)} = \varphi(n) \geq n$ pour une infinité de n . Cela contredirait la borne K . Donc $\varphi(n)$ est impair à partir d'un certain rang, et alors $0 < x_{\varphi(n)} = \frac{1}{\varphi(n)} \leq \frac{1}{n}$. Ainsi toute suite extraite convergente tend vers 0. Pourtant (x_n) n'est pas bornée, donc elle diverge. **L'hypothèse « (u_n) bornée » est indispensable.**

Point de méthode : Bolzano-Weierstrass s'utilise très souvent par l'absurde. On isole une suite extraite « mauvaise », on en extrait une sous-suite convergente, puis on obtient une contradiction.

Corrigé de l'exercice 19 : Moyennes de Cesàro

1. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe N tel que $|u_k - \ell| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ pour $k > N$. Pour $n > N$, on découpe la somme :

$$|c_n - \ell| \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^N |u_k - \ell| + \frac{1}{n} \sum_{k=N+1}^n |u_k - \ell| \leq \frac{C_N}{n} + \frac{\varepsilon}{2},$$

où $C_N = \sum_{k=1}^N |u_k - \ell|$ ne dépend pas de n . Ensuite, il existe $N' \geq N$ tel que $\frac{C_N}{n} \leq \frac{\varepsilon}{2}$ pour $n \geq N'$. Alors $|c_n - \ell| \leq \varepsilon$ pour $n \geq N'$. **Donc** $c_n \rightarrow \ell$.

2. Prenons $u_n = (-1)^n$. Les sommes partielles valent -1 ou 0 , donc $|c_n| \leq \frac{1}{n}$ et $c_n \rightarrow 0$. Pourtant (u_n) diverge. **La réciproque est donc fausse.**

3. Soit $A > 0$. Il existe N tel que $u_k \geq 2A$ pour $k > N$. Pour $n > 2N$, on écrit $c_n \geq \frac{S_N}{n} + \frac{(n-N)2A}{n}$, où $S_N = u_1 + \dots + u_N$. Or $\frac{n-N}{n} \geq \frac{1}{2}$, donc $c_n \geq \frac{S_N}{n} + A$. Enfin, $\frac{S_N}{n} \rightarrow 0$, donc $\frac{S_N}{n} \geq -\frac{A}{2}$ pour n assez grand. Alors $c_n \geq \frac{A}{2}$. Comme A est arbitraire, $c_n \rightarrow +\infty$.

4. Par récurrence, v_n est bien défini et $v_n \geq 1$: en effet, si $v_n \geq 1$, alors $v_{n+1} = v_n + \frac{1}{v_n} > v_n \geq 1$. La suite est donc croissante, puisque $v_{n+1} - v_n = \frac{1}{v_n} > 0$. Si elle était majorée, elle convergerait vers $L \geq 1$. En passant à la limite dans la relation de récurrence, on aurait $L = L + \frac{1}{L}$, ce qui est impossible. Donc $v_n \rightarrow +\infty$ par limite monotone. Ensuite, posons $u_k = v_k^2 - v_{k-1}^2$ pour $k \geq 1$. On calcule $u_k = 2 + \frac{1}{v_{k-1}^2}$, qui tend vers 2 . Par la question 1, $c_n = \frac{v_n^2 - v_0^2}{n} \rightarrow 2$, par télescopage. **Donc** $\frac{v_n^2}{n} = c_n + \frac{1}{n} \rightarrow 2$, autrement dit v_n se comporte comme $\sqrt{2n}$.

Point de méthode : dans une preuve de Cesàro, on coupe la somme en deux. Les premiers termes, en

nombre fixé, sont écrasés par le facteur $\frac{1}{n}$, et les suivants sont contrôlés par la convergence.

Corrigé de l'exercice 20 : Point fixe d'une application croissante

1. Comme $f(0) \in [0, 1]$, on a $f(0) \geq 0$, donc $0 \in A$. De plus, $A \subset [0, 1]$ est majorée par 1. Par la propriété de la borne supérieure, $c = \sup A$ **existe, et** $0 \leq c \leq 1$, car $0 \in A$ et 1 majore A .
2. Soit $x \in A$. D'une part, $x \leq c$, donc $f(x) \leq f(c)$ par croissance. D'autre part, $x \leq f(x)$. Donc $x \leq f(c)$. Ainsi $f(c)$ majore A . **Comme c est le plus petit majorant, $c \leq f(c)$.**
3. Par croissance de f , l'inégalité $c \leq f(c)$ donne $f(c) \leq f(f(c))$. De plus, $f(c) \in [0, 1]$. Donc $f(c) \in A$, et $f(c) \leq c$ puisque c majore A . **Avec la question 2, $f(c) = c$: f admet un point fixe.**
4. Pour $x < \frac{1}{2}$, la condition $f(x) \geq x$ s'écrit $x \leq \frac{1}{4}$. Pour $x \geq \frac{1}{2}$, elle s'écrit $x \leq \frac{3}{4}$. Donc $A = \left[0, \frac{1}{4}\right] \cup \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right]$ et $c = \frac{3}{4}$. On vérifie $f\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{3}{4}$. Les points fixes sont les solutions de $f(x) = x$, soit $x = \frac{1}{4}$ (qui est bien inférieur à $\frac{1}{2}$) et $x = \frac{3}{4}$. **Les points fixes sont $\frac{1}{4}$ et $\frac{3}{4}$, et la méthode fournit le plus grand.**
5. Posons $g(x) = 1$ si $x < \frac{1}{2}$ et $g(x) = 0$ si $x \geq \frac{1}{2}$. Cette application est décroissante de $[0, 1]$ dans $[0, 1]$. Si $x < \frac{1}{2}$, alors $g(x) = 1 \neq x$. Si $x \geq \frac{1}{2}$, alors $g(x) = 0 \neq x$. **L'application g n'a aucun point fixe.**

Point de méthode : aucune continuité n'intervient ici. Seules la croissance de f et la propriété de la borne supérieure sont utilisées, ce qui montre la force de cet axiome.

Corrigé de l'exercice 21 : Problème : méthode de Héron et borne supérieure dans $\mathbb{Q}$

1. Raisonnons par récurrence. D'abord, $u_0 = 2$ est rationnel et strictement positif. Si u_n est rationnel et strictement positif, alors $\frac{2}{u_n}$ est défini, rationnel et positif. Donc u_{n+1} est rationnel et strictement positif, car $\mathbb{Q}$ est stable par somme et produit. **Tous les u_n sont des rationnels strictement positifs.**

2. On calcule :

$$u_{n+1} - \sqrt{2} = \frac{u_n^2 + 2 - 2\sqrt{2} u_n}{2u_n} = \frac{(u_n - \sqrt{2})^2}{2u_n}.$$

Comme $u_n > 0$, cette quantité est positive. Donc $u_{n+1} \geq \sqrt{2}$ pour tout n , et $u_0 = 2 \geq \sqrt{2}$. **Ainsi $u_n \geq \sqrt{2}$ pour tout n .**

3. On a $u_{n+1} - u_n = \frac{2 - u_n^2}{2u_n}$, qui est négatif puisque $u_n^2 \geq 2$. La suite est donc décroissante et minorée par $\sqrt{2}$. Par limite monotone, elle converge vers $L \geq \sqrt{2} > 0$. Ensuite, la relation $2u_n u_{n+1} = u_n^2 + 2$ donne, à la limite, $2L^2 = L^2 + 2$, soit $L^2 = 2$. **Comme $L > 0$, (u_n) converge vers $\sqrt{2}$.**

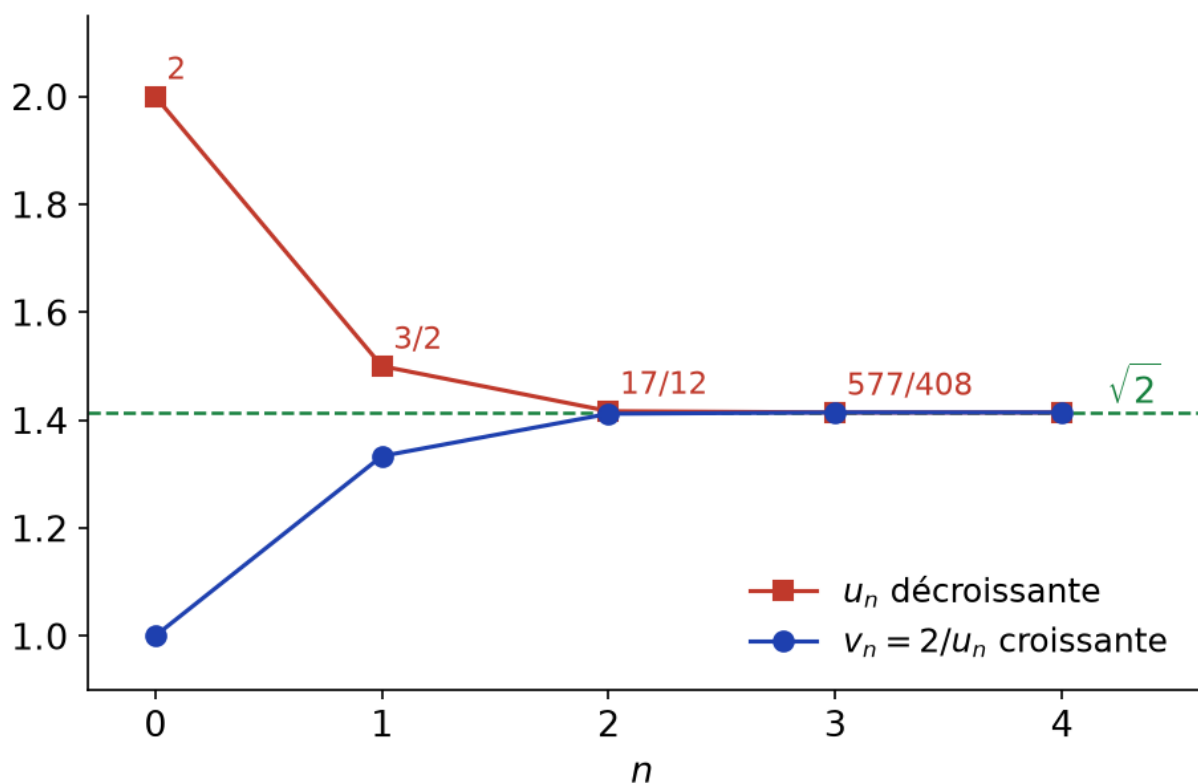
4. Comme $u_n \geq \sqrt{2}$, on a $v_n = \frac{2}{u_n} \leq \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$. De plus, (u_n) décroît et reste positive, donc (v_n) croît. Enfin, $v_n \rightarrow \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$, donc $u_n - v_n \rightarrow 0$. **Les suites sont adjacentes, et $v_n \leq \sqrt{2} \leq u_n$.**

5. D'après la question 2, $e_{n+1} = \frac{e_n^2}{2u_n} \leq \frac{e_n^2}{2\sqrt{2}} \leq \frac{e_n^2}{2}$. En divisant par 2, on obtient $\frac{e_{n+1}}{2} \leq \left(\frac{e_n}{2}\right)^2$. Par récurrence, $\frac{e_n}{2} \leq \left(\frac{e_0}{2}\right)^{2^n}$, les quantités étant positives. Or $\frac{e_0}{2} = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$. Cette quantité est inférieure à $\frac{1}{3}$ si et seulement si $\sqrt{2} \geq \frac{4}{3}$, ce qui est vrai car $\frac{16}{9} \leq 2$. **Donc $0 \leq e_n \leq 2 \cdot 3^{-2^n}$.** Le nombre de décimales exactes double environ à chaque étape : c'est une convergence quadratique.

6. On trouve $u_1 = \frac{1}{2}(2 + 1) = \frac{3}{2}$, puis $u_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2} + \frac{4}{3}\right) = \frac{17}{12}$. Ensuite, $u_3 = \frac{1}{2}\left(\frac{17}{12} + \frac{24}{17}\right) = \frac{289 + 288}{408} = \frac{577}{408}$. Donc $v_3 = \frac{816}{577}$. Enfin, $577^2 = 332\,929$ et $816 \times 408 = 332\,928$. Ainsi :

$$u_3 - v_3 = \frac{577^2 - 816 \times 408}{408 \times 577} = \frac{1}{235\,416}.$$

On obtient $\frac{816}{577} \leq \sqrt{2} \leq \frac{577}{408}$, encadrement d'amplitude $\frac{1}{235\,416}$. La figure ci-dessous montre les deux suites qui se referment sur $\sqrt{2}$.



7. L'ensemble V est une partie non vide de $\mathbb{Q}$, majorée par le rationnel 2. Dans $\mathbb{R}$, sa borne supérieure vaut $\sqrt{2}$, car $\sqrt{2}$ majore V et $v_n \rightarrow \sqrt{2}$. Supposons qu'un rationnel r soit le plus petit majorant rationnel de V . D'abord, $r \geq \sqrt{2}$: sinon, comme $v_n \rightarrow \sqrt{2}$, un v_n dépasserait r . Ensuite, $r \neq \sqrt{2}$, car $\sqrt{2}$ est irrationnel. Donc $r > \sqrt{2}$. Par densité de $\mathbb{Q}$, il existe un rationnel s tel que $\sqrt{2} < s < r$. Or s majore V et $s < r$, ce qui contredit la minimalité de r . **Ainsi V n'a pas de borne supérieure dans $\mathbb{Q}$: le corps $\mathbb{Q}$ ne vérifie pas la propriété de la borne supérieure.**

Point de méthode : ce problème réunit les deux aspects du chapitre. La limite monotone donne l'existence de la limite, et l'égalité $e_{n+1} = \frac{e_n^2}{2u_n}$ en donne la vitesse.

[Revenir aux énoncés des exercices](#)

Pour aller plus loin en maths sup

- Le cours : [nombres réels et suites, cours de maths sup](#)
- Les énoncés : [exercices de maths sup sur nombres réels et suites](#)
- À maîtriser avant : [Logique, ensembles, applications et relations](#), [Calculs algébriques : sommes, produits, inégalités](#)
- Chapitre précédent : [Équations différentielles linéaires d'ordre 1 et 2](#)
- Chapitre suivant : [Suites particulières et suites récurrentes](#)
- Tester vos connaissances : [QCM de maths sup par chapitre](#)
- Le sommaire : [tous les chapitres de maths sup](#) et les [chapitres de maths spé](#)