

Nombres réels

I. Les nombres réels, un corps totalement ordonné

Au lycée, vous avez manipulé les nombres réels sans jamais les définir. En licence, on adopte un point de vue axiomatique. On admet l'existence d'un ensemble $\mathbb{R}$ muni de deux opérations et d'une relation d'ordre qui vérifient une courte liste de propriétés. Ensuite, tout le reste s'en déduit. La construction effective de $\mathbb{R}$, par les coupures ou par les suites de Cauchy, est hors programme de ce chapitre.

Définition :

On admet que $(\mathbb{R}, +, \times, \leq)$ est un **corps commutatif totalement ordonné**. Autrement dit, $(\mathbb{R}, +, \times)$ est un corps commutatif, la relation $\leq$ est une relation d'ordre total, et l'ordre est compatible avec les opérations :

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R}, x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z, (0 \leq x \text{ et } 0 \leq y) \Rightarrow 0 \leq xy.$$

Enfin, $\mathbb{R}$ vérifie l'axiome de la borne supérieure, énoncé dans la partie III.

Le corps $\mathbb{Q}$ des rationnels est lui aussi totalement ordonné. Ainsi, ce qui distingue $\mathbb{R}$ de $\mathbb{Q}$, c'est uniquement l'axiome de la borne supérieure. C'est pourquoi ce chapitre en fait le fondement de toute l'analyse réelle.

1. Règles de calcul sur les inégalités

Des deux axiomes de compatibilité, on tire toutes les règles usuelles. Il faut les connaître par cœur et savoir les justifier.

Propriété :

Pour tous réels a, b, c, d :

- si $a \leq b$ et $c \leq d$, alors $a + c \leq b + d$ (on additionne des inégalités de même sens) ;
- si $a \leq b$ et $c \geq 0$, alors $ac \leq bc$; si $c \leq 0$, alors $ac \geq bc$;
- si $0 \leq a \leq b$ et $0 \leq c \leq d$, alors $ac \leq bd$;
- si $0 < a \leq b$, alors $\frac{1}{b} \leq \frac{1}{a}$;
- pour tout réel x , $x^2 \geq 0$, avec égalité si et seulement si $x = 0$.

Démonstration :

Montrons par exemple la dernière règle. Si $x \geq 0$, alors $x^2 = x \cdot x \geq 0$ par l'axiome du produit. Sinon, $-x \geq 0$ et $x^2 = (-x)(-x) \geq 0$. De plus, dans un corps, $x^2 = 0$ entraîne $x = 0$. Les autres règles se prouvent de la même façon, en se ramenant au signe d'une différence : par exemple, $bc - ac = (b - a)c$ est un produit de deux réels positifs.

Attention :

On ne soustrait jamais deux inégalités, et on ne les divise pas. Par exemple, $1 \leq 3$ et $0 \leq 3$,

mais $1 - 0 \leq 3 - 3$ est faux. Pour majorer $a - c$, on majore a et on **minore** c .

Méthode :

Pour établir $A \leq B$, étudiez le signe de $B - A$. Le plus souvent, on factorise cette différence ou on l'écrit comme un carré. Par exemple, pour tous réels a, b ,
 $a^2 + b^2 - 2ab = (a - b)^2 \geq 0$. Par conséquent, $ab \leq \frac{a^2 + b^2}{2}$.

Exemple :

Soient $x, y > 0$. Appliquons l'inégalité précédente à $a = \sqrt{x}$ et $b = \sqrt{y}$. On obtient
 $\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$: la moyenne géométrique est inférieure à la moyenne arithmétique. De plus, l'égalité a lieu si et seulement si $x = y$.

II. Valeur absolue et intervalles de R

1. Valeur absolue

Définition :

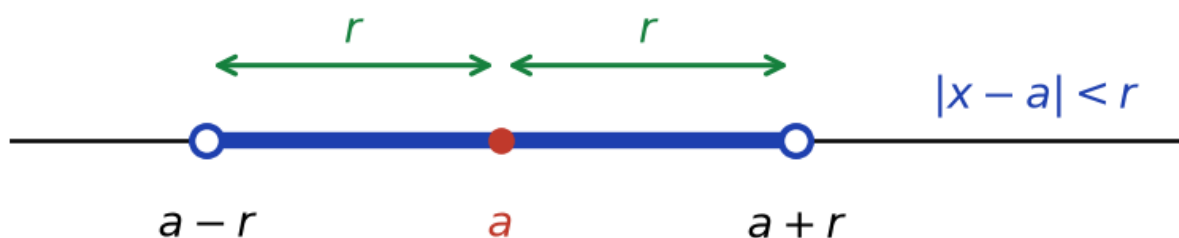
La **valeur absolue** d'un réel x est $|x| = \max(x, -x)$. Ainsi, $|x| = x$ si $x \geq 0$ et $|x| = -x$ si $x < 0$. Pour deux réels x et y , le nombre $|x - y|$ est la **distance** entre x et y .

Propriété :

Pour tous réels x, y et tout $r \geq 0$:

- $|x| \geq 0$, $|-x| = |x|$, $|xy| = |x||y|$ et $\sqrt{x^2} = |x|$;
- $-|x| \leq x \leq |x|$;
- $|x| \leq r \Leftrightarrow -r \leq x \leq r$;
- $|x - a| < r \Leftrightarrow a - r < x < a + r$.

La dernière équivalence se lit géométriquement. En effet, les réels situés à une distance strictement inférieure à r du point a forment l'intervalle ouvert centré en a de rayon r . La figure ci-dessous représente cette situation.



Théorème :

Inégalité triangulaire. Pour tous réels x et y :

$$|x + y| \leq |x| + |y| \text{ et } \big||x| - |y|\big| \leq |x - y|.$$

De plus, $|x + y| = |x| + |y|$ si et seulement si $xy \geq 0$.

Démonstration :

D'abord, $-|x| \leq x \leq |x|$ et $-|y| \leq y \leq |y|$. En additionnant, on obtient $-(|x| + |y|) \leq x + y \leq |x| + |y|$, donc $|x + y| \leq |x| + |y|$. Ensuite, on écrit $x = (x - y) + y$. Ainsi, $|x| \leq |x - y| + |y|$, soit $|x| - |y| \leq |x - y|$. En échangeant x et y , on a aussi $|y| - |x| \leq |x - y|$. Enfin, les deux membres de la première inégalité étant positifs, l'égalité équivaut à l'égalité des carrés, c'est-à-dire à $2xy = 2|xy|$, soit $xy \geq 0$.

Exemple :

Réolvons $|2x - 3| < 5$. Cette inégalité équivaut à $-5 < 2x - 3 < 5$, donc à $-1 < x < 4$. L'ensemble des solutions est l'intervalle $] -1, 4[$. Pour une somme de valeurs absolues, en revanche, on distingue des cas selon le signe de chaque terme.

2. Intervalles

Définition :

Une partie I de $\mathbb{R}$ est un **intervalle** si, pour tous $a, b \in I$ avec $a \leq b$, tout réel c tel que $a \leq c \leq b$ appartient à I . Autrement dit, un intervalle est une partie « sans trou ».

Grâce à l'axiome de la borne supérieure, on montre que les intervalles sont exactement les ensembles suivants, avec $a \leq b$ réels : $\emptyset$, $[a, b]$, $[a, b[$, $]a, b]$, $]a, b[$, $[a, +\infty[$, $]a, +\infty[$, $]-\infty, b]$, $]-\infty, b[$ et $\mathbb{R}$. Un intervalle du type $[a, b]$ s'appelle un **segment**.

Remarque :

L'intersection de deux intervalles est un intervalle, car la définition se vérifie directement. En revanche, la réunion $[0, 1] \cup [2, 3]$ n'est pas un intervalle : elle contient 1 et 2, mais pas $\frac{3}{2}$.

III. Majorants, minorants et borne supérieure

1. Majorants et plus grand élément

Définition :

Soit A une partie de $\mathbb{R}$. Un réel M est un **majorant** de A si $a \leq M$ pour tout $a \in A$. Un réel m est un **minorant** de A si $m \leq a$ pour tout $a \in A$. La partie A est **majorée** (respectivement **minorée**) si elle possède au moins un majorant (respectivement un minorant). Elle est **bornée** si elle est majorée et minorée.

Un majorant de A qui appartient à A est appelé **plus grand élément** ou **maximum** de A , noté $\max A$. De même, on définit le plus petit élément $\min A$.

Le maximum, s'il existe, est unique. Cependant, il n'existe pas toujours. Par exemple, l'intervalle $[0, 1[$ est majoré par 1, mais il n'a pas de maximum. En effet, si $x \in [0, 1[$, alors $\frac{x+1}{2}$ appartient encore à $[0, 1[$ et dépasse strictement x .

2. Borne supérieure et borne inférieure

Définition :

Soit A une partie de $\mathbb{R}$. On appelle **borne supérieure** de A , si elle existe, le plus petit élément de l'ensemble des majorants de A . On la note $\sup A$. De même, la **borne inférieure** de A , notée $\inf A$, est le plus grand des minorants de A .

Ainsi, $s = \sup A$ signifie deux choses. D'une part, s majore A . D'autre part, tout majorant M de A vérifie $s \leq M$. Par conséquent, si A admet un maximum, alors $\sup A = \max A$. La réciproque est fautive : $\sup [0, 1[= 1$, mais $1 \notin [0, 1[$.

3. L'axiome de la borne supérieure

Théorème :

Axiome de la borne supérieure. Toute partie de $\mathbb{R}$ non vide et majorée admet une borne supérieure dans $\mathbb{R}$.

C'est cet énoncé qui fait de $\mathbb{R}$ un ensemble « sans trou ». En revanche, $\mathbb{Q}$ ne le vérifie pas. En effet, l'ensemble des rationnels positifs r tels que $r^2 < 2$ est non vide et majoré par 2 . Pourtant, il n'a pas de plus petit majorant rationnel, car ce majorant devrait valoir $\sqrt{2}$, qui n'est pas rationnel.

Corollaire :

Toute partie de $\mathbb{R}$ non vide et minorée admet une borne inférieure. De plus, si l'on note $-A = \{-a, a \in A\}$, on a $\inf A = -\sup(-A)$.

Démonstration :

Soit A non vide et minorée par m . Alors $-A$ est non vide et majorée par $-m$. Par l'axiome, $s = \sup(-A)$ existe. D'une part, pour tout $a \in A$, $-a \leq s$, donc $-s \leq a$: le réel $-s$ minore A . D'autre part, si m' minore A , alors $-m'$ majore $-A$, donc $s \leq -m'$, soit $m' \leq -s$. Finalement, $-s$ est le plus grand minorant de A .

4. Caractérisation par epsilon

En pratique, on ne manipule pas l'ensemble des majorants. On utilise plutôt la caractérisation suivante, qui est l'outil central du chapitre.

Théorème :

Soient A une partie non vide de $\mathbb{R}$ et $s \in \mathbb{R}$. Alors $s = \sup A$ si et seulement si :

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall a \in A, \\ , a \leq s, \\ \forall \varepsilon > 0, \\ , \exists a \in A, \\ , s - \varepsilon < a. \end{array} \right.$$

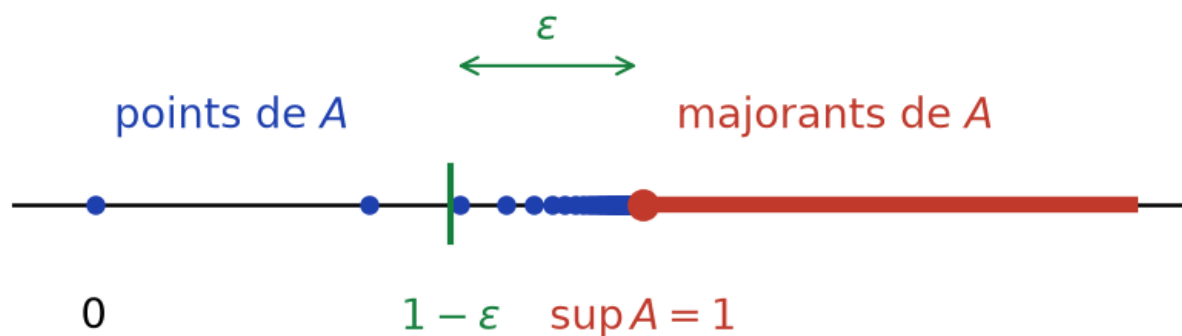
Démonstration :

Supposons $s = \sup A$. La première condition exprime que s majore A . Soit $\varepsilon > 0$. Le réel $s - \varepsilon$ est strictement inférieur à s , donc ce n'est pas un majorant de A . Il existe donc $a \in A$ avec $a > s - \varepsilon$.

Réciproquement, supposons les deux conditions vraies. Alors s majore A . Soit M un majorant de A ; supposons par l'absurde $M < s$. Posons $\varepsilon = s - M > 0$. Il existe $a \in A$ avec $a > s - \varepsilon = M$, ce qui contredit le fait que M majore A . Donc $s \leq M$, et s est bien le plus petit majorant.

La figure ci-dessous illustre ce théorème avec $A = \left\{ 1 - \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^* \right\}$. Quel que soit $\varepsilon > 0$, des points de

A tombent entre $1 - \varepsilon$ et 1 .



Méthode :

Pour montrer que $s = \sup A$:

1. vérifiez que s majore A ;
2. fixez $\varepsilon > 0$ quelconque, puis exhibez un élément $a \in A$ tel que $a > s - \varepsilon$. Pour cela, on résout souvent l'inéquation $a > s - \varepsilon$ en fonction d'un paramètre, puis on invoque la propriété d'Archimède.

Enfin, pour savoir si la borne est un maximum, on vérifie si $s \in A$.

Exemple :

Soit $A = \left\{ 1 - \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^* \right\}$. D'abord, $1 - \frac{1}{n} < 1$ pour tout n , donc 1 majore A . Ensuite, soit $\varepsilon > 0$. L'inégalité $1 - \frac{1}{n} > 1 - \varepsilon$ équivaut à $n > \frac{1}{\varepsilon}$, et un tel entier existe. Donc $\sup A = 1$. Comme $1 \notin A$, la partie A n'a pas de maximum. En revanche, $\min A = 0$,

atteint pour $n = 1$.

Propriété :

Caractérisation séquentielle. Soient A non vide et s un majorant de A . Alors $s = \sup A$ si et seulement s'il existe une suite (a_n) d'éléments de A qui converge vers s .

Démonstration :

Si $s = \sup A$, on applique la caractérisation avec $\varepsilon = \frac{1}{n+1}$: il existe $a_n \in A$ tel que $s - \frac{1}{n+1} < a_n \leq s$. Par encadrement, a_n tend vers s . Réciproquement, soit $M < s$. Comme a_n tend vers s , on a $a_n > M$ pour n assez grand. Donc M ne majore pas A , et s est le plus petit majorant.

IV. Propriété d'Archimède et partie entière

1. La propriété d'Archimède

Théorème :

Propriété d'Archimède. Pour tout réel $a > 0$ et tout réel b , il existe un entier naturel n tel que $na > b$.

Démonstration :

Montrons d'abord que $\mathbb{N}$ n'est pas majoré dans $\mathbb{R}$. Supposons le contraire. Alors $\mathbb{N}$ est non vide et

majoré, donc $s = \sup \mathbb{N}$ existe par l'axiome. Le réel $s - 1$ ne majore pas $\mathbb{N}$: il existe $n \in \mathbb{N}$ avec $n > s - 1$. Mais alors $n + 1 \in \mathbb{N}$ et $n + 1 > s$, ce qui est absurde. Ainsi, le réel $\frac{b}{a}$ n'est pas un majorant de $\mathbb{N}$. Il existe donc $n \in \mathbb{N}$ tel que $n > \frac{b}{a}$, c'est-à-dire $na > b$.

Corollaire :

Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{1}{n} < \varepsilon$. Par conséquent, $\inf \left\{ \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^* \right\} = 0$. De plus, un réel a tel que $0 \leq a \leq \varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$ est nul.

Ce dernier point est d'usage constant. En effet, pour montrer que deux réels x et y sont égaux, il suffit souvent de prouver que $|x - y| \leq \varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$.

2. Partie entière

Théorème :

Pour tout réel x , il existe un unique entier relatif n tel que $n \leq x < n + 1$. On l'appelle la **partie entière** de x et on le note $\lfloor x \rfloor$ (ou $E(x)$).

Démonstration :

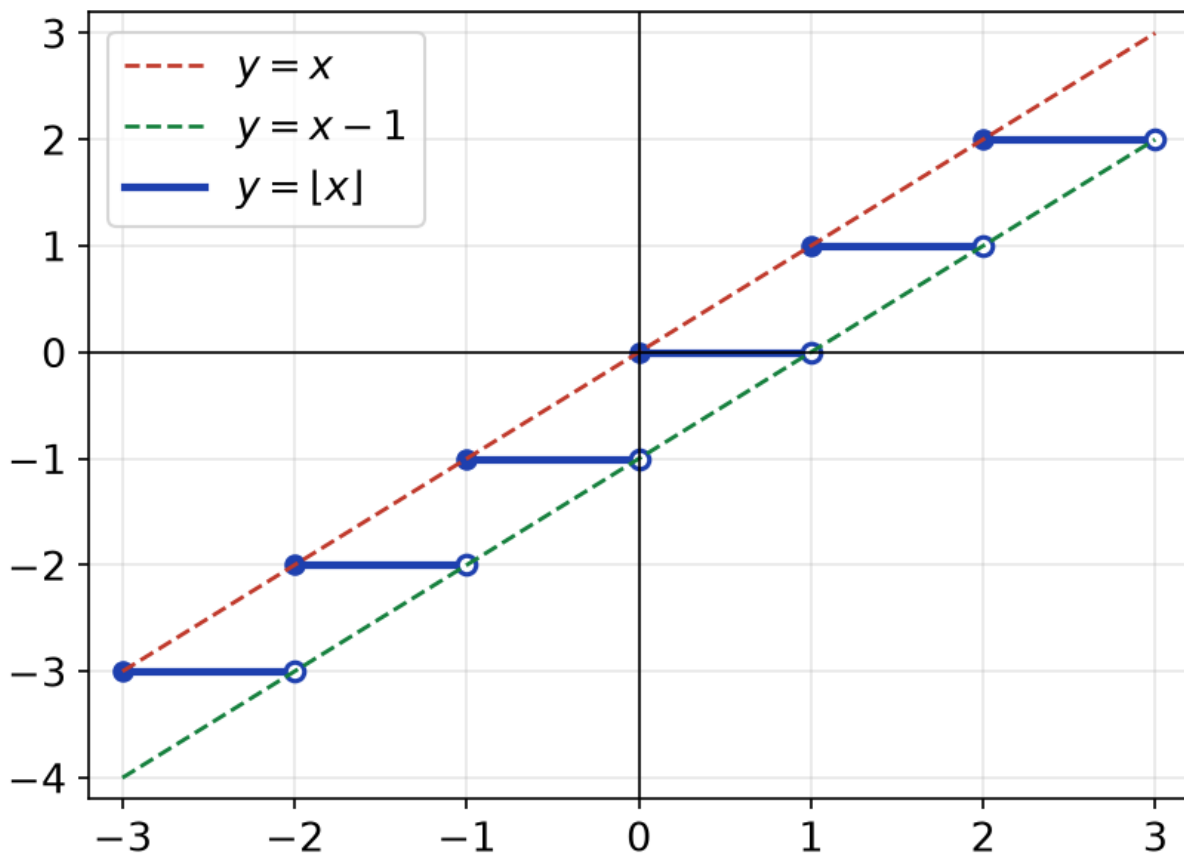
Unicité : si $n \leq x < n + 1$ et $p \leq x < p + 1$, alors $-1 < n - p < 1$. Comme $n - p$ est un entier, $n = p$.

Existence : supposons d'abord $x \geq 0$. Par la propriété d'Archimède, l'ensemble

$F = \left\{ k \in \mathbb{N}, k > x \right\}$ est non vide. C'est une partie non vide de $\mathbb{N}$, donc elle possède un plus petit élément k_0 . On a $k_0 \geq 1$ car $0 \leq x$. Ensuite, $k_0 - 1 \notin F$, donc $k_0 - 1 \leq x < k_0$, et

$n = k_0 - 1$ convient. Enfin, si $x < 0$, on traite $-x$: si $-x \in \mathbb{Z}$, alors $n = x$ convient ; sinon, $n = -\lfloor -x \rfloor - 1$ convient.

La courbe de la fonction partie entière est un escalier. Comme le montre la figure ci-dessous, elle reste entre les droites d'équations $y = x - 1$ et $y = x$.



Propriété :

Pour tout réel x et tout entier relatif k :

- $x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x$;
- $\lfloor x + k \rfloor = \lfloor x \rfloor + k$;

- $\lfloor x \rfloor = k \Leftrightarrow k \leq x < k + 1$;
- pour tout entier p , $p \leq x \Leftrightarrow p \leq \lfloor x \rfloor$.

Méthode :

Pour calculer ou manipuler $\lfloor y \rfloor$, **encadrez** y entre deux entiers consécutifs $k \leq y < k + 1$: on conclut alors $\lfloor y \rfloor = k$. Souvent, on pose $x = \lfloor x \rfloor + t$ avec $t \in [0, 1[$, puis on discute selon la position de t .

Exemple :

On a $\lfloor 2,7 \rfloor = 2$, mais $\lfloor -2,7 \rfloor = -3$ car $-3 \leq -2,7 < -2$. De même, pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a $n^2 \leq n^2 + n < (n + 1)^2$. Donc $n \leq \sqrt{n^2 + n} < n + 1$, et finalement $\lfloor \sqrt{n^2 + n} \rfloor = n$.

V. Densité de $\mathbb{Q}$ et de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$

Définition :

Une partie D de $\mathbb{R}$ est **dense** dans $\mathbb{R}$ si tout intervalle ouvert non vide $]x, y[$ contient au moins un élément de D .

Théorème :

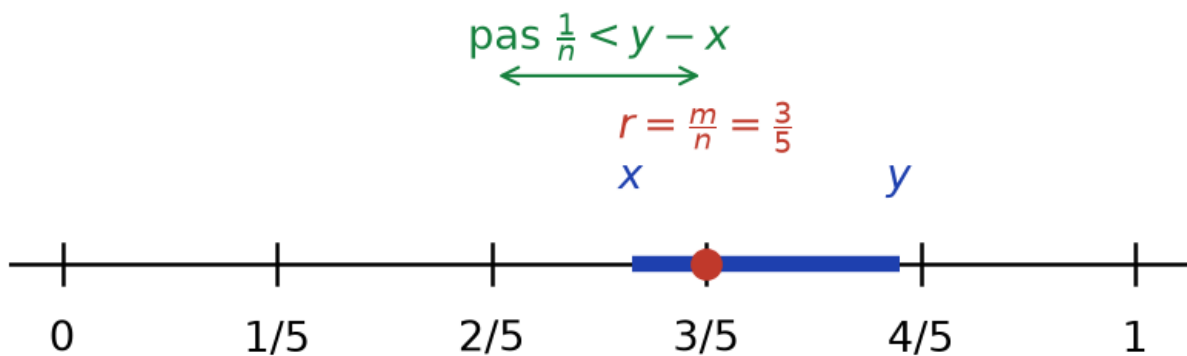
L'ensemble $\mathbb{Q}$ des rationnels et l'ensemble $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ des irrationnels sont denses dans $\mathbb{R}$.

Démonstration :

Soient $x < y$. Par la propriété d'Archimède, il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $n(y - x) > 1$. Posons $m = \lfloor nx \rfloor + 1$. Alors $nx < m \leq nx + 1 < ny$. En divisant par $n > 0$, on obtient $x < \frac{m}{n} < y$. Ainsi, $]x, y[$ contient un rationnel.

Pour les irrationnels, on applique ce résultat à l'intervalle $]x - \sqrt{2}, y - \sqrt{2}[$. Il contient un rationnel r . Alors $r + \sqrt{2} \in]x, y[$. Or $r + \sqrt{2}$ est irrationnel : sinon, $\sqrt{2} = (r + \sqrt{2}) - r$ serait rationnel.

La figure ci-dessous montre l'idée de la preuve. On découpe la droite avec un pas $\frac{1}{n}$ plus petit que la longueur $y - x$. Dès lors, un des points $\frac{m}{n}$ tombe forcément dans $]x, y[$.



Remarque :

En appliquant le théorème une infinité de fois, on voit que tout intervalle ouvert non vide contient une **infinité** de rationnels et une infinité d'irrationnels. En outre, tout réel x est la borne supérieure de

$$\left\{ r \in \mathbb{Q}, r < x \right\}.$$

Exemple :

Le réel $\sqrt{2}$ est irrationnel. En effet, supposons $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ avec $p, q \in \mathbb{N}^*$ premiers entre eux. Alors $p^2 = 2q^2$, donc p^2 est pair, puis p est pair. Écrivons $p = 2k$. On obtient $q^2 = 2k^2$, donc q est pair lui aussi. C'est absurde, car p et q sont premiers entre eux.

VI. Approximations décimales d'un réel

Définition :

Soient $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. On pose

$$d_n = \frac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n} \text{ et } d'_n = d_n + 10^{-n}.$$

Le décimal d_n est l'**approximation décimale par défaut** de x à 10^{-n} près, et d'_n l'approximation **par excès**.

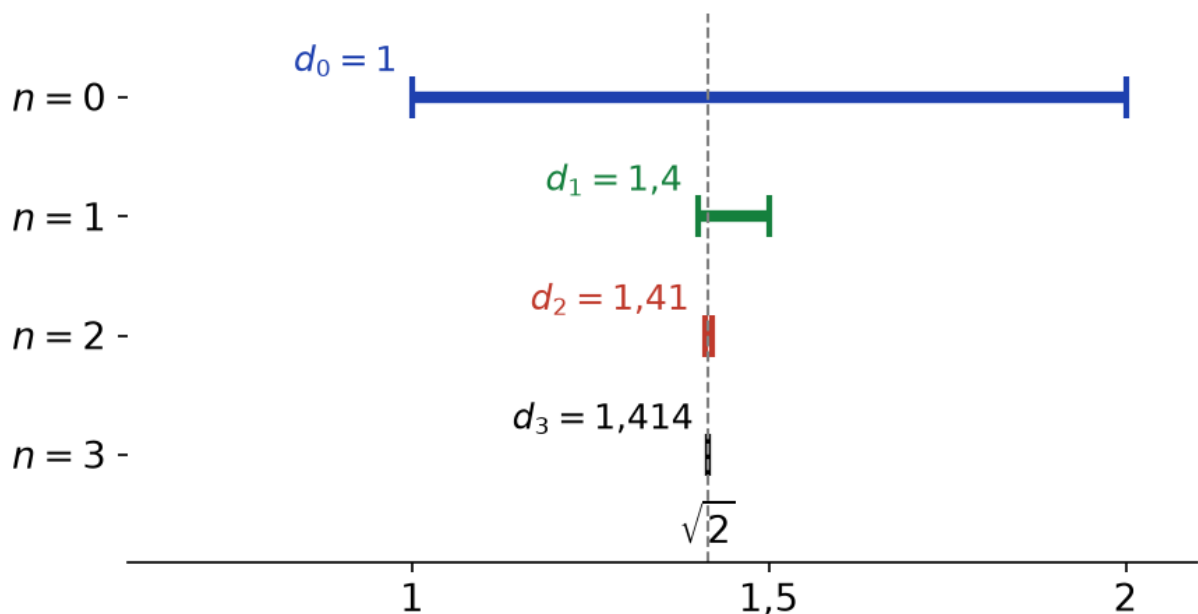
Proposition :

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $d_n \leq x < d'_n$ et $d'_n - d_n = 10^{-n}$. De plus, la suite (d_n) est croissante, la suite (d'_n) est décroissante, et $\sup_n d_n = x$.

Démonstration :

L'encadrement $\lfloor 10^n x \rfloor \leq 10^n x < \lfloor 10^n x \rfloor + 1$ donne, après division par 10^n , l'inégalité $d_n \leq x < d'_n$. Ensuite, $10 \lfloor 10^n x \rfloor$ est un entier inférieur ou égal à $10^{n+1} x$. Donc il est inférieur ou égal à $\lfloor 10^{n+1} x \rfloor$, d'où $d_n \leq d_{n+1}$. La décroissance de (d'_n) se prouve de même. Enfin, x majore les d_n . Pour $\varepsilon > 0$, choisissons $n > \frac{1}{\varepsilon}$ par Archimède ; comme $10^n > n$, on a $10^{-n} < \varepsilon$. Alors $d_n > x - 10^{-n} > x - \varepsilon$.

La figure ci-dessous représente les encadrements successifs de $\sqrt{2}$. À chaque étape, la longueur de l'intervalle est divisée par 10.



Exemple :

Comme $1,414^2 = 1,999396$ et $1,415^2 = 2,002225$, on a $1,414 \leq \sqrt{2} < 1,415$. Ainsi, $d_3 = 1,414$ et $d'_3 = 1,415$. Pour un réel négatif, il faut rester attentif : pour $x = -\frac{2}{3}$, on trouve $d_1 = -0,7$ et non $-0,6$.

Remarque :

Les d_n sont des nombres décimaux. Par conséquent, l'ensemble $\mathbb{D}$ des décimaux est lui aussi dense dans $\mathbb{R}$. C'est ce qui justifie le calcul numérique : tout réel s'approche d'aussi près que l'on veut par des nombres qu'une machine sait écrire.

Ce qu'il faut retenir

- $\mathbb{R}$ est un corps totalement ordonné ; pour comparer deux quantités, on étudie le signe de leur différence.
- On additionne des inégalités de même sens, mais on ne les soustrait jamais ; multiplier par un négatif renverse le sens.
- L'inégalité triangulaire $|x + y| \leq |x| + |y|$ et sa forme $||x| - |y|| \leq |x - y|$ servent à majorer.
- La borne supérieure est le plus petit des majorants ; elle n'appartient pas forcément à la partie.
- Axiome : toute partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure. C'est lui qui distingue $\mathbb{R}$ de $\mathbb{Q}$.
- Caractérisation : $s = \sup A$ si et seulement si s majore A et, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $a \in A$ avec $a > s - \varepsilon$.
- Propriété d'Archimède : $\mathbb{N}$ n'est pas majoré, et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe n avec $\frac{1}{n} < \varepsilon$.
- La partie entière vérifie $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$; on la calcule en encadrant entre deux entiers consécutifs.
- $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ et les décimaux sont denses dans $\mathbb{R}$.

Questions fréquentes sur nombres réels

Quelle différence entre borne supérieure et maximum ?

Le maximum de A est un majorant qui appartient à A ; la borne supérieure est le plus petit des majorants, qui peut ne pas appartenir à A . Si le maximum existe, il est égal à la borne supérieure. Par exemple, $\sup [0, 1[= 1$, mais $[0, 1[$ n'a pas de maximum.

Comment montrer qu'un réel s est la borne supérieure d'une partie A ?

On vérifie d'abord que s majore A . Ensuite, on fixe $\epsilon > 0$ et on exhibe un élément $a \in A$ tel que $a > s - \epsilon$, souvent grâce à la propriété d'Archimède. On peut aussi construire une suite d'éléments de A qui converge vers s .

Pourquoi l'axiome de la borne supérieure est-il si important ?

C'est la seule propriété qui distingue $\mathbb{R}$ de $\mathbb{Q}$, qui est lui aussi un corps totalement ordonné. Sans lui, la partie des rationnels positifs de carré inférieur à 2 n'aurait pas de borne supérieure. Tous les grands théorèmes d'analyse réelle en dépendent.

Quelle est la partie entière d'un nombre négatif ?

La partie entière de x est l'unique entier n tel que $n \leq x < n + 1$. Pour un négatif, ce n'est donc pas la troncature : $\lfloor -2,7 \rfloor = -3$ et non -2 . En général, $\lfloor x \rfloor + \lfloor -x \rfloor = -1$ lorsque x n'est pas entier.

Pour aller plus loin en L1

- Les énoncés : [exercices de maths en L1 sur nombres réels](#)
- Les solutions : [corrigé des exercices sur nombres réels](#)
- À maîtriser avant : [Logique, raisonnement et ensembles](#)
- Chapitre précédent : [Nombres complexes et trigonométrie](#)
- Chapitre suivant : [Suites numériques](#)
- Le sommaire : [tous les chapitres de maths de L1](#) et la [licence de maths de L1 à L3](#)