

Nombres réels

Corrigé de l'exercice 1 : Inégalités classiques

1. On étudie le signe de la différence. On a $\frac{a^2 + b^2}{2} - ab = \frac{(a - b)^2}{2} \geq 0$, car un carré est positif.

Donc $ab \leq \frac{a^2 + b^2}{2}$, avec égalité si et seulement si $a = b$.

2. On applique la question 1 aux trois couples (a, b) , (b, c) et (c, a) , puis on additionne ces inégalités de même sens :

$$ab + bc + ca \leq \frac{a^2 + b^2}{2} + \frac{b^2 + c^2}{2} + \frac{c^2 + a^2}{2} = a^2 + b^2 + c^2.$$

On obtient bien $ab + bc + ca \leq a^2 + b^2 + c^2$.

3. Comme $x, y > 0$, les réels $\sqrt{x}$ et $\sqrt{y}$ existent. La question 1 appliquée à $a = \sqrt{x}$ et $b = \sqrt{y}$ donne $\sqrt{x}\sqrt{y} \leq \frac{x + y}{2}$, c'est-à-dire $\sqrt{xy} \leq \frac{x + y}{2}$. Ensuite, on a $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{x + y}{xy}$. Comme $xy(x + y) > 0$, on peut multiplier par ce réel sans changer le sens. Ainsi,

$$\frac{x + y}{xy} \geq \frac{4}{x + y} \Leftrightarrow (x + y)^2 \geq 4xy \Leftrightarrow (x - y)^2 \geq 0.$$

La dernière inégalité est vraie. **Par conséquent**, $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{4}{x + y}$.

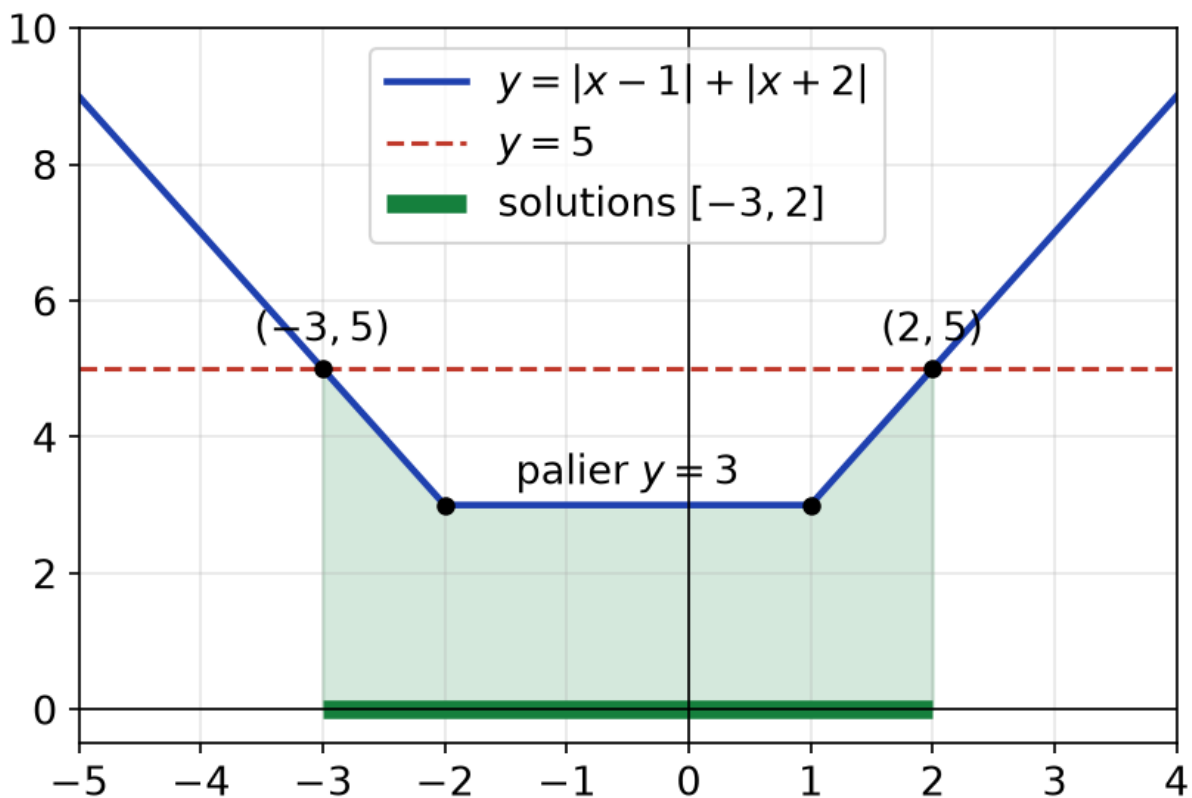
4. Pour tout réel t , on a $\frac{1}{4} - t(1 - t) = t^2 - t + \frac{1}{4} = \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0$. **Donc**
 $t(1 - t) \leq \frac{1}{4}$, avec égalité si et seulement si $t = \frac{1}{2}$.

Point de méthode : pour comparer deux expressions, formez leur différence et cherchez à l'écrire comme un carré ou comme un produit de facteurs de signe connu.

Corrigé de l'exercice 2 : Équations et inéquations avec valeurs absolues

1. D'après le cours, $|X| < r$ équivaut à $-r < X < r$. Ainsi,
 $|2x - 3| < 5 \Leftrightarrow -5 < 2x - 3 < 5 \Leftrightarrow -2 < 2x < 8 \Leftrightarrow -1 < x < 4$. **L'ensemble des solutions est $] -1, 4[$.**
2. Posons $g(x) = |x - 1| + |x + 2|$. Les valeurs absolues changent d'expression en -2 et en 1 . On distingue donc trois cas.
 - Si $x \leq -2$: $g(x) = (1 - x) + (-x - 2) = -2x - 1$. Alors $g(x) \leq 5 \Leftrightarrow x \geq -3$. On garde $[-3, -2]$.
 - Si $-2 \leq x \leq 1$: $g(x) = (1 - x) + (x + 2) = 3 \leq 5$. Tout l'intervalle $[-2, 1]$ convient.
 - Si $x \geq 1$: $g(x) = (x - 1) + (x + 2) = 2x + 1$. Alors $g(x) \leq 5 \Leftrightarrow x \leq 2$. On garde $[1, 2]$.

En réunissant les trois cas, **l'ensemble des solutions est $[-3, 2]$** . La figure ci-dessous confirme ce résultat : la courbe passe sous la droite $y = 5$ exactement entre -3 et 2 , avec un palier de hauteur 3 entre -2 et 1 .



3. Les deux membres sont positifs. Or, pour $u, v \geq 0$, on a $u \geq v \Leftrightarrow u^2 \geq v^2$, car la fonction carré est strictement croissante sur $[0, +\infty[$. Ainsi,

$$|x + 1| \geq |2x - 1| \Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 \geq 4x^2 - 4x + 1 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x \leq 0 \Leftrightarrow 3x(x - 2) \leq 0.$$

Un trinôme est du signe opposé à son coefficient dominant entre ses racines. **L'ensemble des solutions est $[0, 2]$.**

4. Une valeur absolue est positive, donc une solution vérifie $2x \geq 0$, soit $x \geq 0$. Pour $x \geq 0$, l'équation équivaut à $x - 3 = 2x$ ou $x - 3 = -2x$. Le premier cas donne $x = -3$, rejeté car négatif. Le second donne $3x = 3$, soit $x = 1$. Vérification : $|1 - 3| = 2 = 2 \times 1$. **L'unique solution est $x = 1$.**

Corrigé de l'exercice 3 : Autour de l'inégalité triangulaire

1. On écrit $x = (x - y) + y$. Par l'inégalité triangulaire, $|x| \leq |x - y| + |y|$, donc $|x| - |y| \leq |x - y|$. En échangeant les rôles de x et y , on obtient

$|y| - |x| \leq |y - x| = |x - y|$. Or $||x| - |y||$ est égal à $|x| - |y|$ ou à $|y| - |x|$. **Dans les deux cas,** $||x| - |y|| \leq |x - y|$.

2. Les réels $|x + y|$ et $|x| + |y|$ sont positifs. Ils sont donc égaux si et seulement si leurs carrés le sont. D'une part, $|x + y|^2 = x^2 + 2xy + y^2$. D'autre part,

$$(|x| + |y|)^2 = x^2 + 2|xy| + y^2. \text{ L'égalité équivaut donc à } xy = |xy|. \text{ Ainsi, } |x + y| = |x| + |y| \Leftrightarrow xy \geq 0.$$

3. On a $2x = (x + y) + (x - y)$, donc $2|x| \leq |x + y| + |x - y|$. De même, $2y = (x + y) - (x - y)$, donc $2|y| \leq |x + y| + |x - y|$. En additionnant puis en divisant par 2, **on obtient** $|x| + |y| \leq |x + y| + |x - y|$.

4. Soit $x \in [-2, 3]$. Alors $|x| \leq 3$. Par l'inégalité triangulaire,

$$|x^3 - 2x + 1| \leq |x|^3 + 2|x| + 1 \leq 27 + 6 + 1 = 34.$$

Donc $|x^3 - 2x + 1| \leq 34$ **sur** $[-2, 3]$. Cette majoration est grossière, mais elle suffit souvent en analyse.

Corrigé de l'exercice 4 : Intervalles de R

- D'abord, $|x - 2| < 3 \Leftrightarrow -1 < x < 5$, donc $A =]-1, 5[$. Ensuite, $x^2 \leq 4x - 3 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 \leq 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x - 3) \leq 0$, donc $B = [1, 3]$. Enfin, $C =]-\infty, -2] \cup [2, +\infty[$. Comme $[1, 3] \subset]-1, 5[$, on a $A \cap B = [1, 3]$. De plus, $]-1, 5[\cap]-\infty, -2] = \emptyset$. **Donc** $A \cap B = [1, 3]$ **et** $A \cap C = [2, 5[$.
- Notons I l'intersection. Pour tout $n \geq 1$, on a $-\frac{1}{n} < 0$ et $1 < 1 + \frac{1}{n}$. Donc $[0, 1] \subset I$. Réciproquement, soit $x \notin [0, 1]$. Si $x < 0$, la propriété d'Archimède fournit $n \geq 1$ tel que $\frac{1}{n} < -x$. Alors $x < -\frac{1}{n}$, et $x \notin I$. Si $x > 1$, on choisit n avec $\frac{1}{n} < x - 1$. Alors $x > 1 + \frac{1}{n}$, et $x \notin I$. **Finalement,** $I = [0, 1]$.
- Notons U la réunion. Pour $n \geq 2$, on a $0 < \frac{1}{n}$ et $1 - \frac{1}{n} < 1$, donc chaque segment est inclus dans $]0, 1[$. Ainsi, $U \subset]0, 1[$. Réciproquement, soit $x \in]0, 1[$. Le réel $\delta = \min(x, 1 - x)$ est strictement positif. Par Archimède, il existe $n \geq 2$ tel que $\frac{1}{n} \leq \delta$. Alors $\frac{1}{n} \leq x$ et $x \leq 1 - \frac{1}{n}$. **Donc** $U =]0, 1[$.
- Soient I et J deux intervalles, et $a \leq c \leq b$ avec $a, b \in I \cap J$. Comme I est un intervalle, $c \in I$. De même, $c \in J$. Donc $c \in I \cap J$. **L'intersection de deux intervalles est un intervalle.** En revanche, **la réunion n'en est pas toujours un** :

$[0, 1] \cup [2, 3]$ contient 1 et 2, mais pas $\frac{3}{2}$.

Corrigé de l'exercice 5 : Premiers calculs de parties entières

1. On encadre chaque réel entre deux entiers consécutifs. On a $3 \leq 3,7 < 4$ et $-4 \leq -3,7 < -3$. De plus, -5 est entier. Ensuite, $9 \leq 10 < 16$, donc $3 \leq \sqrt{10} < 4$. Enfin, $3 < \pi < 4$ donne $-4 < -\pi < -3$. **Donc** $\lfloor 3,7 \rfloor = 3$, $\lfloor -3,7 \rfloor = -4$, $\lfloor -5 \rfloor = -5$, $\lfloor \sqrt{10} \rfloor = 3$ **et** $\lfloor -\pi \rfloor = -4$.
2. Posons $p = \lfloor x \rfloor$. Alors $p \leq x < p + 1$, donc $p + k \leq x + k < p + k + 1$. Comme $p + k$ est un entier, **on a** $\lfloor x + k \rfloor = \lfloor x \rfloor + k$.
3. Si $x \in \mathbb{Z}$, alors $\lfloor x \rfloor = x$ et $\lfloor -x \rfloor = -x$, d'où une somme nulle. Sinon, posons $p = \lfloor x \rfloor$: on a $p < x < p + 1$, l'inégalité de gauche étant stricte car $x \notin \mathbb{Z}$. Donc $-p - 1 < -x < -p$, et $\lfloor -x \rfloor = -p - 1$. **La somme vaut 0 si $x \in \mathbb{Z}$ et -1 sinon.**
4. Par définition, $\lfloor 2x - 1 \rfloor = 3 \Leftrightarrow 3 \leq 2x - 1 < 4 \Leftrightarrow 4 \leq 2x < 5$. **L'ensemble des solutions est** $\left[2, \frac{5}{2}\right[$.

Corrigé de l'exercice 6 : Bornes de parties simples

1. Pour $n \geq 1$, on a $0 \leq 1 - \frac{1}{n} < 1$. Donc A est bornée. Le réel 0 est atteint pour $n = 1$, donc $\min A = \inf A = 0$. Ensuite, 1 majore A . Soit $\varepsilon > 0$. Par Archimède, il existe n tel que $\frac{1}{n} < \varepsilon$, et alors $1 - \frac{1}{n} > 1 - \varepsilon$. **Donc** $\sup A = 1$, $\min A = 0$, **et A n'a pas de maximum**, car $1 - \frac{1}{n} \neq 1$.
2. Séparons selon la parité de n . Pour n pair, $(-1)^n + \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{n} \in]1, \frac{3}{2}]$, et la valeur $\frac{3}{2}$ est atteinte pour $n = 2$. Pour n impair, $(-1)^n + \frac{1}{n} = -1 + \frac{1}{n} \in]-1, 0]$. Ainsi, tous les éléments de B sont dans $]-1, \frac{3}{2}]$. Par conséquent, $\max B = \sup B = \frac{3}{2}$. Ensuite, -1 minore B . Soit $\varepsilon > 0$; choisissons un entier impair n tel que $\frac{1}{n} < \varepsilon$. Alors $-1 + \frac{1}{n} < -1 + \varepsilon$. **Donc** $\sup B = \max B = \frac{3}{2}$, $\inf B = -1$, **et B n'a pas de**

minimum.

3. Tout élément de C vérifie $0 \leq c \leq 2$. Or $0 \in C$ et $2 \in C$. **Donc**
 $\min C = \inf C = 0$ **et** $\max C = \sup C = 2$. On remarque que 1 n'est pas la borne supérieure : le point isolé 2 compte aussi.
4. On a $x^2 < 3 \Leftrightarrow |x| < \sqrt{3}$, donc $D =]-\sqrt{3}, \sqrt{3}[$. Le réel $\sqrt{3}$ majore D . Pour $0 < \varepsilon < \sqrt{3}$, le réel $\sqrt{3} - \frac{\varepsilon}{2}$ appartient à D et dépasse $\sqrt{3} - \varepsilon$. **Donc** $\sup D = \sqrt{3}$ **et** $\inf D = -\sqrt{3}$, **sans maximum ni minimum.**

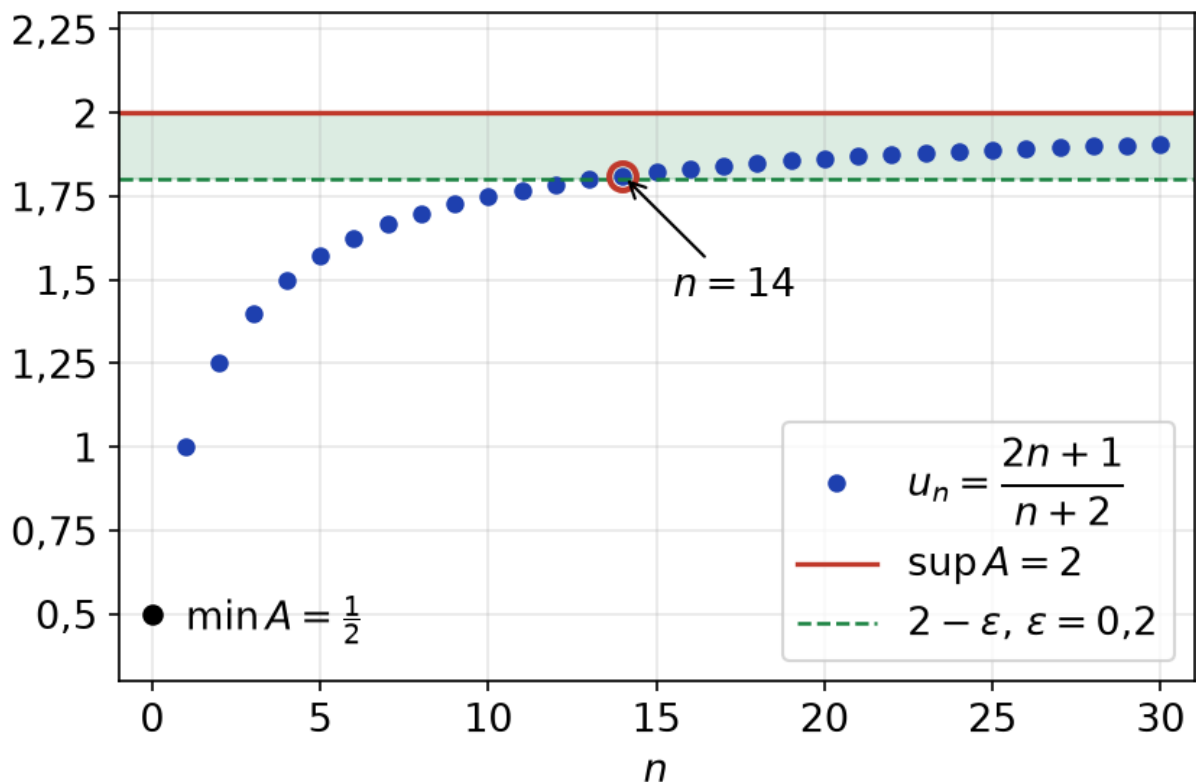
Corrigé de l'exercice 7 : Borne supérieure par la caractérisation epsilon

1. On écrit $2n + 1 = 2(n + 2) - 3$. **Donc** $\frac{2n+1}{n+2} = 2 - \frac{3}{n+2}$, avec $\alpha = 2$ **et** $\beta = 3$.
2. Posons $u_n = 2 - \frac{3}{n+2}$. Quand n augmente, $n + 2$ augmente, donc $\frac{3}{n+2}$ diminue. Ainsi, la suite (u_n) est strictement croissante. Son plus petit terme est u_0 . **Donc**
 $\min A = u_0 = \frac{1}{2}$.
3. D'abord, $\frac{3}{n+2} > 0$, donc $u_n < 2$: le réel 2 majore A . Ensuite, fixons $\varepsilon > 0$. On a
$$u_n > 2 - \varepsilon \Leftrightarrow \frac{3}{n+2} < \varepsilon \Leftrightarrow n + 2 > \frac{3}{\varepsilon}.$$

Par la propriété d'Archimède, un tel entier n existe. Par la caractérisation de la borne supérieure, $\sup A = 2$. **Comme** $u_n < 2$ **pour tout** n , **A n'a pas de maximum.**

4. Pour $\varepsilon = 0,2$, la condition s'écrit $n + 2 > 15$, soit $n > 13$. Le plus petit entier est $n = 14$; on vérifie que $u_{14} = \frac{29}{16} = 1,8125 > 1,8$, tandis que $u_{13} = \frac{27}{15} = 1,8$. Pour $\varepsilon = 10^{-2}$, la condition devient $n + 2 > 300$, soit $n > 298$. **On trouve** $n = 14$ **pour** $\varepsilon = 0,2$ **et** $n = 299$ **pour** $\varepsilon = 10^{-2}$.

La figure ci-dessous représente les termes u_n . Dès $n = 14$, ils entrent dans la bande comprise entre $2 - \varepsilon$ et 2, sans jamais atteindre la borne.



Corrigé de l'exercice 8 : Borne supérieure d'une somme et d'une réunion

- Les parties A et B sont non vides, donc $A + B$ l'est aussi. Notons $\alpha = \sup A$ et $\beta = \sup B$, qui existent par l'axiome de la borne supérieure. Pour $a \in A$ et $b \in B$, on a $a \leq \alpha$ et $b \leq \beta$, donc $a + b \leq \alpha + \beta$. **Ainsi, $A + B$ est non vide et majorée par $\alpha + \beta$.**
- On vient de voir que $\alpha + \beta$ majore $A + B$. Soit $\epsilon > 0$. Par la caractérisation, il existe $a \in A$ tel que $a > \alpha - \frac{\epsilon}{2}$, et $b \in B$ tel que $b > \beta - \frac{\epsilon}{2}$. Alors $a + b > \alpha + \beta - \epsilon$, avec $a + b \in A + B$. **Donc $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$.**
- Posons $\mu = \max(\alpha, \beta)$. Tout élément de $A \cup B$ est dans A ou dans B , donc il est inférieur à α ou à β , donc à μ . Ainsi, μ majore $A \cup B$. Réciproquement, soit M un majorant de $A \cup B$. Alors M majore A et B , donc $M \geq \alpha$ et $M \geq \beta$, d'où $M \geq \mu$. **Donc $\sup(A \cup B) = \max(\sup A, \sup B)$.**
- On a $\sup [0, 1[= 1$. Pour B , tous les éléments sont strictement négatifs, et $-\frac{1}{n} > -\epsilon$ dès que $n > \frac{1}{\epsilon}$; donc $\sup B = 0$. Par la question 2, $\sup(A + B) = 1$. Or, pour $a \in A$ et

$b \in B$, on a $a < 1$ et $b < 0$, donc $a + b < 1$. Ainsi, $\sup(A + B) = 1$, et cette borne n'est pas atteinte.

Corrigé de l'exercice 9 : Borne supérieure et opérations

- Notons $s = \sup A$. Pour $a \in A$, on a $a \leq s$, donc $\lambda a \leq \lambda s$ car $\lambda > 0$. Ainsi, λs majore λA . Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $a \in A$ tel que $a > s - \frac{\varepsilon}{\lambda}$. En multipliant par $\lambda > 0$, on obtient $\lambda a > \lambda s - \varepsilon$. **Donc** $\sup(\lambda A) = \lambda \sup A$.
- Notons $i = \inf A$, qui existe car A est non vide et minorée. Pour $a \in A$, $a \geq i$, donc $\lambda a \leq \lambda i$, car multiplier par $\lambda < 0$ renverse le sens. Ainsi, λi majore λA . Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $a \in A$ tel que $a < i + \frac{\varepsilon}{|\lambda|}$. En multipliant par $\lambda < 0$, on obtient $\lambda a > \lambda i + \frac{\lambda \varepsilon}{|\lambda|} = \lambda i - \varepsilon$. **Donc** $\sup(\lambda A) = \lambda \inf A$.
- Posons $\Delta = \left\{ |x - y|, x, y \in A \right\}$ et notons $s = \sup A$, $i = \inf A$. Pour $x, y \in A$, on a $i \leq x \leq s$ et $i \leq y \leq s$. Donc $x - y \leq s - i$ et $y - x \leq s - i$. Ainsi, $|x - y| \leq s - i$, et $s - i$ majore Δ . Ensuite, soit $\varepsilon > 0$. Il existe $x \in A$ avec $x > s - \frac{\varepsilon}{2}$, et $y \in A$ avec $y < i + \frac{\varepsilon}{2}$. Alors $|x - y| \geq x - y > s - i - \varepsilon = s - i - \varepsilon$. **Donc** $\sup A - \inf A = \sup \left\{ |x - y|, x, y \in A \right\}$.

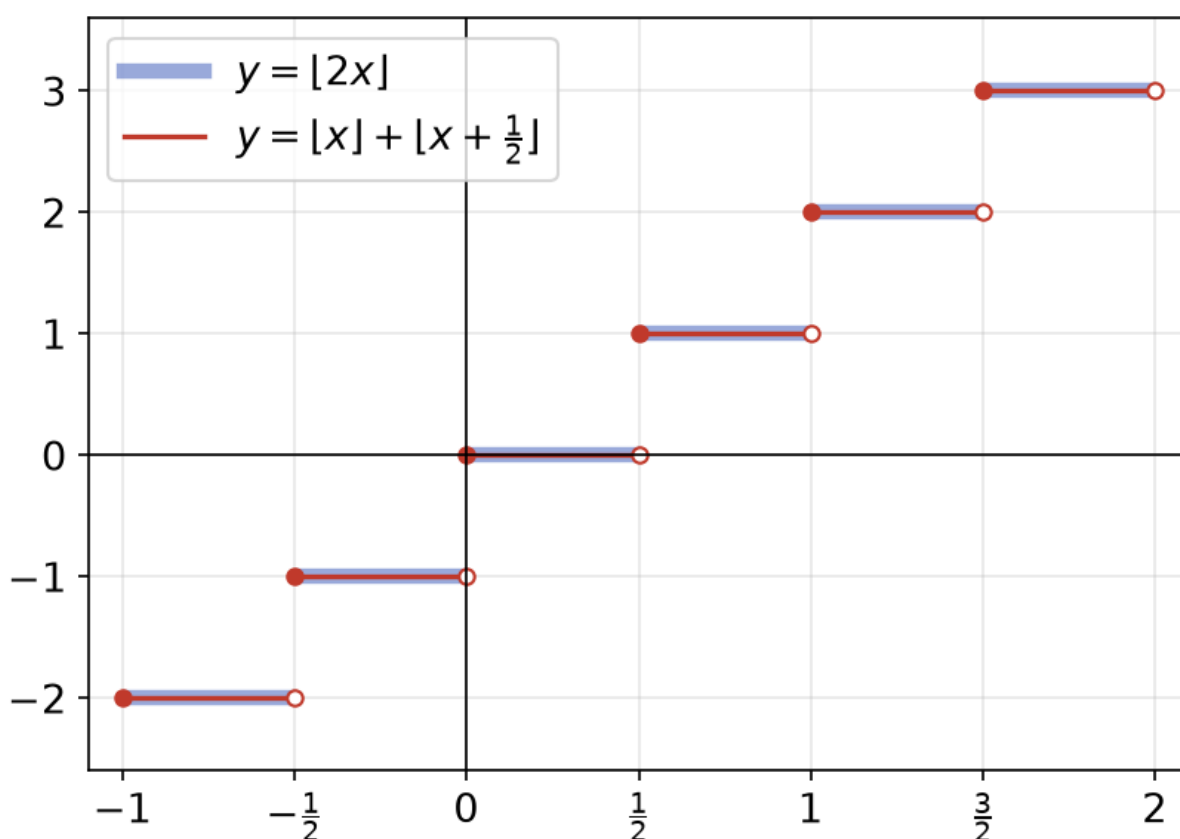
Corrigé de l'exercice 10 : Partie entière de 2x

- Par définition, $n \leq x < n + 1$. En retranchant n , on obtient $0 \leq t < 1$.
- On a $2x = 2n + 2t$, avec $2n \in \mathbb{Z}$. D'après la propriété $\lfloor y + k \rfloor = \lfloor y \rfloor + k$, il vient $\lfloor 2x \rfloor = 2n + \lfloor 2t \rfloor$. Or $2t \in [0, 2[$, donc $\lfloor 2t \rfloor \in \{0, 1\}$. Plus précisément, $\lfloor 2t \rfloor = 0$ si et seulement si $2t < 1$. **Donc** $\lfloor 2x \rfloor - 2\lfloor x \rfloor \in \{0, 1\}$, et cette différence est nulle si et seulement si $t < \frac{1}{2}$.
- On a $\left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor = n + \left\lfloor t + \frac{1}{2} \right\rfloor$. On distingue deux cas.

- Si $0 \leq t < \frac{1}{2}$, alors $\frac{1}{2} \leq t + \frac{1}{2} < 1$, donc $\lfloor x + \frac{1}{2} \rfloor = n$. Le membre de gauche vaut $2n$, qui est $\lfloor 2x \rfloor$ d'après la question 2.
- Si $\frac{1}{2} \leq t < 1$, alors $1 \leq t + \frac{1}{2} < \frac{3}{2}$, donc $\lfloor x + \frac{1}{2} \rfloor = n + 1$. Le membre de gauche vaut $2n + 1 = \lfloor 2x \rfloor$.

Dans tous les cas, $\lfloor x \rfloor + \lfloor x + \frac{1}{2} \rfloor = \lfloor 2x \rfloor$.

Comme le montre la figure ci-dessous, les deux fonctions en escalier coïncident exactement : chaque palier mesure $\frac{1}{2}$ et monte d'une unité.



Point de méthode : l'écriture $x = \lfloor x \rfloor + t$ avec $t \in [0, 1[$ ramène tout calcul de partie entière à une discussion sur la position de t .

Corrigé de l'exercice 11 : Encadrements par la partie entière

1. Posons $m = \lfloor x \rfloor$. Alors $m \leq x < m + 1$, donc $nm \leq nx < nm + n$. L'entier nm est inférieur ou égal à nx , donc $nm \leq \lfloor nx \rfloor$. De plus, $\lfloor nx \rfloor \leq nx < nm + n$. Comme ce sont des entiers, $\lfloor nx \rfloor \leq nm + n - 1$. En divisant par n , on obtient $m \leq \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \leq m + 1 - \frac{1}{n} < m + 1$. **Donc** $\left\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor = m = \lfloor x \rfloor$.
2. On a $nx - 1 < \lfloor nx \rfloor \leq nx$. En divisant par $n > 0$, il vient $x - \frac{1}{n} < \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \leq x$, soit $0 \leq x - \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} < \frac{1}{n}$. Comme $\frac{1}{n}$ tend vers 0, le théorème d'encadrement s'applique. **Donc** $\frac{\lfloor nx \rfloor}{n}$ **tend vers** x . En particulier, tout réel est limite d'une suite de rationnels.
3. D'une part, $n^2 \leq n^2 + n < n^2 + 2n + 1 = (n + 1)^2$. La racine carrée étant croissante, $n \leq \sqrt{n^2 + n} < n + 1$. D'autre part, $(n + 1)^2 = n^2 + 2n + 1 < n^2 + 2n + 2$ et $n^2 + 2n + 2 < n^2 + 4n + 4 = (n + 2)^2$, car $2 < 2n + 4$. Donc $n + 1 < \sqrt{n^2 + 2n + 2} < n + 2$. **Ainsi**, $\lfloor \sqrt{n^2 + n} \rfloor = n$ et $\lfloor \sqrt{n^2 + 2n + 2} \rfloor = n + 1$.
4. Les multiples de d dans $\{1, \dots, N\}$ sont les entiers dq avec $q \in \mathbb{N}^*$ et $dq \leq N$, c'est-à-dire $q \leq \frac{N}{d}$. Pour un entier q , on a $q \leq \frac{N}{d} \Leftrightarrow q \leq \left\lfloor \frac{N}{d} \right\rfloor$. Les valeurs possibles de q sont donc $1, 2, \dots, \left\lfloor \frac{N}{d} \right\rfloor$. Pour $N = 1000$ et $d = 7$, on a $7 \times 142 = 994 \leq 1000 < 1001 = 7 \times 143$. **Il y a** $\left\lfloor \frac{N}{d} \right\rfloor$ **multiples, soit** 142 **multiples de 7 entre 1 et 1000.**

Corrigé de l'exercice 12 : Propriété d'Archimède

1. Supposons $\mathbb{N}$ majoré. Comme $\mathbb{N}$ est non vide, l'axiome fournit $s = \sup \mathbb{N}$. Le réel $s - 1$ est strictement inférieur à s , donc il ne majore pas $\mathbb{N}$. Il existe ainsi $n \in \mathbb{N}$ avec $n > s - 1$. Alors $n + 1 \in \mathbb{N}$ et $n + 1 > s$, ce qui contredit la définition de s . **Donc** $\mathbb{N}$ **n'est pas majoré.**
2. Pour $n \geq 1$, $\frac{1}{n} > 0$, donc 0 minore l'ensemble. Soit $\varepsilon > 0$. D'après la question 1, $\frac{1}{\varepsilon}$ ne majore pas $\mathbb{N}$: il existe $n \geq 1$ avec $n > \frac{1}{\varepsilon}$, soit $\frac{1}{n} < \varepsilon = 0 + \varepsilon$. **Par la caractérisation de la borne inférieure**, $\inf \left\{ \frac{1}{n} \right\} = 0$.

3. Par hypothèse, α minore l'ensemble $\left\{ \frac{1}{n}, n \geq 1 \right\}$. Or 0 en est le plus grand minorant, donc $\alpha \leq 0$. Comme $\alpha \geq 0$, **on conclut** $\alpha = 0$.
4. On cherche n tel que $n > \frac{12,3}{0,07} = \frac{1230}{7}$. Or $7 \times 175 = 1225 < 1230 < 1232 = 7 \times 176$. Ainsi, $175 < \frac{1230}{7} < 176$. On vérifie : $0,07 \times 175 = 12,25 \leq 12,3$ et $0,07 \times 176 = 12,32 > 12,3$. **Le plus petit entier cherché est** $n = 176$.

Corrigé de l'exercice 13 : Densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$

- Comme $y - x > 0$, la propriété d'Archimède fournit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $n(y - x) > 1$. Posons $m = \lfloor nx \rfloor + 1$. Alors $m - 1 \leq nx < m$, donc $nx < m \leq nx + 1$. Or $nx + 1 < nx + n(y - x) = ny$. Ainsi, $nx < m < ny$, et, en divisant par $n > 0$, **le rationnel** $r = \frac{m}{n}$ **vérifie** $x < r < y$.
- On construit par récurrence des rationnels $r_1 > r_2 > \dots$ dans $]x, y[$. D'abord, on choisit $r_1 \in]x, y[$. Puis, si r_k est construit, on choisit $r_{k+1} \in]x, r_k[$. Ces rationnels sont deux à deux distincts. **L'intervalle** $]x, y[$ **contient donc une infinité de rationnels**.
- Avec $n = 10^4$, on a $n(y - x) = 14150 - 10^4\sqrt{2} > 14150 - 14142,2 > 1$. Ensuite, $\lfloor 10^4 \sqrt{2} \rfloor = 14142$, donc $m = 14143$ et $r = 1,4143$. Vérification exacte : $1,4143^2 = 2,00024449 > 2$, donc $\sqrt{2} < 1,4143$; de plus $1,4143 < 1,415$. **Le rationnel** $r = 1,4143$ **convient**.
- Posons $Q_x = \left\{ r \in \mathbb{Q}, r < x \right\}$. Cet ensemble est non vide, car il contient l'entier $\lfloor x \rfloor - 1$. Il est majoré par x . Soit $\varepsilon > 0$. Par densité, il existe un rationnel r tel que $x - \varepsilon < r < x$. Ce rationnel appartient à Q_x et dépasse $x - \varepsilon$. **Donc** $x = \sup Q_x$.

Corrigé de l'exercice 14 : Irrationnels et densité de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

- Supposons $\sqrt{6} = \frac{p}{q}$ avec $p, q \in \mathbb{N}^*$ premiers entre eux. Alors $p^2 = 6q^2$, donc p^2 est pair, et p aussi, car le carré d'un impair est impair. Écrivons $p = 2k$. Alors $4k^2 = 6q^2$, soit

$2k^2 = 3q^2$. Ainsi, $3q^2$ est pair ; comme 3 est impair, q^2 est pair, puis q est pair. C'est absurde, car p et q sont premiers entre eux. **Donc $\sqrt{6}$ est irrationnel.**

2. Si $r + s$ était rationnel, alors $s = (r + s) - r$ serait une différence de deux rationnels, donc rationnel. De même, si $r \neq 0$ et $rs \in \mathbb{Q}$, alors $s = \frac{rs}{r}$ serait rationnel. **Dans les deux cas, on aboutit à une contradiction : $r + s$ et rs sont irrationnels.**

3. Supposons $q = \sqrt{2} + \sqrt{3} \in \mathbb{Q}$. Alors $q^2 = 2 + 2\sqrt{6} + 3 = 5 + 2\sqrt{6}$ est rationnel. Par conséquent, $\sqrt{6} = \frac{q^2 - 5}{2}$ est rationnel, ce qui contredit la question 1. **Donc $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ est irrationnel.**

4. Le réel $\sqrt{2}$ est irrationnel, et $1 - \sqrt{2}$ aussi, d'après la question 2. Pourtant, leur somme vaut 1. **La somme de deux irrationnels peut donc être rationnelle.**

5. Par densité de $\mathbb{Q}$, l'intervalle $\left] \frac{x}{\sqrt{2}}, \frac{y}{\sqrt{2}} \right[$ contient une infinité de rationnels, donc un rationnel $r \neq 0$. Alors $x < r\sqrt{2} < y$, en multipliant par $\sqrt{2} > 0$. De plus, $r\sqrt{2}$ est irrationnel d'après la question 2. **Ainsi, $]x, y[$ contient l'irrationnel $r\sqrt{2}$, et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.**

Corrigé de l'exercice 15 : Approximations décimales

1. Par définition de la partie entière, $\lfloor 10^n x \rfloor \leq 10^n x < \lfloor 10^n x \rfloor + 1$. En multipliant par $10^{-n} > 0$, on obtient $d_n \leq x < d'_n$.

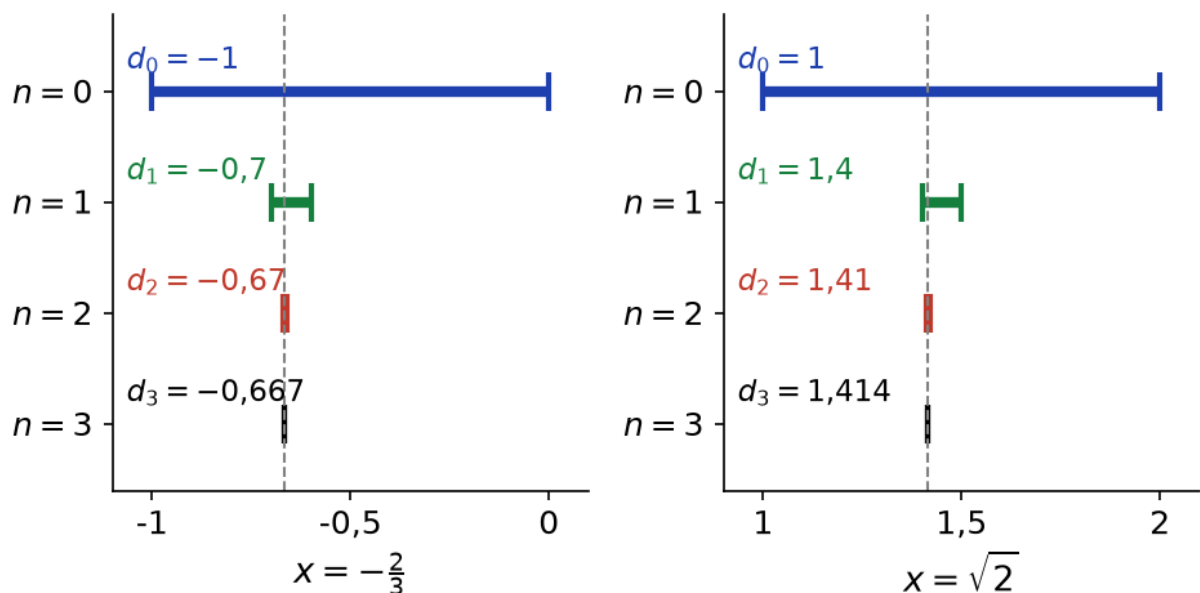
2. Posons $k = \lfloor 10^n x \rfloor$. L'entier $10k$ vérifie $10k \leq 10^{n+1} x$, donc $10k \leq \lfloor 10^{n+1} x \rfloor$, soit $d_n \leq d_{n+1}$. Ensuite, $\lfloor 10^{n+1} x \rfloor \leq 10^{n+1} x < 10k + 10$. Ce sont des entiers, donc $\lfloor 10^{n+1} x \rfloor + 1 \leq 10k + 10$. En divisant par 10^{n+1} , on obtient $d'_{n+1} \leq d'_n$. **La suite (d_n) est croissante et la suite (d'_n) est décroissante.**

3. Pour $x = \sqrt{2}$, on compare des carrés : $1^2 \leq 2 < 2^2$, $1,4^2 = 1,96 \leq 2 < 2,25 = 1,5^2$, $1,41^2 = 1,9881 \leq 2 < 2,0164 = 1,42^2$, et enfin $1,414^2 = 1,999396 \leq 2 < 2,002225 = 1,415^2$. Donc $d_0 = 1$, $d_1 = 1,4$, $d_2 = 1,41$, $d_3 = 1,414$. Pour $x = -\frac{2}{3}$, on a $10^n x = -\frac{2 \cdot 10^n}{3}$, soit $-0,66\dots$, $-6,66\dots$, $-66,66\dots$, $-666,66\dots$. **Pour $\sqrt{2}$: 1, 1,4, 1,41, 1,414. Pour $-\frac{2}{3}$: $d_0 = -1$, $d_1 = -0,7$, $d_2 = -0,67$, $d_3 = -0,667$.**

4. D'après la question 1, x majore les d_n . Soit $\varepsilon > 0$. Par Archimède, il existe n tel que $n > \frac{1}{\varepsilon}$. Or $10^n > n$, donc $10^{-n} < \varepsilon$. Alors $d_n > x - 10^{-n} > x - \varepsilon$. **Donc**

$x = \sup_n d_n$. Soient enfin deux réels $x < y$. Comme ci-dessus, on choisit p tel que $10^{-p} < y - x$. L'approximation par excès d'_p de x est un décimal. De plus, $x < d'_p$ et $d'_p = d_p + 10^{-p} \leq x + 10^{-p} < y$. **Ainsi, tout intervalle $]x, y[$ contient un décimal : $\mathbb{D}$ est dense dans $\mathbb{R}$.**

La figure ci-dessous illustre la question 3 pour $x = -\frac{2}{3}$ et pour $\sqrt{2}$: les approximations par défaut sont toujours à gauche du réel, même lorsqu'il est négatif.



Corrigé de l'exercice 16 : Caractérisation séquentielle de la borne supérieure

- Soit $n \in \mathbb{N}$. Appliquons la caractérisation par ε avec $\varepsilon = \frac{1}{n+1}$: il existe $a_n \in A$ tel que $M - \frac{1}{n+1} < a_n \leq M$. Comme $\frac{1}{n+1}$ tend vers 0 , le théorème d'encadrement donne la convergence. **La suite (a_n) ainsi construite est à valeurs dans A et converge vers M .**
- Par hypothèse, M majore A . Soit $\varepsilon > 0$. Comme a_n tend vers M , il existe un rang N tel que $|a_N - M| < \varepsilon$. En particulier, $a_N > M - \varepsilon$, avec $a_N \in A$. **Par la caractérisation par ε , on a $M = \sup A$.**

3. Posons $a_n = \frac{n^2}{n^2+1} = 1 - \frac{1}{n^2+1}$. Ainsi, $a_n < 1$ pour tout n : le réel 1 majore l'ensemble. De plus, $\frac{1}{n^2+1}$ tend vers 0, donc a_n tend vers 1. **D'après la question 2, la borne supérieure vaut 1 ; elle n'est pas atteinte.**

Corrigé de l'exercice 17 : Bornes de l'image d'une fonction

1. Pour $x > 0$, on calcule

$$\frac{1}{2} - \frac{x}{1+x^2} = \frac{1+x^2-2x}{2(1+x^2)} = \frac{(x-1)^2}{2(1+x^2)} \geq 0.$$

L'égalité a lieu si et seulement si $x = 1$. **Donc** $f(x) \leq \frac{1}{2}$, **avec égalité pour** $x = 1$ **seulement, et** $\max A = f(1) = \frac{1}{2}$.

2. Pour $x > 0$, $f(x) > 0$, donc 0 minore A . Ensuite, $1+x^2 > x^2$, donc $f(x) < \frac{x}{x^2} = \frac{1}{x}$. Soit $\varepsilon > 0$. Pour $x = \frac{1}{\varepsilon}$, on a $f(x) < \varepsilon$. **Donc** $\inf A = 0$. **Cette borne n'est pas atteinte, car** $f(x) > 0$ **pour tout** $x > 0$.

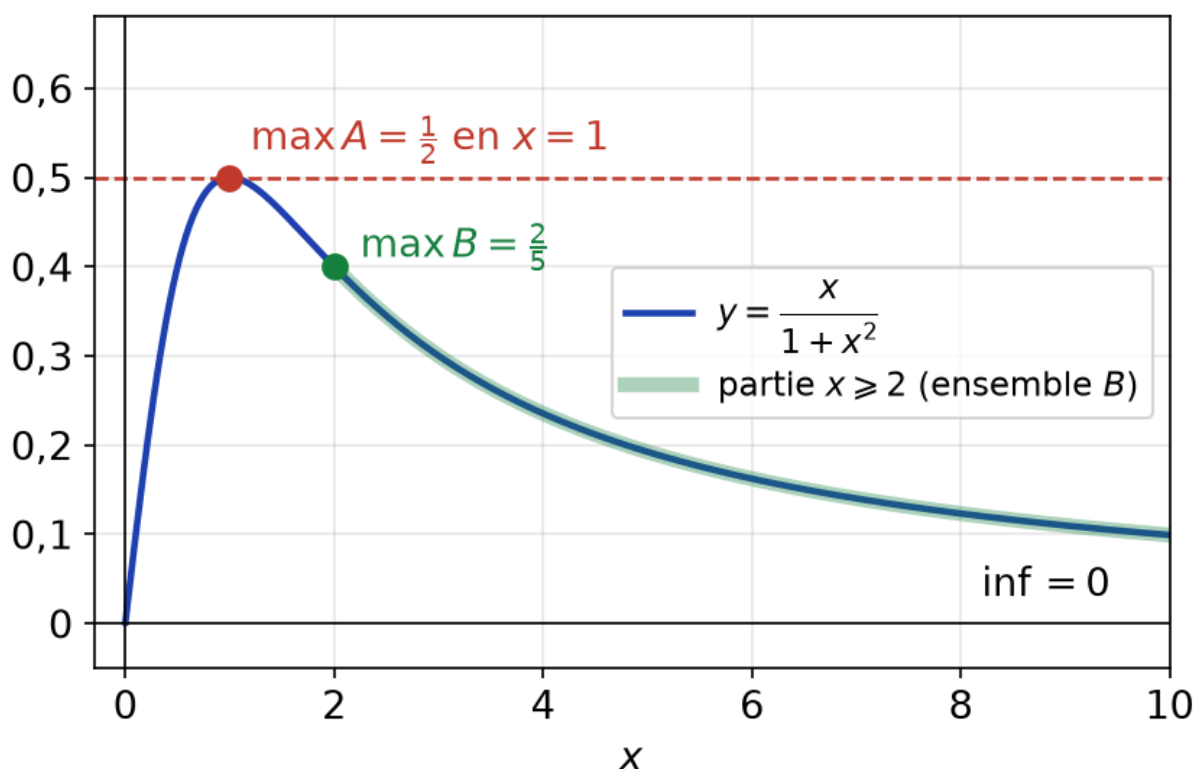
3. On réduit au même dénominateur :

$$f(x) - f(y) = \frac{x(1+y^2) - y(1+x^2)}{(1+x^2)(1+y^2)} = \frac{(x-y) - xy(x-y)}{(1+x^2)(1+y^2)} = \frac{(x-y)(1-xy)}{(1+x^2)(1+y^2)}.$$

Soient maintenant $1 \leq x < y$. Alors $x-y < 0$ et $xy > 1$, donc $1-xy < 0$. Le numérateur est positif strictement, et le dénominateur aussi. Ainsi, $f(x) > f(y)$. **La fonction f est strictement décroissante sur $[1, +\infty[$.**

4. Pour $x \geq 2$, la décroissance donne $f(x) \leq f(2) = \frac{2}{5}$, et $\frac{2}{5} \in B$. Donc $\max B = \frac{2}{5}$. Ensuite, 0 minore B . Pour $\varepsilon > 0$, le réel $x = \max\left(2, \frac{1}{\varepsilon}\right)$ vérifie $f(x) < \frac{1}{x} \leq \varepsilon$. **Donc** $\sup B = \max B = \frac{2}{5}$ **et** $\inf B = 0$, **sans minimum.**

La figure ci-dessous résume ces résultats. Le maximum $\frac{1}{2}$ est atteint en $x = 1$, et la courbe se rapproche de l'axe des abscisses sans jamais le toucher.



Corrigé de l'exercice 18 : Parties à deux indices

- Pour $n, m \geq 1$, on a $0 < \frac{1}{n} + \frac{1}{m} \leq 2$, et la valeur 2 est atteinte pour $n = m = 1$.
Donc $\max A = \sup A = 2$. Ensuite, 0 minore A . Soit $\varepsilon > 0$; par Archimède, choisissons $n > \frac{2}{\varepsilon}$, puis $m = n$. Alors $\frac{1}{n} + \frac{1}{m} = \frac{2}{n} < \varepsilon$. **Donc** $\sup A = \max A = 2$ **et** $\inf A = 0$, **non atteinte car tous les éléments sont strictement positifs.**
- Pour $n, m \geq 1$, on a $\frac{1}{n} - \frac{1}{m} < \frac{1}{n} \leq 1$ et $\frac{1}{n} - \frac{1}{m} > -\frac{1}{m} \geq -1$. Ainsi, $B \subset]-1, 1[$.
Soit $\varepsilon > 0$ et k un entier tel que $\frac{1}{k} < \varepsilon$. Avec $n = 1$ et $m = k$, on obtient $1 - \frac{1}{k} > 1 - \varepsilon$. Avec $n = k$ et $m = 1$, on obtient $\frac{1}{k} - 1 < -1 + \varepsilon$. **Donc** $\sup B = 1$ **et** $\inf B = -1$, **et aucune des deux n'est atteinte.**

Corrigé de l'exercice 19 : Q ne vérifie pas l'axiome de la borne

supérieure

1. Le rationnel 1 vérifie $1^2 = 1 < 2$, donc $1 \in E$. Si $r \in \mathbb{Q}$ vérifie $r \geq 2$, alors $r^2 \geq 4 > 2$, donc $r \notin E$. Par contraposée, tout élément de E est strictement inférieur à 2 . **Ainsi, E est non vide et majorée par 2 .**
2. Comme $1 \in E$ et que s majore E , on a $s \geq 1 > 0$. Si l'on avait $s^2 = 2$, le rationnel positif s serait égal à $\sqrt{2}$, qui est irrationnel. **Donc $s > 0$ et $s^2 \neq 2$.**
3. Le réel $\frac{2-s^2}{2s+2}$ est un quotient de rationnels strictement positifs. Donc h , minimum de deux rationnels strictement positifs, est un rationnel strictement positif. Comme $h \leq 1$, on a $h^2 \leq h$. Ainsi,

$$(s+h)^2 = s^2 + 2sh + h^2 \leq s^2 + h(2s+1) \leq s^2 + \frac{(2-s^2)(2s+1)}{2s+2} < s^2 + (2-s^2) = 2.$$

Par conséquent, $s+h$ est un rationnel strictement positif de carré inférieur à 2 : il appartient à E . **Or $s+h > s$, ce qui contredit le fait que s majore E .**

4. Comme $s^2 > 2$ et $s > 0$, le rationnel h est strictement positif. De plus,
 $h < s \Leftrightarrow s^2 - 2 < 2s^2$, ce qui est vrai. Ensuite,
 $(s-h)^2 = s^2 - 2sh + h^2 = s^2 - (s^2 - 2) + h^2 = 2 + h^2 > 2$. Soit alors $r \in E$. Si l'on avait $r > s-h$, deux réels positifs, on aurait $r^2 > (s-h)^2 > 2$, ce qui est exclu. Donc $r \leq s-h$. **Ainsi, $s-h$ est un majorant rationnel de E strictement inférieur à s : c'est une contradiction.** Les trois cas étant exclus, E n'a pas de plus petit majorant rationnel.
5. Dans $\mathbb{R}$, tout $r \in E$ vérifie $0 < r$ et $r^2 < 2$, donc $r < \sqrt{2}$: le réel $\sqrt{2}$ majore E . Soit $\varepsilon \in]0, \sqrt{2}[$. Par densité de $\mathbb{Q}$, il existe un rationnel r tel que $\sqrt{2} - \varepsilon < r < \sqrt{2}$. Alors $r > 0$ et $r^2 < 2$, donc $r \in E$. **Donc $\sup E = \sqrt{2}$ dans $\mathbb{R}$: la borne existe, mais elle n'est pas rationnelle.**

Point de méthode : pour montrer qu'un réel s n'est pas la borne supérieure, on fabrique soit un élément de la partie plus grand que s , soit un majorant plus petit que s .

Corrigé de l'exercice 20 : Théorème des segments emboîtés

1. L'hypothèse donne $a_n \leq a_{n+1}$, $b_{n+1} \leq b_n$ et $a_n \leq b_n$ pour tout n . Ainsi, (a_n) est croissante et (b_n) décroissante. Si $p \leq q$, alors $a_p \leq a_q \leq b_q$. Si $p > q$, alors $a_p \leq b_p \leq b_q$. **Dans les deux cas, $a_p \leq b_q$.**
2. L'ensemble $\{a_n\}$ est non vide, et majoré par b_0 d'après la question 1. Par l'axiome, α existe. D'une part, $a_n \leq \alpha$ pour tout n . D'autre part, chaque b_q majore $\{a_n\}$, donc $\alpha \leq b_q$, car α est le plus petit majorant. **Ainsi, $\alpha \in [a_n, b_n]$ pour tout n , et l'intersection des segments contient α .**
3. Soit β dans l'intersection. Pour tout n , α et β appartiennent à $[a_n, b_n]$, donc $|\alpha - \beta| \leq b_n - a_n$. En passant à la limite, $|\alpha - \beta| \leq 0$. **Donc $\beta = \alpha$, et l'intersection est réduite à $\{\alpha\}$.**
4. Soit x dans l'intersection. Alors $x > 0$, et $x < \frac{1}{n}$ pour tout $n \geq 1$. Par Archimède, il existe n tel que $\frac{1}{n} < x$, ce qui est contradictoire. **L'intersection est vide. Cela ne contredit pas la question 2, car les intervalles ne sont pas fermés.**
5. Prenons $a_n = d_n$ et $b_n = d'_n$, approximations décimales de $\sqrt{2}$. Ce sont des rationnels, et l'exercice 15 montre que $a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n$. Supposons qu'un rationnel q vérifie $d_n \leq q \leq d'_n$ pour tout n . Comme $\sqrt{2}$ est aussi dans $[d_n, d'_n]$, on a $|q - \sqrt{2}| \leq 10^{-n}$ pour tout n . Donc $q = \sqrt{2}$, ce qui est absurde. **Dans $\mathbb{Q}$, des segments emboîtés peuvent avoir une intersection vide.**

Corrigé de l'exercice 21 : Problème : sous-groupes additifs de $\mathbb{R}$

1. Comme $G \neq \{0\}$, il existe $g \in G$ non nul. Si $g > 0$, alors $g \in G_+$. Sinon, $-g \in G$ et $-g > 0$. Donc G_+ est non vide. De plus, G_+ est minoré par 0 . **Par le corollaire de l'axiome, $a = \inf G_+$ existe, et $a \geq 0$ car 0 est un minorant.**
2. On suppose $a > 0$.
 1. Supposons $a \notin G$. Par la caractérisation de la borne inférieure avec $\varepsilon = a$, il existe $g \in G_+$ tel que $g < 2a$. Comme $a \leq g$ et $a \notin G$, on a $a < g$. Appliquons encore la caractérisation avec $\varepsilon = g - a > 0$: il existe $g' \in G_+$ tel que $a < g' < g$. Alors $g - g' \in G$, car G est un groupe, et $0 < g - g' < 2a - a = a$. Ainsi, $g - g'$ est un élément de G_+ strictement inférieur à a . C'est absurde. **Donc $a \in G$.**
 2. Comme $a \in G$ et que G est stable par somme et par opposé, $ka \in G$ pour tout

$k \in \mathbb{Z}$. Donc $a\mathbb{Z} \subset G$. Réciproquement, soit $x \in G$ et $k = \left\lfloor \frac{x}{a} \right\rfloor$. Alors $k \leq \frac{x}{a} < k+1$, donc $0 \leq x - ka < a$. Or $x - ka \in G$. S'il était strictement positif, ce serait un élément de G_+ inférieur à a : c'est exclu. Donc $x = ka$.
Finalement, $G = a\mathbb{Z}$.

3. On suppose $a = 0$. Soient $x < y$. Comme $0 = \inf G_+$ et $y - x > 0$, il existe $g \in G_+$ tel que $g < y - x$. Posons $k = \left\lfloor \frac{x}{g} \right\rfloor + 1$. Alors $\frac{x}{g} < k \leq \frac{x}{g} + 1$, donc $x < kg \leq x + g < y$. Or $kg \in G$. **Ainsi, tout intervalle $]x, y[$ rencontre G : G est dense dans $\mathbb{R}$.**

4. Application.

- On a $0 = 0 + 0\sqrt{2} \in H$ et $1 \in H$, donc $H \neq \{0\}$. De plus, $(m + n\sqrt{2}) - (m' + n'\sqrt{2}) = (m - m') + (n - n')\sqrt{2} \in H$. **Donc H est un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$ non réduit à $\{0\}$.**
- Supposons $H = a\mathbb{Z}$ avec $a > 0$. Comme $1 \in H$ et $\sqrt{2} \in H$, il existe des entiers p et q tels que $1 = pa$ et $\sqrt{2} = qa$. Alors $p \neq 0$, et $\sqrt{2} = \frac{q}{p}$ serait rationnel : c'est absurde. D'après la question 2, on a donc $a = 0$. **Par la question 3, H est dense dans $\mathbb{R}$.**
- Par densité, l'intervalle $]0, 10^{-3}[$ contient un élément de H . **Il existe donc des entiers m, n tels que $0 < m + n\sqrt{2} < 10^{-3}$.** Par exemple, on peut vérifier que $m = -1393$ et $n = 985$ conviennent, car $985\sqrt{2} \approx 1393,00036$.

Point de méthode : la borne inférieure de G_+ résume toute la structure du groupe ; tout se joue sur la question « est-elle atteinte et non nulle ? ».

Corrigé de l'exercice 22 : Point fixe d'une application croissante

- Comme $f(0) \in [0, 1]$, on a $f(0) \geq 0$, donc $0 \in E$. De plus, $E \subset [0, 1]$ est majorée par 1. Par l'axiome, $s = \sup E$ existe. Enfin, $0 \in E$ donne $s \geq 0$, et 1 majore E donne $s \leq 1$. **Ainsi, s existe et $s \in [0, 1]$.**
- Soit $x \in E$. Alors $x \leq s$, donc $f(x) \leq f(s)$ par croissance. Comme $x \in E$, on a aussi

$x \leq f(x)$. Donc $x \leq f(s)$. Ainsi, $f(s)$ majore E . Or s est le plus petit majorant de E .
Par conséquent, $s \leq f(s)$.

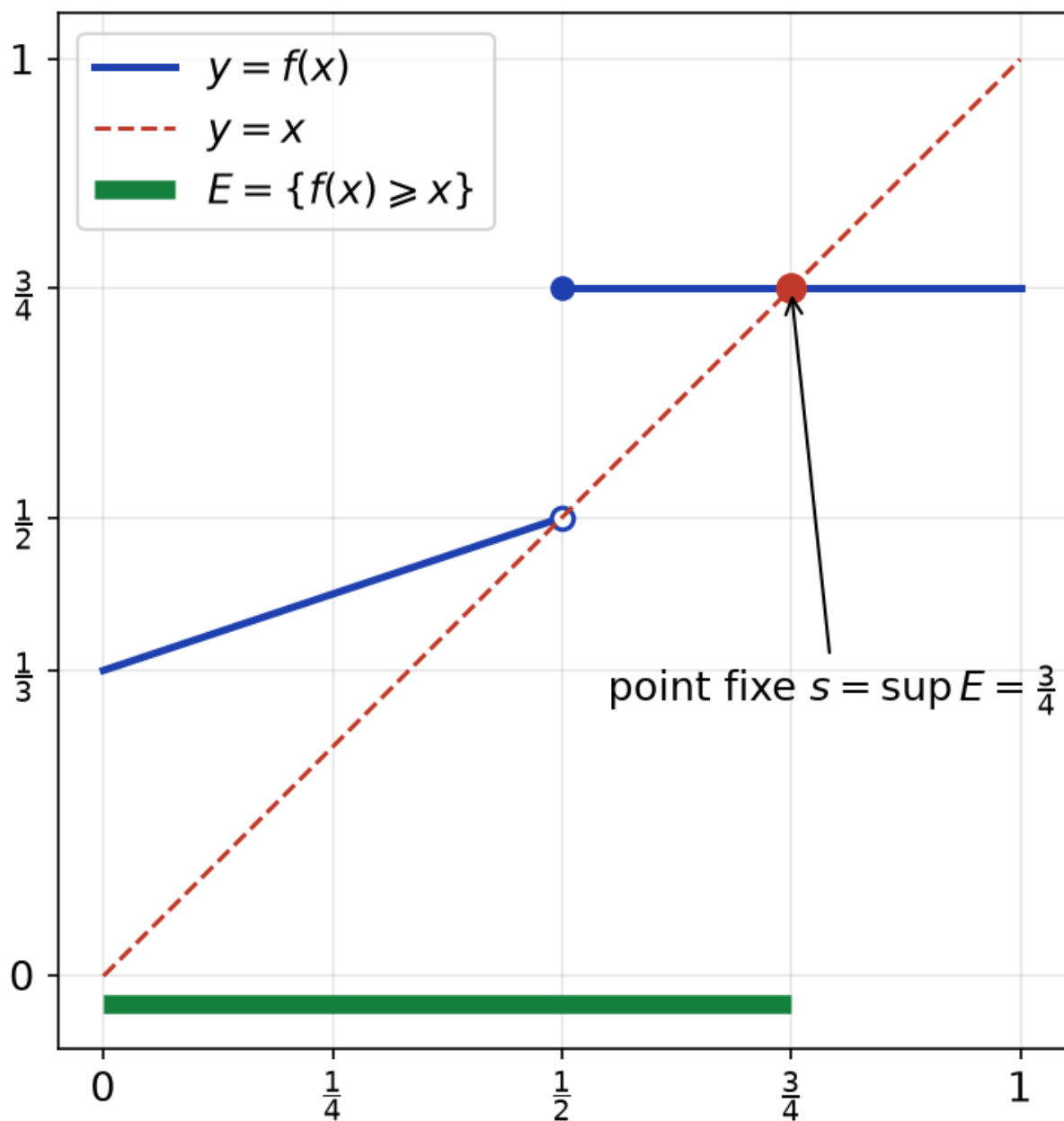
3. De $s \leq f(s)$, on déduit par croissance $f(s) \leq f(f(s))$. Autrement dit, le réel $f(s) \in [0, 1]$ vérifie $f(f(s)) \geq f(s)$: il appartient à E . Comme s majore E , on obtient $f(s) \leq s$.

Avec la question 2, on conclut $f(s) = s$: f admet un point fixe.

4. Sur $[0, \frac{1}{2}[$, f est affine croissante, à valeurs dans $[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}[$. Sur $[\frac{1}{2}, 1]$, elle est constante égale à $\frac{3}{4}$, qui dépasse toutes les valeurs précédentes. Donc f est croissante, à valeurs dans $[0, 1]$.
 Pour $x < \frac{1}{2}$, on a $f(x) \geq x \Leftrightarrow \frac{1}{3} \geq \frac{2x}{3} \Leftrightarrow x \leq \frac{1}{2}$: c'est toujours vrai. Pour $x \geq \frac{1}{2}$, on a $f(x) \geq x \Leftrightarrow x \leq \frac{3}{4}$. Donc $E = [0, \frac{3}{4}]$ et $s = \frac{3}{4}$. Enfin, sur $[0, \frac{1}{2}[$, l'équation $f(x) = x$ donne $x = \frac{1}{2}$, qui est exclu. **Ainsi, $E = [0, \frac{3}{4}]$, $s = \frac{3}{4}$, et l'unique point fixe est $\frac{3}{4}$.**

5. Posons $f(x) = 1$ si $x < \frac{1}{2}$ et $f(x) = 0$ si $x \geq \frac{1}{2}$. Cette application est décroissante, à valeurs dans $[0, 1]$. Si $x < \frac{1}{2}$, alors $f(x) = 1 \neq x$. Si $x \geq \frac{1}{2}$, alors $f(x) = 0 \neq x$.
Cette application décroissante n'a aucun point fixe.

La figure ci-dessous représente l'exemple de la question 4. Le graphe saute au-dessus de la diagonale en $\frac{1}{2}$, puis la coupe exactement en $s = \frac{3}{4}$, borne supérieure de E .



[Revenir aux énoncés des exercices](#)

Pour aller plus loin en L1

- Le cours : [nombres réels, cours de maths en L1](#)
- Les énoncés : [exercices de maths en L1 sur nombres réels](#)

- À maîtriser avant : [Logique, raisonnement et ensembles](#)
- Chapitre précédent : [Nombres complexes et trigonométrie](#)
- Chapitre suivant : [Suites numériques](#)
- Tester vos connaissances : [QCM de maths en L1 par chapitre](#)
- Le sommaire : [tous les chapitres de maths de L1](#) et la [licence de maths de L1 à L3](#)