

Nombres complexes

Exercice 1 : Calculs sous forme algébrique

1. Mettez sous forme algébrique $z_1 = (2 + 3i)(1 - i)$ et $z_2 = \frac{1 + 2i}{3 - 4i}$.
2. Calculez le module de z_2 de deux manières : à partir de sa forme algébrique, puis à l'aide de la propriété du module d'un quotient.
3. Calculez $(1 + i)^2$, puis déduisez-en $(1 + i)^8$. Calculez aussi i^{2026} .
4. Déterminez le complexe z tel que $2z + i\bar{z} = 3$.

Exercice 2 : Forme trigonométrique et valeurs exactes

On pose $z = 1 + i\sqrt{3}$ et $w = 1 - i$.

1. Écrivez z et w sous forme trigonométrique.
2. Écrivez $\frac{z}{w}$ sous forme trigonométrique, puis sous forme algébrique. Déduisez-en les valeurs exactes de $\cos\frac{7\pi}{12}$ et $\sin\frac{7\pi}{12}$.
3. Calculez z^{10} sous forme algébrique.
4. Déterminez les entiers naturels n tels que z^n soit un réel strictement positif.

Exercice 3 : Racines carrées sous forme algébrique

1. Déterminez, sous forme algébrique, les racines carrées de $-5 + 12i$, de $8 - 6i$ et de $-15 - 8i$.
2. Déterminez les racines carrées de $1 + i$ sous forme algébrique.
3. Déterminez-les aussi sous forme trigonométrique.
4. En comparant les deux résultats, déduisez-en que $\cos \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}$.

Exercice 4 : Équations du second degré à coefficients complexes

1. Résolvez dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - (3 + 4i)z - 1 + 7i = 0$.
2. Résolvez dans $\mathbb{C}$ l'équation $iz^2 - 3iz + 3i - 1 = 0$, puis vérifiez le résultat à l'aide de la somme et du produit des racines.
3. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Résolvez $z^2 - 2\cos(\theta)z + 1 = 0$.
4. Déterminez deux nombres complexes u et v dont la somme et le produit valent 1 . Donnez-les sous forme exponentielle.

Exercice 5 : Module, conjugaison et inégalité triangulaire

Dans tout l'exercice, z et w désignent des nombres complexes.

1. Démontrez l'identité du parallélogramme : $|z + w|^2 + |z - w|^2 = 2(|z|^2 + |w|^2)$.
Interprétez-la dans un parallélogramme.

- On suppose $|z| = |w| = 1$ et $zw \neq -1$. Montrez que $\frac{z+w}{1+zw}$ est un réel.
- Déterminez tous les complexes z tels que $|z| = 2$ et $|z + 3i| = 5$.
- Montrez que $|z| \leq |\operatorname{Re}(z)| + |\operatorname{Im}(z)| \leq \sqrt{2} |z|$.

Exercice 6 : Linéarisation et calcul d'intégrales

- Linéarisez $\cos^3 t$ et $\sin^4 t$.
- Linéarisez $\sin t \cos^2 t$.
- Déduisez-en la valeur de $\int_0^{\pi/2} \sin^4 t \, dt$.
- Calculez $\int_0^{\pi} \sin t \cos^2 t \, dt$ de deux façons : avec la linéarisation, puis en reconnaissant une dérivée.

Exercice 7 : Formule de Moivre et valeur de $\sin(\pi/10)$

- À l'aide de la formule de Moivre, exprimez $\cos(3t)$ en fonction de $\cos t$ et $\sin(3t)$ en fonction de $\sin t$.
- Exprimez $\cos(4t)$ comme un polynôme en $\cos t$.
- Exprimez $\tan(3t)$ en fonction de $\tan t$, en précisant pour quels réels t la formule est valable.
- On pose $t = \frac{\pi}{10}$. Justifiez que $\cos(3t) = \sin(2t)$. Déduisez-en que $\sin \frac{\pi}{10} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$.

Exercice 8 : Technique de l'angle moitié

1. Soit $\theta \in]-\pi, \pi[$. Déterminez le module et un argument de $1 + e^{i\theta}$. Que deviennent-ils si $\theta \in]\pi, 3\pi[$?
2. Soit $\theta \in]0, 2\pi[$. Déterminez le module et un argument de $1 - e^{i\theta}$.
3. Soit $\theta \in]0, \pi[$. Montrez que $\frac{1 + e^{i\theta}}{1 - e^{i\theta}}$ est imaginaire pur et calculez-le.
4. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Calculez $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cos(k\theta)$ et $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \sin(k\theta)$.

Exercice 9 : Sommes trigonométriques

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $t \in \mathbb{R}$, on pose $C_n(t) = \sum_{k=0}^n \cos(kt)$ et $S_n(t) = \sum_{k=0}^n \sin(kt)$.

1. Calculez $C_n(t)$ et $S_n(t)$ lorsque $t \in 2\pi\mathbb{Z}$.
2. On suppose $t \notin 2\pi\mathbb{Z}$. Calculez $C_n(t) + iS_n(t)$, puis donnez $C_n(t)$ et $S_n(t)$ sous forme factorisée.
3. On suppose $t \notin \pi\mathbb{Z}$. Déduisez-en une expression de $\sum_{k=0}^n \cos^2(kt)$.
4. Vérifiez la formule de la question 3 pour $n = 1$ et $t = \pi/3$.

Exercice 10 : Racines cinquèmes de l'unité et $\cos(2\pi/5)$

On pose $\omega = e^{2i\pi/5}$, puis $a = \omega + \omega^4$ et $b = \omega^2 + \omega^3$.

1. Montrez que $1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 = 0$.
2. Montrez que $a = 2\cos\frac{2\pi}{5}$ et $b = 2\cos\frac{4\pi}{5}$.
3. Calculez $a + b$ et ab . Déduisez-en a et b , puis la valeur exacte de $\cos\frac{2\pi}{5}$.
4. Déduisez-en la valeur exacte de $\cos\frac{\pi}{5}$.

Exercice 11 : Équations $z^n = a$

1. Résolvez $z^3 = -8i$. Donnez les solutions sous forme algébrique et représentez-les dans le plan complexe.
2. Résolvez $z^4 = -4$ et représentez les solutions.
3. Déduisez de la question 2 une factorisation de $z^4 + 4$ en produit de deux trinômes du second degré à coefficients réels.
4. Résolvez l'équation $z^4 = \bar{z}$. On pourra commencer par déterminer les modules possibles.

Exercice 12 : Une équation de degré $n - 1$

Soit $n \geq 2$ un entier. On considère l'équation $(E): (z + 1)^n = (z - 1)^n$.

1. Montrez que 1 n'est pas solution, puis que (E) équivaut à $\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^n = 1$.
2. Soit $u \in \mathbb{U}_n$. Résolvez l'équation $\frac{z+1}{z-1} = u$. Pour quelle valeur de u n'a-t-elle pas de solution ?
3. À l'aide de la technique de l'angle moitié, montrez que les solutions de (E) sont les nombres

$z_k = -i \frac{\cos(k\pi/n)}{\sin(k\pi/n)}$, pour $1 \leq k \leq n-1$, et qu'elles sont deux à deux distinctes.

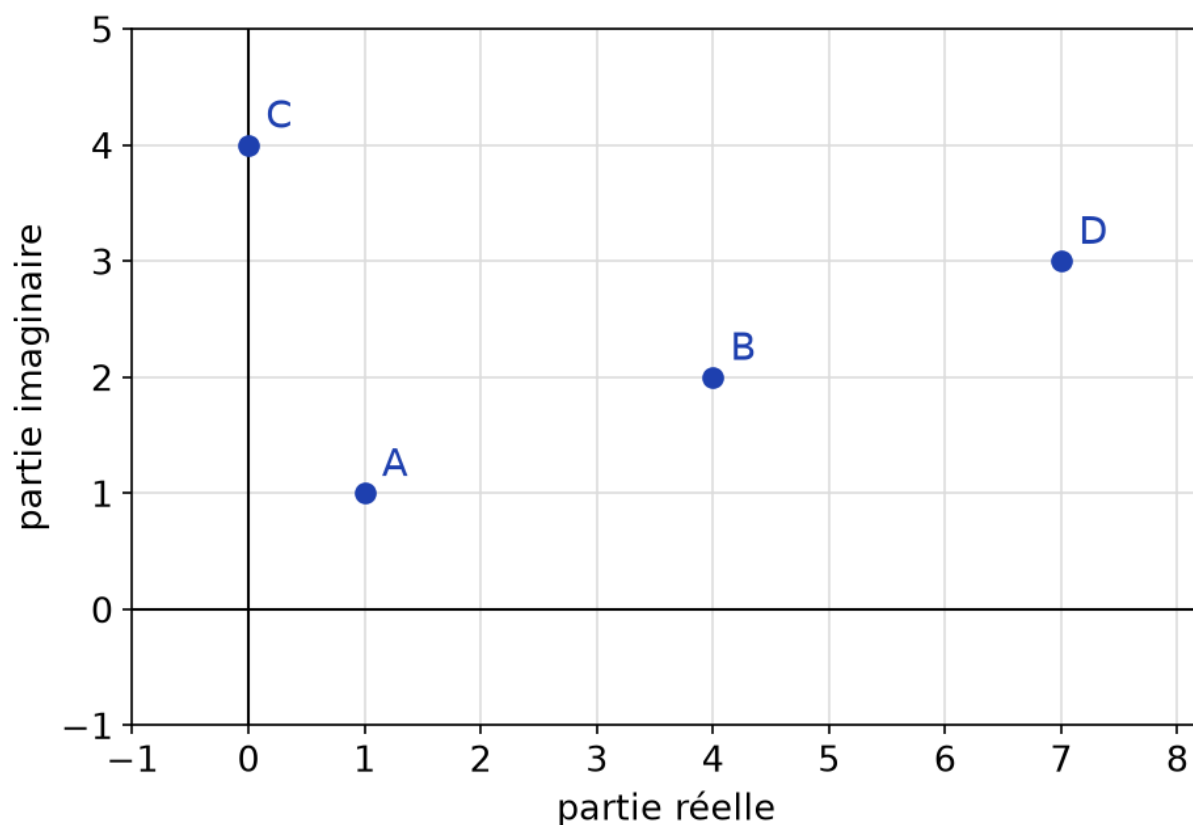
4. Retrouvez directement, sans calcul de racines, que toute solution de (E) est imaginaire pure.

Exercice 13 : Exponentielle complexe

1. Résolvez dans $\mathbb{C}$ les équations $e^z = 1 + i\sqrt{3}$, $e^z = -3$ et $e^z = -2i$.
2. Résolvez dans $\mathbb{C}$ l'équation $e^{2z} - (1+i)e^z + i = 0$.
3. Déterminez l'ensemble des complexes z tels que e^z soit réel, puis tels que e^z soit un réel strictement négatif.
4. Existe-t-il un complexe z tel que $e^z = 0$? Justifiez.

Exercice 14 : Triangle rectangle, alignement et triangles équilatéraux

Dans le plan complexe, on considère les points A , B , C , D d'affixes $a = 1 + i$, $b = 4 + 2i$, $c = 4i$ et $d = 7 + 3i$, placés sur la figure ci-dessous.



1. Calculez $\frac{c-a}{b-a}$. Déduisez-en la nature du triangle ABC .
2. Montrez que les points A , B et D sont alignés.
3. Déterminez les affixes des points E et E' tels que les triangles ABE et ABE' soient équilatéraux.
4. Calculez l'aire du triangle ABC .

Exercice 15 : Lieux géométriques

On note A et B les points d'affixes i et -1 . Pour tout complexe $z \neq -1$, on pose $Z = \frac{z-i}{z+1}$ et on note M le point d'affixe $z = x + iy$, avec x, y réels.

1. Calculez les parties réelle et imaginaire de Z en fonction de x et y .

- Déterminez l'ensemble $\mathcal{D}$ des points M tels que Z soit réel.
- Déterminez l'ensemble $\mathcal{C}$ des points M tels que Z soit imaginaire pur.
- Déterminez l'ensemble $\mathcal{M}$ des points M tels que $|Z| = 1$.
- Retrouvez géométriquement ces trois ensembles à l'aide des vecteurs $\overrightarrow{BM}$ et $\overrightarrow{AM}$.

Exercice 16 : Similitudes directes

On considère les applications du plan définies en affixes par $f(z) = (1+i)z + 2-i$, $g(z) = iz + 1 + i$ et $h(z) = -2z + 3$.

- Déterminez la nature et les éléments caractéristiques de g et de h .
- Montrez que f possède un unique point fixe Ω . Donnez le rapport et l'angle de f .
- On note O, I, K, J les points d'affixes $0, 1, 1+i$ et i . Déterminez les images de ces points par f . Quelle est la nature du quadrilatère obtenu ?
- Déterminez l'expression de $g \circ f$, puis sa nature et ses éléments caractéristiques.
- Déterminez la similitude directe s telle que $s(0) = 1$ et $s(1) = 1+i$, puis ses éléments caractéristiques.

Exercice 17 : Une somme de racines septièmes de l'unité

On pose $\omega = e^{2i\pi/7}$, $S = \omega + \omega^2 + \omega^4$ et $T = \omega^3 + \omega^5 + \omega^6$.

- Montrez que $T = \overline{S}$.

2. Calculez $S + T$ et ST .

3. Montrez que $\operatorname{Im}(S) = \sin\frac{2\pi}{7} + \sin\frac{4\pi}{7} - \sin\frac{\pi}{7}$, puis que $\operatorname{Im}(S) > 0$.

4. Déduisez-en la valeur exacte de S .

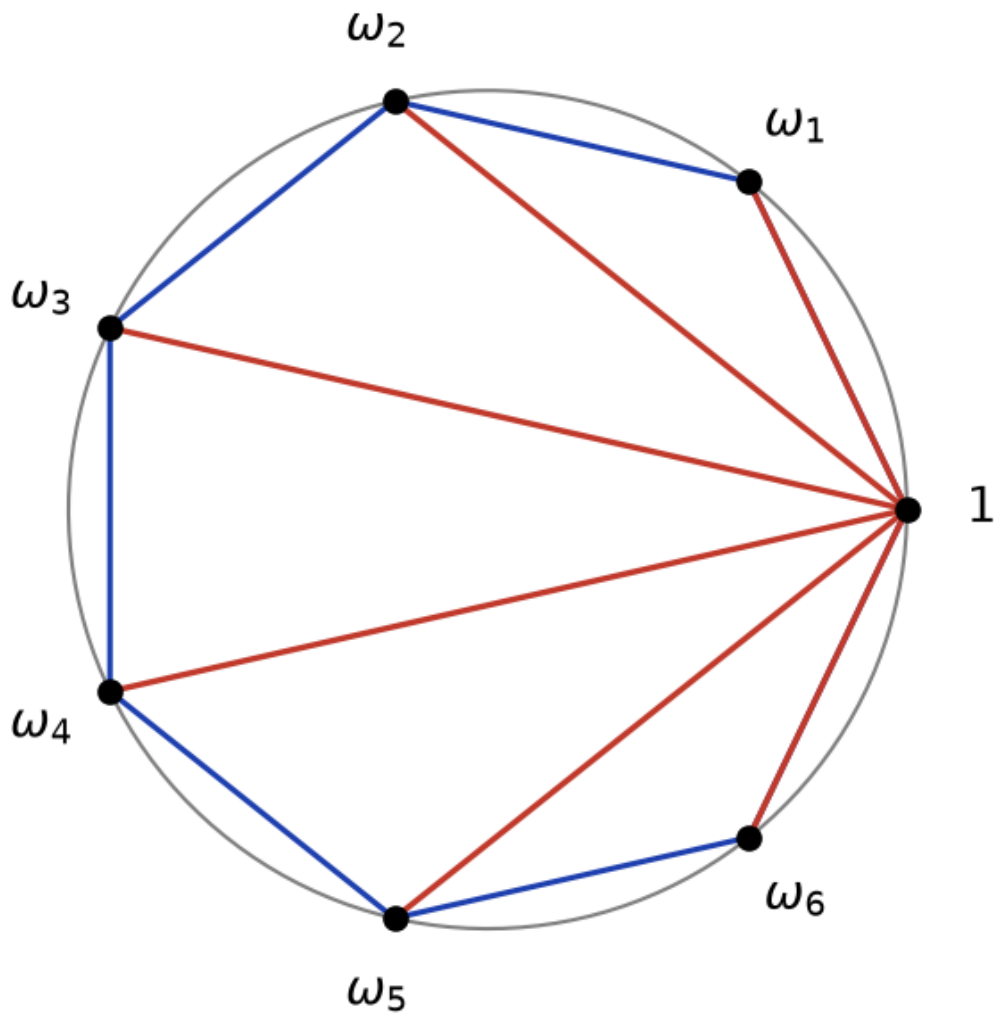
5. Déduisez-en les valeurs de $\cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{4\pi}{7} + \cos\frac{8\pi}{7}$ et de $\sin\frac{2\pi}{7} + \sin\frac{4\pi}{7} - \sin\frac{\pi}{7}$.

Exercice 18 : Problème, produit de sinus et polygone régulier

Soit $n \geq 2$ un entier. On note $\omega_k = e^{2ik\pi/n}$ pour $0 \leq k \leq n-1$. On admet, en attendant le chapitre sur les polynômes, que pour tout complexe z :

$$1 + z + z^2 + \dots + z^{n-1} = \prod_{k=1}^{n-1} (z - \omega_k).$$

La figure ci-dessous représente, pour $n = 7$, les segments qui joignent le point d'affixe 1 aux autres sommets du polygone régulier.



cas $n = 7$: segments reliant 1 aux ω_k

1. Vérifiez l'égalité admise dans le cas $n = 3$, en notant $j = e^{2i\pi/3}$.

2. Déduisez de l'égalité admise que $\prod_{k=1}^{n-1} (1 - \omega_k) = n$.

3. Pour $1 \leq k \leq n - 1$, montrez que $|1 - \omega_k| = 2\sin\frac{k\pi}{n}$.

4. Déduisez-en que $\prod_{k=1}^{n-1} \sin\frac{k\pi}{n} = \frac{n}{2^{n-1}}$.

5. Interprétez ce résultat pour le polygone régulier de la figure.

6. Vérifiez directement la formule pour $n = 6$.

Exercice 19 : Coefficients binomiaux de trois en trois

Soit $n \geq 1$ un entier et $j = e^{2i\pi/3}$. On pose

$$A_n = \sum_{0 \leq 3k \leq n} \binom{n}{3k} = \binom{n}{0} + \binom{n}{3} + \binom{n}{6} + \dots$$

1. Soit $p \in \mathbb{N}$. Montrez que $1 + j^p + j^{2p}$ vaut 3 si p est multiple de 3, et 0 sinon.
2. Montrez que $3A_n = 2^n + (1 + j)^n + (1 + j^2)^n$.
3. Écrivez $1 + j$ et $1 + j^2$ sous forme exponentielle.
4. Déduisez-en que $A_n = \frac{1}{3} \left(2^n + 2 \cos \frac{n\pi}{3} \right)$.
5. Vérifiez la formule pour $n = 4$ et $n = 6$.

Le corrigé des exercices

Chaque exercice est corrigé en détail, question par question, sur la page suivante.



Pour aller plus loin en maths sup

- Le cours : [nombres complexes, cours de maths sup](#)
- À maîtriser avant : [Calculs algébriques : sommes, produits, inégalités](#), [Trigonométrie et fonctions circulaires](#)
- Chapitre précédent : [Trigonométrie et fonctions circulaires](#)
- Chapitre suivant : [Fonctions usuelles et techniques de dérivation](#)
- Le même thème en L1 : [nombres complexes, exercices de maths en L1](#)
- Tester vos connaissances : [QCM de maths sup par chapitre](#)
- Le sommaire : [tous les chapitres de maths sup](#) et les [chapitres de maths spé](#)