Nombres complexes

EXERCICE 1 :

Mettre les nombres complexes sous la forme a + ib (a et b réels).

1. $(2-5i)(3+i)$
2. $\dfrac{1}{i}$
3. $\dfrac{3+2i}{1-i}$
4. $1+\dfrac{i-1}{i+1}$
5. $(1+i)^3$
6. $1+i+i^2+i^3+i^4+i^5$
7. $\dfrac{1+2i}{(2+i)(2-\sqrt{3}i)}$

EXERCICE 2 :

Soit z=x+iy un nombre complexe (x et y réels).
On demande de calculer la partie réelle et la partie imaginaire de Z puis de déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que Z soit réel ou imaginaire pur.

1. $Z=\dfrac{z-i}{z+1-2i}$
2. $Z=\dfrac{i(z+1)}{z-2i}$
3. $Z=\dfrac{2+\overline{z}}{1+\overline{z}}$

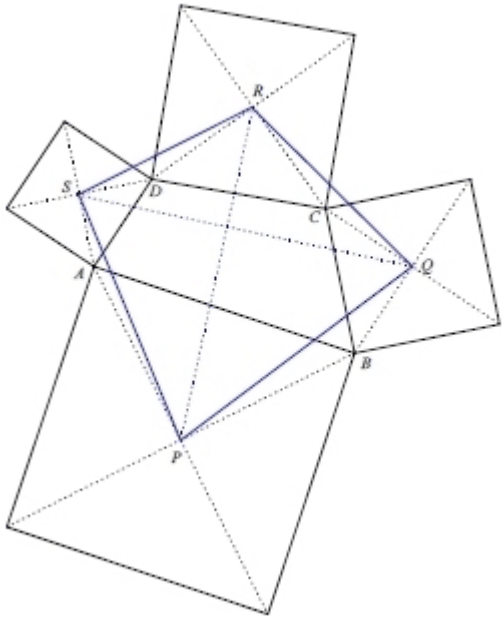
EXERCICE 3 :

Soit $j=-\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.
Calculer $j^2; j^3; 1+j+j^2$.

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

EXERCICE 4 : THÉORÈME DE VON AUBEL.

On considère un quadrilatère ABCD de sens direct.
On construit quatre carrés de centres respectifs P, Q, R et S qui s'appuient extérieurement sur les côtés [AB], [BC], [CD] et [DA] du quadrilatère ABCD (voir figure).
Le but du problème est de démontrer que les diagonales du quadrilatère PQRS sont perpendiculaires et de même longueur.



On note a, b, c, d, p, q, r et s les affixes respectives des points A, B, C, D, P, Q, R et S dans un repère orthonormé $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2})$ de sens direct.

1. Démontrer que dans le carré construit sur [AB], on a $p = \dfrac{a - ib}{1 - i}$.

2. Etablir des relations analogues pour p, q, r et s en raisonnant dans les trois autres carrés.

3. Calculer $\dfrac{s - q}{r - p}$ puis conclure.

EXERCICES 5 : THÉORÈME DE NAPOLÉON.

On munit le plan d'un repère $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2})$ de sens direct.

Partie A : des caractérisations du triangle équilatéral.
On note $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$.Soient U, V et W trois points du plan d'affixes respectives u, v, w.

1. Démontrer l'équivalence suivante : UVW est équilatéral de sens direct $\Leftrightarrow, u - v = -j^2(w - v)$.

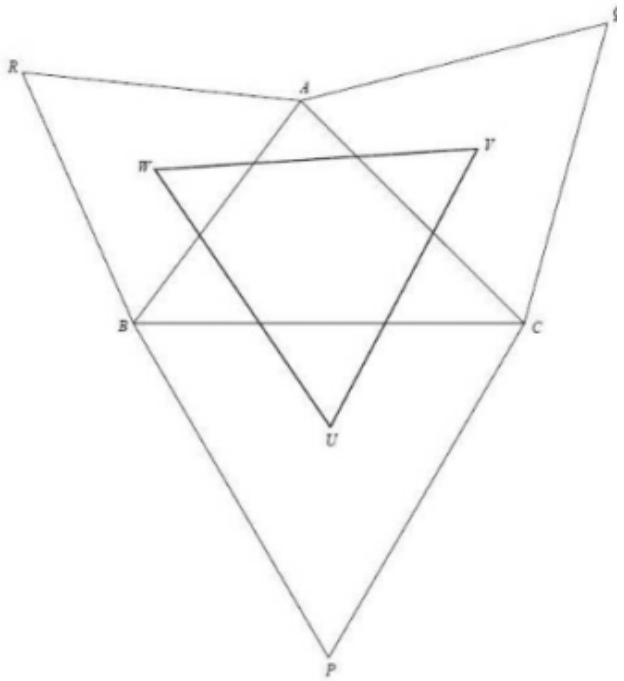
2. Démontrer l'équivalence suivante : UVW est équilatéral de sens direct $\Leftrightarrow, u + jv + j^2w = 0$.

Partie B : démonstration du théorème de Napoléon.

ABC est un triangle quelconque de sens direct.

On construit les points P, Q et R tels que BPC, CQA et ARB soient des triangles équilatéraux de sens direct.

On note U, V, W les centres de gravité de BPC, CQA et ARB respectivement.
Démontrer que UVW est équilatéral de même centre de gravité que ABC.



EXERCICE 6 : MONTRER QU'UN COMPLEXE EST UN RÉEL OU IMAGINAIRE PUR.

Démontrer les équivalences suivantes :

1. $Z\, reel \Leftrightarrow, Z = \overline{Z}.$
2. $Z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow, (Z = 0\, ou\, arg(Z) = 0[\pi]).$
3. $Z\, imaginaire\, pur \Leftrightarrow, Z + \overline{Z} = 0.$

EXERCICE 7 : RACINES DE L'UNITÉ ET APPLICATIONS.

Soit un entier naturel.

On appelle racine nièmes de l'unité tout nombre complexe tel que $z^n = 1$.
On note U_n l'ensemble des racines nièmes de l'unité.Par exemple $U_2 =, \{, -1; 1, , \}$.
1.Démontrer que $U_n = e^{\frac{2ik\pi}{n}}, k \in, \{, 0, 1, 2, ..., n-1, , \}$.
démontrer que la somme des racines nièmes de l'unité est nulle.
Démontrer que, dans un repère orthonormal direct $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2})$, les images $A_k(0 < k < n-1)$ des nombres $w_k = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$, sont les sommets d'un polygone régulier.

EXERCICE 8 : LIEU DE POINTS.

Soit z un nombre complexe différent de 1.On note M le point du plan complexe d'affixe z.
On pose $Z = \dfrac{z+1}{z-1}$.
Déterminer l'ensemble :
1.E des points M tels que Z soit réel.
2.F des points M tels que $|Z\ | = 1$.
3.G des points M tels que $arg(Z) = \dfrac{\pi}{2}[2\pi]$.

EXERCICE 9 : IDENTITÉ DU PARALLÉLOGRAMME.

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

Démontrer que pour tous nombres complexes Z et Z ', on a :
$, |Z+Z'\ |^2 + \ |Z-Z'\ |^2 = 2, |Z\ , |^2 + 2\,|Z'\ |^2$

<u>Indication :</u> utiliser la relation $|Z\,|^2 = Z\overline{Z}$
Interpréter géométriquement.

EXERCICE 10 : UTILISATION DES NOMBRES COMPLEXES.

Soient a, b nombres entiers relatifs.On suppose que a et b sont la somme de deux carrés :
il existe x, y $\in, \mathbb{Z}$ tels que $a = x^2 + y^2$ et il existe $z, t \in, \mathbb{Z}$ tels que $b = z^2 + t^2$.
Démontrer que le produit ab est encore la somme de deux carrés.

Indice : écrire $(x^2 + y^2) =, |x + iy, , |^2$.

EXERCICE 11 : ÉCRITURE COMPLEXE D'UNE TRANSFORMATION.

1. Soit f la transformation du plan complexe qui à M(z) associe M ' (z) tel que $z' = az + 3i$.
Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de f lorsque a = 2, puis lorsque a = - i.
2. On donne A(1), B(2+i), A ' (2i) et B ' (1+i).
Vérifier que AB=A'B'.
Démontrer qu'il existe une unique rotation r telle que r(A) = A' et r(B) = B'.La déterminer..

EXERCICE 12 : CALCUL DE COSINUS ET SINUS.

1.Résoudre dans $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$, le système suivant :

Invalid Equation

2. On pose $w = e^{\frac{2i\pi}{5}}$.
Démontrer que $w^0 + w^1 + w^2 + w^3 + w^4 + w^5 = 0$.
En déduire, à l'aide des formules d'Euler, que :
$cos\,(\,\frac{2\pi}{5}\,) + cos\,(\,\frac{4\pi}{5}\,) = -\frac{1}{2}$

EXERCICE 13 : EXTRAIT DU BAC.

Soient les nombres complexes $z_1 =$ et $z_2 =$.
1. Mettre sous forme trigonométrique z_1 , z_2 , $Z = \frac{z_1}{z_2}$.
En déduire que :
$cos(\frac{\pi}{12}) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ et $sin(\frac{\pi}{12}) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.
3. On considère l'équation d'inconnue réelle x :

$(\sqrt{6}+\sqrt{2})cosx + (\sqrt{6}-\sqrt{2})sinx =.$

a. Résoudre cette équation dans $\mathbb{R}$.
b. Placer les points images des solutions sur le cercle trigonométrique .

EXERCICE 14 - SOMME DE MODULES

On considère un nombre complexe z de module 1 (|z|=1)
Montrer que :
$|1 + z|^2 + |1 - z|^2 = 4$

EXERCICE 15 -FORME ALGÉBRIQUE

I.1)Quelle est la forme la forme algébrique de $\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{2}}e^{i\frac{\pi}{4}}$?

2) Quelle est la forme algébrique de $\frac{2}{3}\frac{e^{i\frac{\pi}{2}}}{e^{i\frac{\pi}{3}}}$?

II.1)Factoriser astucieusement Z = z²+9

2)Idem Z=z²+5

3)Z = z²+1.

III.1) Quelle est la transformation associée à la fonction $z \mapsto z + a$ avec z et a appartenant à $\mathbb{C}$, z de la forme x+iy, x, y appartiennent à $\mathbb{R}$

2) Quelle est la transformation associée à la fonction $z \mapsto -z$ avec z appartient à $\mathbb{C}$

3) Quelle est la transformation associée à la fonction $z \mapsto iz$avec z appartient à $\mathbb{C}$

EXERCICE 16 -NOMBRES COMPLEXES EXTRAIT DE SUJET DU BAC S

Le plan complexe est rapporté est rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{u}, \vec{v})$

Soit (C) le cercle de centre O et de rayon 1.

On considère le point A de (C) d'affixe $z_A = e^{i\frac{\pi}{3}}$

1) Déterminer l'affixe z_B du point B image de A par la rotation de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{3}$.

Déterminer l'affixe z_C du point C image de B par la rotation de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{3}$.

2. a) Justifier que (C) est le cercle circonscrit au triangle ABC.

Construire les points A, B et C sur la feuille de papier millimétré.

b) Quelle est la nature du triangle ABC ? Justifier.

3) Soit h l'homothétie de centre O et de rapport −2.

a) Compléter la figure en plaçant les points P, Q et R images respectives des points A, B et C par h.

b) Quelle est la nature du triangle P QR ? Justifier.

4) Dans cette question, le candidat est invité à porter sur sa copie les étapes de sa démarche même si elle n'aboutit pas.

a) Donner l'écriture complexe de h.

b) Calculer $z_A + z_B + z_C$.

En déduire que A est le milieu du segment [QR].

c) Que peut-on dire de la droite (QR) par rapport au cercle (C) ?

EXERCICE 17 :

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

On prendra pour le dessin $\|\vec{u}\| = 4\,cm$.

M est un point d'affixe z non nul.

On désigne par M′ le point d'affixe $z' = -\frac{1}{z}$.

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

où z désigne le conjugué du nombre complexe z.

Partie A. Quelques propriétés

1) Soit z un nombre complexe non nul.
Déterminer une relation entre les modules de z et z′, puis
une relation entre les arguments de z et z′.

2) Démontrer que les points O, M et M′ sont alignés.

3) Démontrer que pour tout nombre complexe z non nul, on a l'égalité :

$$\overline{z'+1} = \frac{1}{z}(z-1)$$

Partie B. Construction de l'image d'un point

On désigne par A et B les deux points d'affixes respectives 1 et −1.

On note C l'ensemble des points M du plan dont l'affixe vérifie :

|z − 1| = 1.

1) Quelle est la nature de l'ensemble C ?

2) Soit M un point de C d'affixe z, distinct du point O.

a) Démontrer que |z′ + 1| = |z′|.

Interpréter géométriquement cette égalité.

b) Est-il vrai que si z′ vérifie l'égalité |z′ + 1| = |z′'|, alors z vérifie l'égalité |z − 1| = 1 ?

3) Tracer l'ensemble C sur une figure.
Si M est un point de C , décrire et réaliser la construction du point M′ .
.

EXERCICE 18 -NOMBRES COMPLEXES BAC S PONDICHÉRY
Cet exercice contient une restitution organisée de connaissances.

Partie A

On suppose connus les résultats suivants :

1. Dans le plan complexe, on donne par leurs affixes z_A, z_B et z_C trois points A, B et C.

Alors $|\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C}| = \frac{CB}{CA}$ $et\, arg(\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C}) = (\vec{CA}, \vec{CB})\ [2\pi]$

2. Soit z un nombre complexe et α un réel : $z = e^{i\theta}$

si et seulement si |z| = 1 et arg(z) = θ + 2kπ, où
k est un entier relatif.

Démonstration de cours :

Démontrer que la rotation r d'angle α et de centre Ω d'affixe ω est la

transformation du plan qui à tout point M d'affixe z associe le point M′ d'affixe z′

tel que $z' - w = e^{i\alpha}(z - w)$

Partie B

Dans un repère orthonormal direct du plan complexe $(O, \vec{u}, \vec{v})$ d'unité graphique 2 cm,
on considère les points A, B, C et D d'affixes respectives :

$z_A = -\sqrt{3} - i\,;\, z_B = 1 - i\sqrt{3}, z_C = \sqrt{3} - i, z_D = -1 + i\sqrt{3}$

3.
1. a. Donner le module et un argument pour chacun des quatre nombres complexes z_A, z_B , z_C et z_D.

b. Comment construire à la règle et au compas les points A, B, C et D dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$?
c. Quelle est la nature du quadrilatère ABCD ?

2. On considère la rotation r de centre B et d'angle $-\frac{\pi}{3}$.
Soient E et F les points du plan définis par : E = r(A) et F = r(C).

a. Comment construire à la règle et au compas les points E et F dans le repère précédent ?

b. Donner l'écriture complexe de r.

c. Déterminer l'affixe du point E.

EXERCICE 19 -EQUATIONS COMPLEXES BAC S FRANCE

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal $(O, \vec{u}, \vec{v})$; l'unité graphique est 1 cm.

1) Résoudre, dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation :

$z^2 + 4z + 8 = 0$

On donnera les solutions sous forme algébrique, puis sous forme trigonométrique.

2) On note A et B les points du plan d'affixes respectives :

a = 2 − 2i et b = −a.

a) Déterminer l'affixe c du point C, image du point B par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

b) On note D l'image de C par la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

Démontrer que l'affixe d du point D est d = 2 − 6i.

c) Placer les points C et D sur le graphique.
Quelle est la nature du quadrilatère ABCD ?

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

3) α étant un nombre réel non nul, on désigne par G_α le barycentre du système :

{(A, 1),(B, −1),(C,α)}.

a) Exprimer le vecteur $\vec{CG_\alpha}$ en fonction du vecteur $\vec{BA}$.

b) En déduire l'ensemble des points G_α lorsque α décrit l'ensemble des réels non nuls.

Construire cet ensemble.

c) Pour quelle valeur de α a-t-on G_α = D ?

4) On suppose dans cette question que α= 2.

Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

Déterminer et construire l'ensemble des points M du plan tels que :

$$\|\vec{MA} - \vec{MB} + 2\vec{MC}\| = 4\sqrt{2}$$

EXERCICE 20 -ETUDE D'UNE APPLICATION

La feuille annexe donnée portera les constructions demandées au cours de l'exercice.

Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormal direct$(O, \vec{u}, \vec{v})$, le point A a pour affixe i.
On nomme f l'application qui, à tout point M d'affixe z avec$z \neq i$ associe le point M′
d'affixe z′' telle que :

$$z' = \frac{-z^2}{z - i}$$

Le but de l'exercice est de construire géométriquement le point M′
connaissant le point M.

1) Un exemple.
On considère un point K d'affixe 1 + i.

a) Placer le point K.

b) Déterminer l'affixe du point K' image de K par f.
c) Placer le point K′.

2) Des points pour lesquels le problème ne se pose pas.

a) On considère le point L d'affixe $\frac{i}{2}$.
Déterminer son image L′ par f. Que remarque-t-on ?

b) Un point est dit invariant par f s'il est confondu avec son image.
Démontrer qu'il existe deux points invariants par f dont on déterminera les affixes.

3) Un procédé de construction.

On nomme G l'isobarycentre des points A, M, et M′ , et g l'affixe de G.

a) Vérifier l'égalité $g = \dfrac{1}{3(z-i)}$.

b) En déduire que si M est un point du cercle de centre A de rayon r, alors G est un point du cercle de centre O de rayon $\dfrac{1}{3r}$.

c) Démontrer que$arg\, g =$.

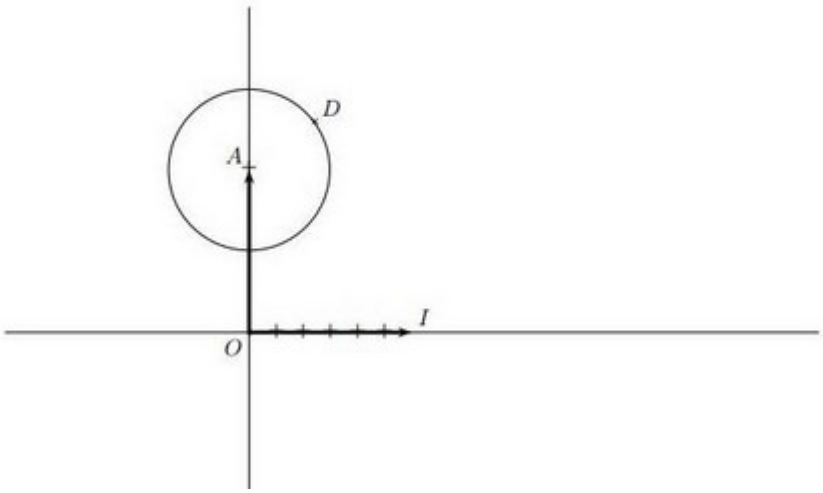
d) Sur la feuille annexe, on a marqué un point D sur le cercle de centre A et de rayon $\dfrac{1}{2}$.
On nomme D′ l'image de D par f.

Déduire des questions précédentes la construction du point D′

et la réaliser sur la figure annexe .

Document annexe :

Sur la figure ci-dessous le segment $[OI]$ tel que $\vec{u} = \overrightarrow{OI}$ est partagé en six segments d'égale longueur.



EXERCICE 21 - AFFIRMATIONS VRAIES OU FAUSSES

L'exercice comporte quatre affirmations repérées par les lettres a), b), c) et d). Indiquer pour chacune d'elles si elle est vraie ou fausse.
Soient A le point d'affixe a=1-i et B le point d'affixe $b = 2i - 3$.
A tout point M d'affixe z, avec z différent de b, on associe le point M' d'affixe:
$Z = \dfrac{z-1+i,}{z+3-2i}$.

a) L'ensemble des points M d'affixe z tels que Z soit réel est le segment [AB].
b)Pour tout z différent de -3+2i et de -3-2i, on obtient la forme algébrique de Z par le calcul:
$\dfrac{(z-1+i)(z+3+2i),}{(z+3-2i)(z+3+2i)}$.
c)L'ensemble des point M' d'affixe z tels que M' soit un point de l'axe des ordonnées et le cercle d'équation $(x+1)^2, +, (y-\dfrac{1}{2})^2 = \dfrac{25}{4}$, sauf le point B.
d) Soit z_0 une solution de l'équation $Z = \dfrac{, z-1+i,}{z+3-2i} = i$ (on admet l'existence d'une telle solution).
Le point M_0 d'affixe z_0 est un point de la médiatrice de [AB]

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

EXERCICE 22 - COMPLEXES, ARGUMENT ET MODULE

Le plan complexe est muni du repère orthonormal direct (O,u,v) unité graphique 2 cm.
On appelle A et B les points du plan d'affixes respectives a=1 et b=-1
On considère l'application *f* qui, a tout point M différent du point B, d'affixe z, fait correspondre le point M' d'affixe z' définie par $z' = \dfrac{z-1}{z+1}$.

1. Déterminer les points invariants de f.
2. a) montrer que, pour tout nombre complexe z différent de -1, $(z'-1)(z+1) = -2$.
b) En déduire une relation entre $|z'-1|$ et $|z+1|$, puis entre arg (z'-1) et arg (z+1), pour tout nombre complexe z diffèrent de -1.
3. Montrer que si M appartient au cercle (C) de centre B et de rayon 2, alors M' appartient au cercle (C') de centre A et de rayon 1.
4.Soit le point P d'affixe $P = -2 + i\sqrt{3}$.
a) Déterminer la forme trigonométrique de (p+1)
b) montrer que le point P appartient au cercle (C)

EXERCICE 23 - PROBLÈME.

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct (O; u, v) (unité graphique: 4cm).
On note A, B et C les points d'affixes respectives 2 i, – 1 et i.

On considère l'application f qui, à tout point M diffèrent de A et d'affixe z, associe le point M' d'affixe z ' tel que :

$$z' = \frac{z+1}{z-2i}$$

1.

a. Faire une figure que l'on complétera au cours de l'exercice.

b. Déterminer l'affixe du point C', image de C par f . Quelle est la nature du quadrilatère ACBC' ?

c. Montrer que le point C admet un unique antécédent par f , que l'on appellera C". Quelle est la nature du triangle BCC" ?

2. Donner une interprétation géométrique du module et d'un argument de z ' (lorsque celui-ci existe).

3.Déterminer en utilisant la question précédente, les ensembles suivants :

a. l'ensemble E_0 des point M dont les images par f ont pour affixe un nombre réel strictement négatif;

b. l'ensemble E_1 des point M dont les images par f ont pour affixe un nombre imaginaire pur non nul;

c. l'ensemble E_2 des points M dont les images appartiennent au cercle de centre O et de rayon 1.

EXERCICE 24.

Rechercher tous les couples (z_1, z_2) de nombres complexes satisfaisant aux conditions :

$$\begin{cases} z_1 z_2 = \frac{1}{2} \\ z_1 + 2z_2 = \sqrt{3} \end{cases}.$$

Donner la forme trigonométrique de chacun des nombres ainsi obtenus .

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.