

Nombres complexes

Exercice 1 : Calculs sous forme algébrique

Dans cet exercice, tous les résultats sont demandés sous forme algébrique $a + ib$ avec a, b réels.

1. Calculer $(2 + 3i)(1 - i)$, puis son module.
2. Calculer $\frac{1 + 2i}{3 - 4i}$ et en déduire son module.
3. Calculer $(1 + i)^4$ et i^{2026} .
4. Déterminer le complexe z tel que $z + 2\bar{z} = 3 - i$.

Exercice 2 : Construction de $\mathbb{C}$ à partir de $\mathbb{R}^2$

On munit $\mathbb{R}^2$ de l'addition usuelle et de la multiplication définie par

$$(a, b) \times (c, d) = (ac - bd, ad + bc).$$

1. Montrer que cette multiplication est commutative et que $(1, 0)$ en est l'élément neutre.
2. Calculer $(0, 1) \times (0, 1)$.
3. Soit $(a, b) \neq (0, 0)$. Déterminer l'inverse de (a, b) et vérifier le résultat.
4. On suppose qu'il existe sur $\mathbb{C}$ une relation d'ordre total $\preceq$ telle que : si $0 \preceq x$ et $0 \preceq y$, alors $0 \preceq xy$; et si $x \preceq y$, alors $x + z \preceq y + z$. Montrer que tout carré vérifie $0 \preceq x^2$, puis aboutir à une contradiction.

Exercice 3 : Module et inégalité triangulaire

1. Montrer que pour tous $z, w \in \mathbb{C}$, $|z + w|^2 + |z - w|^2 = 2(|z|^2 + |w|^2)$. Interpréter géométriquement cette égalité.
2. Montrer que pour tous $z, w \in \mathbb{C}$, $||z| - |w|| \leq |z - w|$.
3. Soit z un complexe tel que $|z| \leq 1$. Montrer que $1 \leq |z^3 - 2z + 4| \leq 7$.
4. Soient z, w non nuls tels que $|z + w| = |z| + |w|$. Montrer que z / w est un réel strictement positif.

Exercice 4 : Ensembles de points du plan

Déterminer et représenter l'ensemble des points M d'affixe z qui vérifient chacune des conditions suivantes.

1. $|z - 1| = |z + i|$.
2. $|z - 2i| \leq 1$.
3. $z \neq -1$ et $\frac{z-1}{z+1}$ est imaginaire pur.

Exercice 5 : Formules de trigonométrie

1. En écrivant $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$, calculer $\cos\frac{\pi}{12}$, $\sin\frac{\pi}{12}$ et $\tan\frac{\pi}{12}$.
2. Résoudre dans $[0, 2\pi[$ l'équation $\sin 2x = \cos x$.
3. Écrire $\cos x + \sqrt{3}\sin x$ sous la forme $R\cos(x - \varphi)$, puis résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation

$$\cos x + \sqrt{3}\sin x = 1.$$

Exercice 6 : Formes trigonométrique et exponentielle

1. Écrire sous forme exponentielle $z_1 = 1 + i$, $z_2 = \sqrt{3} - i$, $z_3 = -2 + 2i\sqrt{3}$ et $z_4 = -5i$.
2. En déduire la forme algébrique de $Z = \frac{(1 + i)^{10}}{(\sqrt{3} - i)^6}$.
3. Déterminer les entiers naturels n tels que $(1 + i\sqrt{3})^n$ soit un réel.

Exercice 7 : Exponentielle complexe et argument

1. Soit $\theta \in]-\pi, \pi[$. Déterminer le module et un argument de $1 + e^{i\theta}$.
2. Soient α, β réels. Factoriser $e^{i\alpha} + e^{i\beta}$ et $e^{i\alpha} - e^{i\beta}$ par $e^{i(\alpha + \beta)/2}$.
3. Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $|e^z| = e^{\operatorname{Re}(z)}$.
4. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations $e^z = 1 + i\sqrt{3}$ et $e^z = -1$.

Exercice 8 : Formule de Moivre

1. À l'aide de la formule de Moivre, exprimer $\cos 3\theta$ en fonction de $\cos \theta$ et $\sin 3\theta$ en fonction de $\sin \theta$.
2. Exprimer $\cos 4\theta$ en fonction de $\cos \theta$.
3. En déduire que $\cos \frac{\pi}{9}$ est solution de l'équation $8x^3 - 6x - 1 = 0$.

4. Montrer que, lorsque les quantités sont définies, $\tan 3\theta = \frac{3t - t^3}{1 - 3t^2}$ avec $t = \tan \theta$.

Exercice 9 : Linéarisation

1. Linéariser $\cos^3 x$, puis en donner une primitive.
2. Linéariser $\sin^4 x$.
3. En déduire la valeur de $I = \int_0^{\pi/2} \sin^4 x \, dx$.
4. Linéariser $\sin^2 x \cos^2 x$.

Exercice 10 : Factorisation et sommes trigonométriques

1. Démontrer, à l'aide de la technique de l'angle moitié, que $\cos p + \cos q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$.
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\cos x + \cos 3x = 0$.
3. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$. Calculer $C_n = \sum_{k=0}^n \cos(kx)$ et $S_n = \sum_{k=0}^n \sin(kx)$.
4. Que valent C_n et S_n lorsque $x \in 2\pi\mathbb{Z}$?

Exercice 11 : Racines carrées d'un complexe

Déterminer, sous forme algébrique, les racines carrées des complexes suivants.

1. $3 - 4i$.
2. $8 + 6i$.
3. $-15 - 8i$.
4. $2i$, par deux méthodes : algébrique puis exponentielle.

Exercice 12 : Équations du second degré

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes.

1. $z^2 - (3 + i)z + 4 + 3i = 0$.
2. $z^2 + z + 1 = 0$.
3. $z^2 - 2\cos(\theta)z + 1 = 0$, où θ est un réel.
4. $z^4 - 6z^2 + 25 = 0$.
5. Trouver deux complexes dont la somme vaut 2 et le produit vaut 5 .

Exercice 13 : Racines n-ièmes de l'unité

Soit $n \geq 2$ un entier. On pose $\omega = e^{2i\pi/n}$.

1. Donner sous forme algébrique les six racines sixièmes de l'unité.
2. Soit $p \in \mathbb{Z}$. Calculer $\sum_{k=0}^{n-1} \omega^{kp}$ en distinguant selon que n divise p ou non.
3. Calculer le produit de toutes les racines n-ièmes de l'unité.

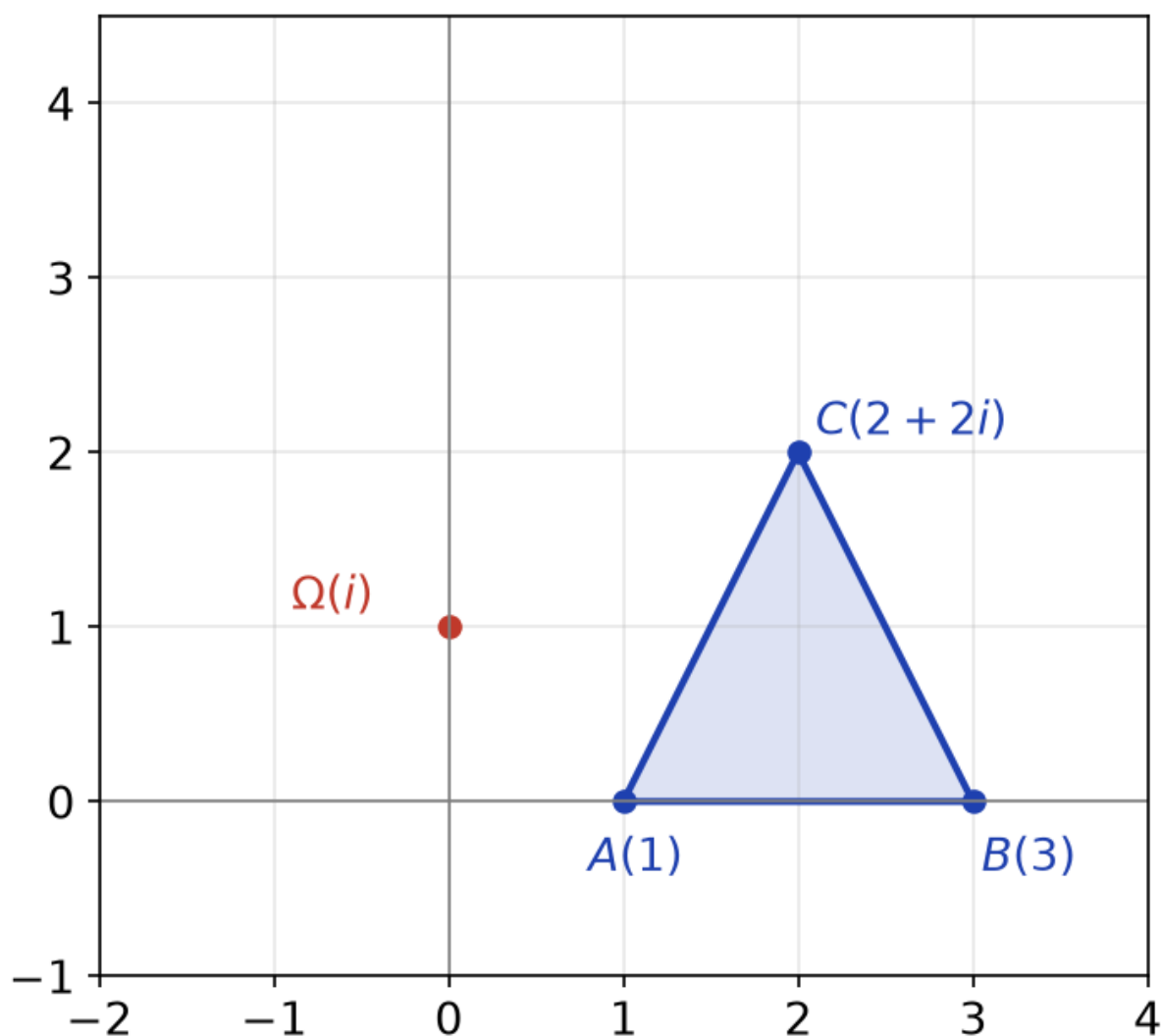
4. Calculer $\sum_{k=0}^{n-1} (1 + \omega^k)^n$.

Exercice 14 : Racines n-ièmes d'un complexe

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^3 = -8i$. Donner les solutions sous forme algébrique.
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^4 = -8 + 8i\sqrt{3}$ et placer les solutions dans le plan.
3. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^5 = \bar{z}$.

Exercice 15 : Transformations du plan complexe

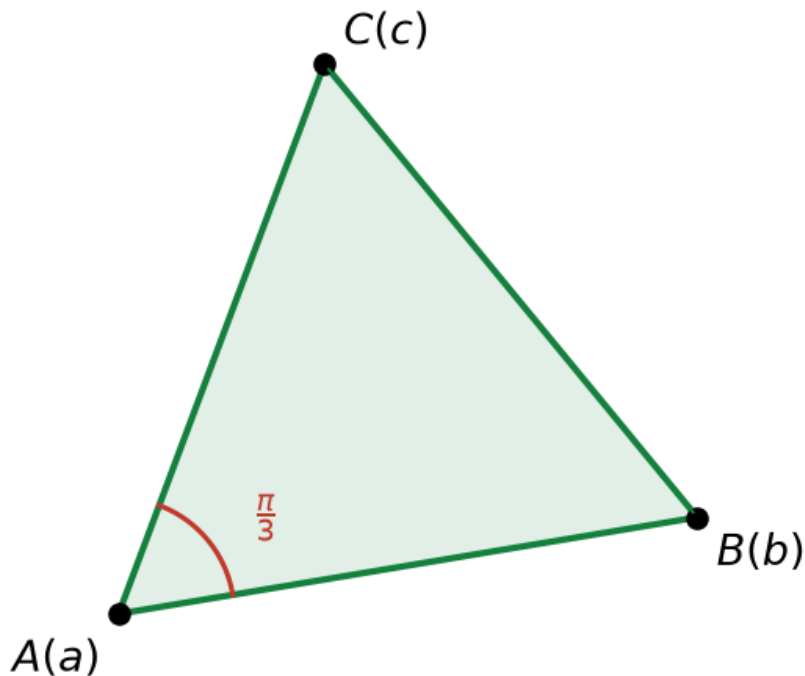
On considère les points A , B , C d'affixes 1 , 3 et $2 + 2i$, ainsi que le point O d'affixe i , comme le montre la figure ci-dessous.



1. Préciser la nature et les éléments caractéristiques des applications $f_1: z \rightarrow z + 2 - i$, $f_2: z \rightarrow iz + 1 + i$, $f_3: z \rightarrow -2z + 3$ et $f_4: z \rightarrow (1 + i)z$.
2. Calculer les affixes des images A' , B' , C' de A , B , C par f_2 . Vérifier que $\Omega A' = \Omega A$.
3. Déterminer la nature de $f_2 \circ f_3$ et son point fixe.
4. Écrire l'expression complexe de la rotation de centre $2 + i$ et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

Exercice 16 : Triangle équilatéral

On note $j = e^{2i\pi/3}$. Soient A, B, C trois points distincts d'affixes a, b, c . On dit que le triangle ABC est équilatéral direct si C est l'image de B par la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$, comme le montre la figure ci-dessous.



sens direct : la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$ envoie B sur C

1. Vérifier que $1 + j + j^2 = 0$ et que $e^{i\pi/3} = -j^2$.
2. Montrer que ABC est équilatéral direct si et seulement si $a + bj + cj^2 = 0$.
3. En déduire que le triangle de sommets d'affixes $1, j, j^2$ est équilatéral direct.
4. Déterminer l'affixe c pour que le triangle de sommets $a = 0, b = 2, c$ soit équilatéral direct.

Exercice 17 : L'équation $(z+1)^n = (z-1)^n$

Soit $n \geq 2$ un entier. On considère l'équation $(E) : (z+1)^n = (z-1)^n$.

1. Montrer que 1 n'est pas solution de (E) .
2. Montrer que z est solution de (E) si et seulement si $\frac{z+1}{z-1}$ est une racine n -ième de l'unité différente de 1.
3. En déduire que les solutions de (E) sont les complexes $z_k = -i \frac{\cos(k\pi/n)}{\sin(k\pi/n)}$, pour $k \in \{1, \dots, n-1\}$.
4. Retrouver sans calcul que toutes les solutions sont sur l'axe imaginaire, en interprétant $|z+1| = |z-1|$. Expliciter les solutions pour $n = 6$.

Exercice 18 : Une inégalité dans le disque unité

1. Montrer que pour tous $z, w \in \mathbb{C}$:

$$|1 - \bar{w}z|^2 - |z - w|^2 = (1 - |z|^2)(1 - |w|^2).$$

2. On suppose $|z| < 1$ et $|w| < 1$. Montrer que $1 - \bar{w}z \neq 0$, puis que $\left| \frac{z-w}{1-\bar{w}z} \right| < 1$.
3. On suppose $|w| < 1$ et $|z| = 1$. Calculer $\left| \frac{z-w}{1-\bar{w}z} \right|$.

Exercice 19 : Sommes binomiales trigonométriques

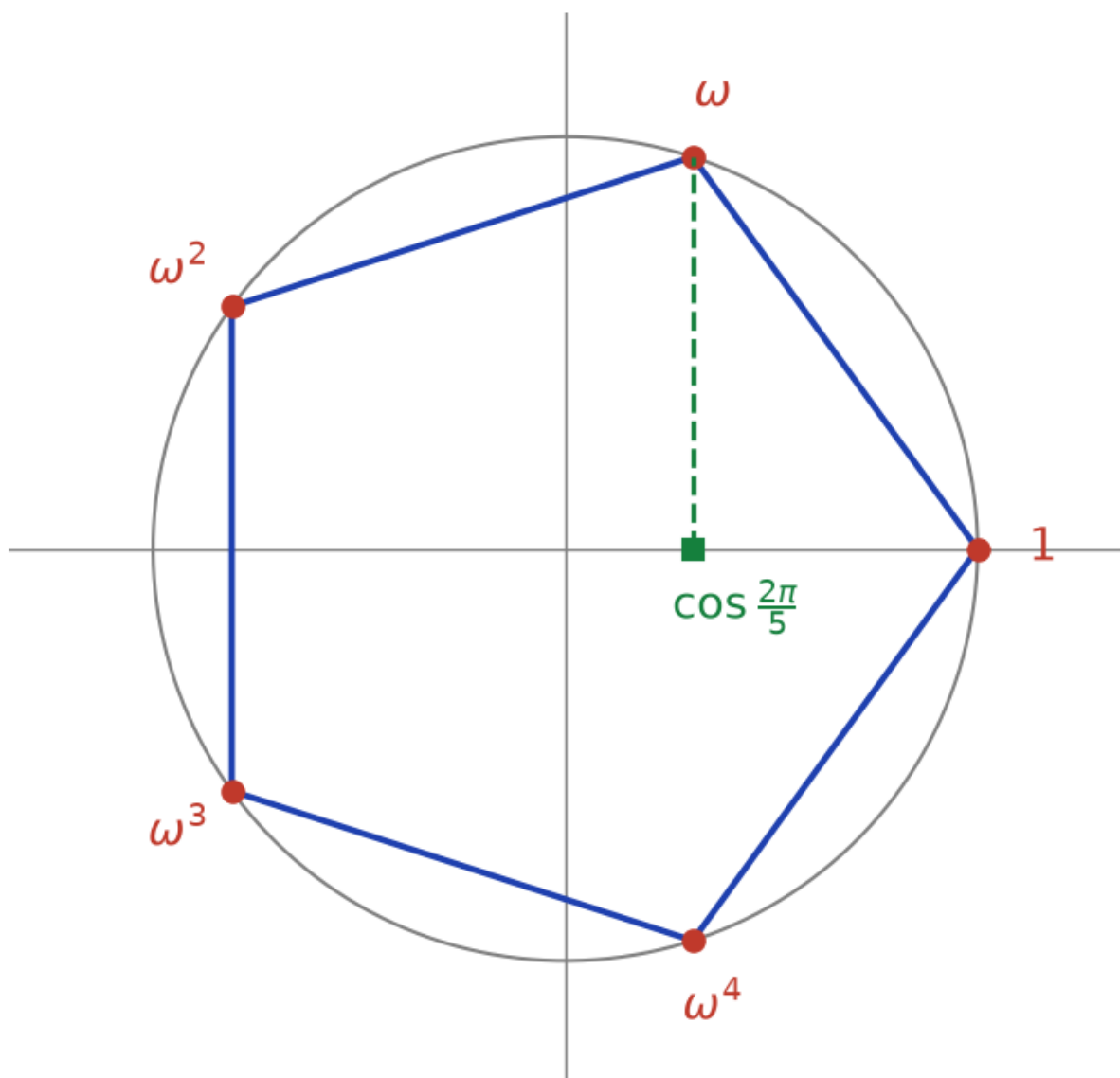
Soient $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$. On pose $A_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cos(kx)$ et $B_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \sin(kx)$.

1. Exprimer $A_n + iB_n$ à l'aide de $(1 + e^{ix})^n$.

2. En déduire des expressions factorisées de A_n et de B_n .
3. Calculer A_n et B_n pour $x = \frac{\pi}{2}$, puis vérifier le résultat pour $n = 2$.

Exercice 20 : Problème : le pentagone régulier

On pose $\omega = e^{2i\pi/5}$. Les points d'affixes $1, \omega, \omega^2, \omega^3, \omega^4$ forment un pentagone régulier inscrit dans le cercle unité, comme le montre la figure ci-dessous.



1. Montrer que $1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 = 0$.
2. On pose $u = \omega + \omega^4$ et $v = \omega^2 + \omega^3$. Exprimer u et v à l'aide de cosinus, puis calculer $u + v$ et uv .
3. En déduire que u et v sont les solutions d'une équation du second degré à coefficients réels, puis que $\cos \frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$.
4. Calculer $\cos \frac{\pi}{5}$.
5. Calculer la longueur ℓ du côté du pentagone, c'est-à-dire $|1 - \omega|$.

Exercice 21 : Problème : un produit de sinus

Soit $n \geq 2$ un entier et $\omega = e^{2i\pi/n}$. On admet la factorisation $z^n - 1 = \prod_{k=0}^{n-1} (z - \omega^k)$, valable pour tout complexe z .

1. Montrer que pour tout $z \neq 1$, $\prod_{k=1}^{n-1} (z - \omega^k) = \sum_{k=0}^{n-1} z^k$. Montrer que cette égalité reste vraie pour $z = 1$.
2. En déduire la valeur de $\prod_{k=1}^{n-1} (1 - \omega^k)$.
3. Montrer que pour $1 \leq k \leq n-1$, $|1 - \omega^k| = 2\sin \frac{k\pi}{n}$.
4. En déduire que $\prod_{k=1}^{n-1} \sin \frac{k\pi}{n} = \frac{n}{2^{n-1}}$, puis vérifier cette formule pour $n = 3$ et $n = 4$.

Le corrigé des exercices

Chaque exercice est corrigé en détail, question par question, sur la page suivante.



Pour aller plus loin en L1

- Le cours : [nombres complexes, cours de maths en L1](#)
- À maîtriser avant : [Logique, raisonnement et ensembles](#)
- Chapitre précédent : [Entiers naturels, récurrence et dénombrement](#)
- Chapitre suivant : [Nombres réels et borne supérieure](#)
- Tester vos connaissances : [QCM de maths en L1 par chapitre](#)
- Le sommaire : [tous les chapitres de maths de L1](#) et la [licence de maths de L1 à L3](#)