

Nombres complexes

I. Forme algébrique des nombres complexes

On admet l'existence d'un ensemble $\mathbb{C}$ qui contient $\mathbb{R}$, muni d'une addition et d'une multiplication prolongeant celles de $\mathbb{R}$. Il contient un élément i tel que $i^2 = -1$. De plus, les règles de calcul usuelles (associativité, commutativité, distributivité) restent valables. En revanche, il n'existe aucune relation d'ordre compatible avec la multiplication : on ne compare jamais deux complexes non réels.

Définition :

Tout nombre complexe z s'écrit de manière unique $z = a + ib$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Le réel $a = \operatorname{Re}(z)$ est la partie réelle de z , le réel $b = \operatorname{Im}(z)$ sa partie imaginaire. Un complexe de partie réelle nulle est dit imaginaire pur ; on note $i\mathbb{R}$ leur ensemble.

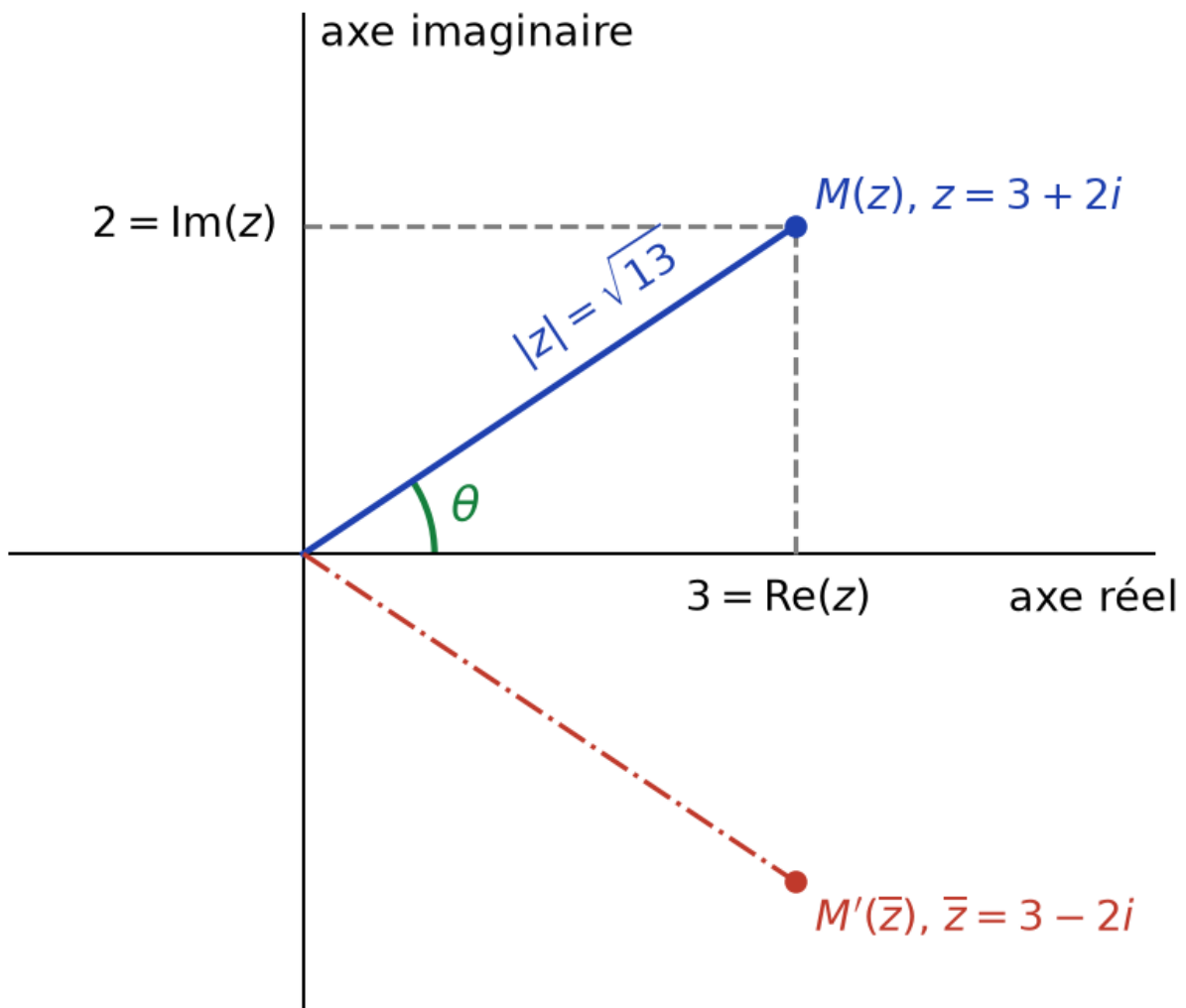
L'unicité de l'écriture permet d'identifier les parties réelles et imaginaires. Ainsi, $a + ib = a' + ib'$ équivaut à $a = a'$ et $b = b'$. Cette remarque transforme une équation complexe en un système de deux équations réelles.

1. Le plan complexe

On munit le plan d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. Au complexe $z = a + ib$, on associe le point $M(a, b)$: on dit que z est l'afixe de M . De même, z est l'afixe du vecteur $\overrightarrow{OM}$. L'afixe d'un vecteur $\overrightarrow{AB}$ vaut donc $b - a$, où a et b sont les affixes de A et B .

La figure ci-dessous représente le point d'afixe $3 + 2i$, son module, un argument et le point d'afixe

conjuguée.



Exemple :

Pour mettre $z = \frac{2+i}{1-2i}$ sous forme algébrique, on multiplie par la quantité conjuguée du dénominateur :

$$z = \frac{(2+i)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)} = \frac{2+4i+i-2}{5} = \frac{5i}{5} = i.$$

Ainsi, z est imaginaire pur.

2. Conjugaison

Définition :

Le conjugué de $z = a + ib$ est $\bar{z} = a - ib$. Géométriquement, le point d'affixe $\bar{z}$ est le symétrique de $M(z)$ par rapport à l'axe réel.

Propriété :

Pour tous complexes z et w : $\overline{z+w} = \bar{z} + \bar{w}$, $\overline{zw} = \bar{z}\bar{w}$ et, si $w \neq 0$,
 $\overline{z/w} = \bar{z}/\bar{w}$. De plus,

$$\operatorname{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}, \quad \operatorname{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}.$$

Par conséquent, $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \bar{z} = z$ et $z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \bar{z} = -z$.

Ces caractérisations sont très utiles. En effet, pour prouver qu'une expression est réelle, il suffit souvent de calculer son conjugué et de retrouver l'expression elle-même.

II. Module et inégalité triangulaire

Définition :

Le module de $z = a + ib$ est le réel positif $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$. On a $|z|^2 = z\bar{z}$. Dans le plan, $|z| = OM$ et $|b - a| = AB$.

Propriété :

Pour tous $z, w \in \mathbb{C}$: $|zw| = |z||w|$, $|\bar{z}| = |z|$, $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$, et $|\operatorname{Re}(z)| \leq |z|$.
 Si $z \neq 0$, alors $\frac{1}{\bar{z}} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$.

La formule de l'inverse donne directement la forme algébrique d'un quotient. Ensuite, le module permet de mesurer des distances : c'est le point de départ de l'inégalité triangulaire.

Théorème :

(Inégalité triangulaire) Pour tous $z, w \in \mathbb{C}$,

$$||z| - |w|| \leq |z + w| \leq |z| + |w|.$$

De plus, si $w \neq 0$, on a $|z + w| = |z| + |w|$ si et seulement s'il existe un réel $\lambda \geq 0$ tel que $z = \lambda w$.

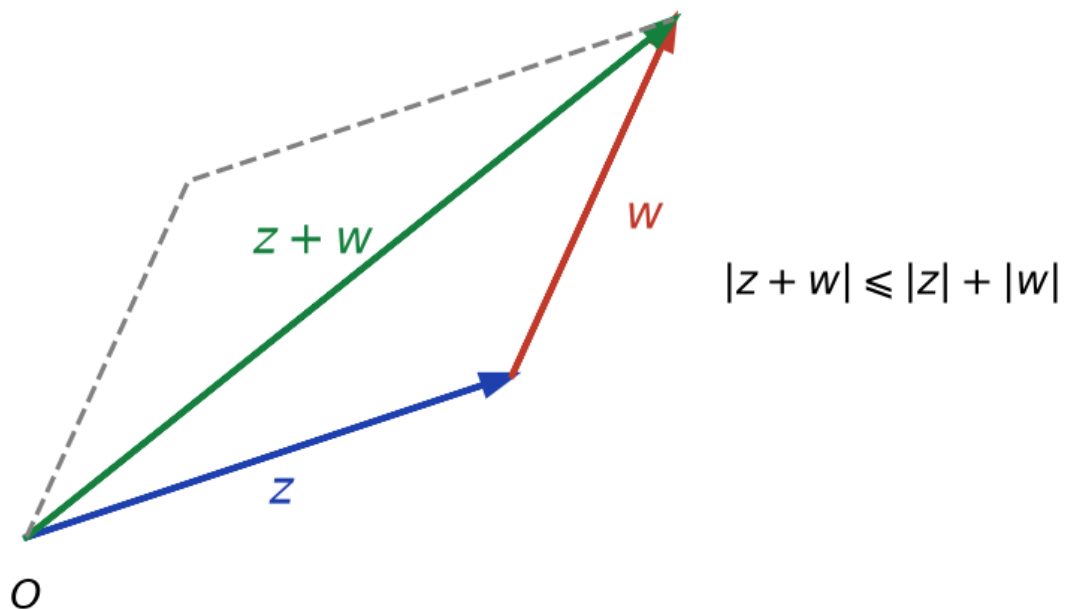
Démonstration :

On développe $|z + w|^2 = (z + w)(\bar{z} + \bar{w}) = |z|^2 + |w|^2 + 2 \operatorname{Re}(z\bar{w})$. Or

$\operatorname{Re}(z\bar{w}) \leq |z\bar{w}| = |z||w|$. Donc $|z + w|^2 \leq (|z| + |w|)^2$, d'où l'inégalité de droite. L'égalité a lieu exactement quand $\operatorname{Re}(z\bar{w}) = |z\bar{w}|$, c'est-à-dire quand $z\bar{w}$ est un réel positif. Si

$w \neq 0$, cela revient à $z = \frac{z\bar{w}}{|w|^2} w$ avec $\frac{z\bar{w}}{|w|^2} \geq 0$. Enfin, l'inégalité de gauche s'obtient en appliquant celle de droite à $z = (z + w) + (-w)$, puis en échangeant les rôles.

L'interprétation est géométrique : dans un triangle, un côté est plus court que la somme des deux autres. Comme le montre la figure ci-dessous, l'égalité correspond au triangle aplati, lorsque les vecteurs d'affixes z et w sont colinéaires et de même sens.



Attention :

Le cas d'égalité ne dit pas « z et w sont colinéaires » mais « colinéaires et de même sens ». Par exemple, $|1 + (-1)| = 0$ alors que $|1| + |-1| = 2$.

III. Nombres complexes de module 1 et trigonométrie

1. Le groupe $\mathbb{U}$ et l'exponentielle imaginaire

Définition :

On note $\mathbb{U} = \left\{ z \in \mathbb{C}, \begin{array}{l} |z| = 1 \end{array} \right\}$, représenté par le cercle unité. Pour $t \in \mathbb{R}$, on pose $e^{it} = \cos t + i \sin t$, qui appartient à $\mathbb{U}$.

Propriété :

Pour tous réels t et t' , $e^{i(t+t')} = e^{it} e^{it'}$. De plus, $\overline{e^{it}} = e^{-it} = \frac{1}{e^{it}}$, et $e^{it} = 1 \Leftrightarrow t \in 2\pi\mathbb{Z}$. Enfin, l'application $t \rightarrow e^{it}$ est surjective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{U}$.

La première égalité n'est rien d'autre que les formules d'addition de cosinus et sinus, écrites en une seule ligne. Par ailleurs, $\mathbb{U}$ est stable par produit et par inverse, et contient 1 : c'est un groupe pour la multiplication.

2. Formules d'Euler et de Moivre

Théorème :

Pour tout réel t et tout entier $n \in \mathbb{Z}$:

$$\cos t = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2}, \quad \sin t = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}, \quad (\cos t + i \sin t)^n = \cos(nt) + i \sin(nt).$$

Les deux premières sont les formules d'Euler, la troisième est la formule de Moivre.

Méthode :

Pour linéariser $\cos^n t$ ou $\sin^n t$ (l'écrire comme combinaison de $\cos(kt)$ et $\sin(kt)$), on remplace chaque facteur par la formule d'Euler, on développe avec le binôme de Newton, puis on regroupe les termes conjugués $e^{ikt} + e^{-ikt} = 2\cos(kt)$. À l'inverse, pour exprimer $\cos(nt)$ en fonction de $\cos t$, on part de la formule de Moivre, on développe $(\cos t + i \sin t)^n$ et on garde la partie réelle.

Exemple :

Linéarisons $\cos^3 t$. D'abord,

$$\cos^3 t = \frac{(e^{it} + e^{-it})^3}{8} = \frac{e^{3it} + 3e^{it} + 3e^{-it} + e^{-3it}}{8}.$$

Ensuite, on regroupe : $\cos^3 t = \frac{\cos(3t) + 3\cos t}{4}$. Dans l'autre sens, la partie réelle de $(\cos t + i\sin t)^3$ donne $\cos(3t) = \cos^3 t - 3\cos t \sin^2 t = 4\cos^3 t - 3\cos t$.

3. Technique de l'angle moitié

La factorisation par l'angle moitié est l'outil le plus rentable du chapitre. Elle permet de trouver sans effort le module et un argument de $1 \pm e^{it}$, ainsi que de nombreuses sommes.

Propriété :

Pour tous réels p et q ,

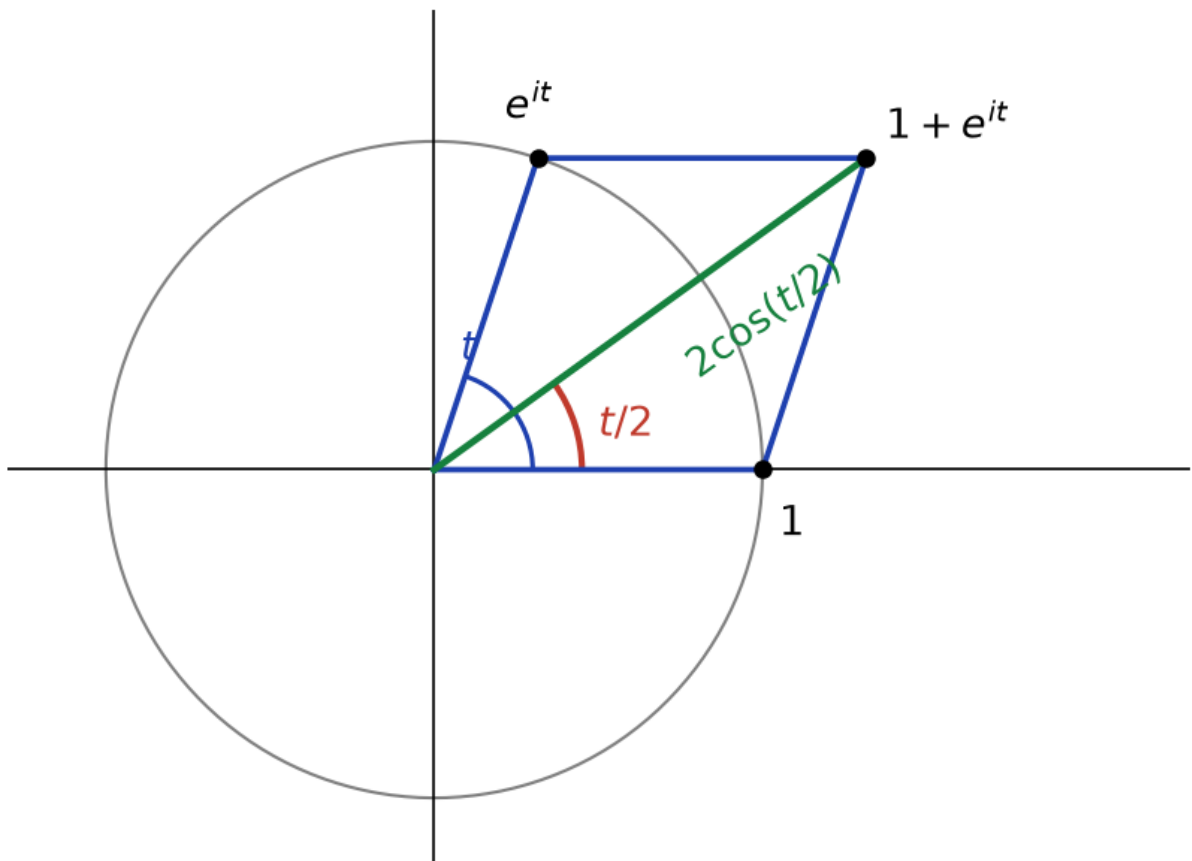
$$e^{ip} + e^{iq} = 2\cos\left(\frac{p-q}{2}\right) e^{i\frac{p+q}{2}}, \quad e^{ip} - e^{iq} = 2i\sin\left(\frac{p-q}{2}\right) e^{i\frac{p+q}{2}}.$$

En particulier, $1 + e^{it} = 2\cos(t/2) e^{it/2}$ et $1 - e^{it} = -2i\sin(t/2) e^{it/2}$.

Démonstration :

On met en facteur $e^{i\frac{p+q}{2}}$: il reste $e^{i\frac{p-q}{2}} \pm e^{-i\frac{p-q}{2}}$. Or, d'après les formules d'Euler, cette quantité vaut $2\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$ ou $2i\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$.

La figure ci-dessous explique ce résultat. Le parallélogramme construit sur 1 et e^{it} est un losange, car ses côtés ont pour longueur 1 . Sa diagonale porte donc la bissectrice de l'angle t , et sa longueur vaut $2\cos(t/2)$ lorsque $t \in]-\pi, \pi[$.



4. Sommes trigonométriques

Méthode :

Pour calculer $C_n = \sum_{k=0}^n \cos(kt)$ et $S_n = \sum_{k=0}^n \sin(kt)$, on étudie

$C_n + iS_n = \sum_{k=0}^n (e^{it})^k$. C'est une somme géométrique de raison e^{it} . Ensuite, on factorise numérateur et dénominateur par l'angle moitié, puis on sépare parties réelle et imaginaire.

Proposition :

Pour $t \notin 2\pi\mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^n \cos(kt) = \frac{\cos\left(\frac{nt}{2}\right)\sin\left(\frac{(n+1)t}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}, \quad \sum_{k=0}^n \sin(kt) = \frac{\sin\left(\frac{nt}{2}\right)\sin\left(\frac{(n+1)t}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}.$$

Démonstration :

Comme $e^{it} \neq 1$, on a

$$\sum_{k=0}^n e^{ikt} = \frac{1 - e^{i(n+1)t}}{1 - e^{it}} = \frac{-2i \sin\left(\frac{(n+1)t}{2}\right) e^{i\frac{(n+1)t}{2}}}{-2i \sin\left(\frac{t}{2}\right) e^{i\frac{t}{2}}} = \frac{\sin\left(\frac{(n+1)t}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} e^{i\frac{nt}{2}}.$$

Il suffit alors de prendre les parties réelle et imaginaire.

IV. Forme trigonométrique et arguments

Définition :

Soit $z \in \mathbb{C}^*$. Il existe un réel θ tel que $z = |z| e^{i\theta}$: c'est une forme trigonométrique de z .
Un tel θ est un argument de z ; il est unique modulo 2π . On note $\arg z \equiv \theta_{[2\pi]}$.

En effet, $z / |z|$ appartient à $\mathbb{U}$, donc s'écrit $e^{i\theta}$. Deux arguments diffèrent d'un multiple de 2π , puisque $e^{i\theta} = e^{i\theta'}$ équivaut à $\theta - \theta' \in 2\pi\mathbb{Z}$. Le complexe 0 n'a pas d'argument.

Propriété :

Pour $z, w \in \mathbb{C}^*$ et $n \in \mathbb{Z}$: $\arg(zw) \equiv \arg z + \arg w$,
 $\arg(z/w) \equiv \arg z - \arg w$, $\arg \bar{z} \equiv -\arg z$ et $\arg(z^n) \equiv n \arg z$, toutes ces

relations étant modulo 2π .

Exemple :

Soit $z = 1 + i\sqrt{3}$. On a $|z| = 2$, puis $z = 2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2e^{i\pi/3}$. Par conséquent, $z^6 = 2^6 e^{2i\pi} = 64$. Le calcul par la forme algébrique aurait été bien plus long.

Remarque :

Pour trouver un argument de $a + ib$, on calcule $r = \sqrt{a^2 + b^2}$, puis on cherche θ avec $\cos\theta = a/r$ et $\sin\theta = b/r$. Les deux conditions sont nécessaires : le cosinus seul ne détermine l'angle qu'au signe près.

V. Équations algébriques dans les nombres complexes

1. Racines carrées d'un nombre complexe

Théorème :

Tout complexe w non nul possède exactement deux racines carrées, opposées l'une de l'autre. Si $w = re^{i\theta}$ avec $r > 0$, ce sont $\pm\sqrt{r}e^{i\theta/2}$.

Lorsque l'argument de w n'est pas un angle remarquable, on cherche plutôt les racines carrées sous forme algébrique.

Méthode :

Pour résoudre $(x + iy)^2 = a + ib$ avec x, y réels, on écrit trois équations. D'abord, l'identification donne $x^2 - y^2 = a$ et $2xy = b$. Ensuite, l'égalité des modules donne $x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2}$. On en tire x^2 et y^2 par demi-somme et demi-différence. Enfin, le signe de b indique si x et y sont de même signe.

Exemple :

Cherchons les racines carrées de $3 + 4i$. On a $x^2 - y^2 = 3$, $x^2 + y^2 = 5$ et $2xy = 4$. Donc $x^2 = 4$ et $y^2 = 1$, avec $xy > 0$. Les racines carrées sont $2 + i$ et $-2 - i$.

2. Équations du second degré

Théorème :

Soient $a, b, c \in \mathbb{C}$ avec $a \neq 0$, et $\Delta = b^2 - 4ac$. Si δ est une racine carrée de Δ , les solutions de $az^2 + bz + c = 0$ sont

$$z_1 = \frac{-b + \delta}{2a} \text{ et } z_2 = \frac{-b - \delta}{2a}.$$

Elles sont confondues si et seulement si $\Delta = 0$.

Démonstration :

On écrit la forme canonique : $az^2 + bz + c = a\left[\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$. Comme $\Delta = \delta^2$, le crochet vaut $\left(z + \frac{b}{2a} - \frac{\delta}{2a}\right)\left(z + \frac{b}{2a} + \frac{\delta}{2a}\right)$. Or un produit est nul si et seulement si l'un de ses

facteurs l'est.

Propriété :

(Somme et produit des racines) Avec les notations précédentes, $z_1 + z_2 = -\frac{b}{a}$ et $z_1 z_2 = \frac{c}{a}$.
Réciproquement, deux complexes de somme s et de produit p sont les racines de $z^2 - sz + p = 0$.

Cette réciproque sert constamment. Par exemple, pour trouver deux nombres de somme 1 et de produit 1, on résout $z^2 - z + 1 = 0$. Son discriminant vaut $-3 = (i\sqrt{3})^2$, d'où les solutions $\frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2} = e^{\pm i\pi/3}$.

VI. Racines n-ièmes de l'unité et exponentielle complexe

1. Racines n-ièmes de l'unité

Définition :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On appelle racine n -ième de l'unité tout complexe z tel que $z^n = 1$. On note $\mathbb{U}_n$ leur ensemble.

Théorème :

$\mathbb{U}_n$ possède exactement n éléments :

$$\mathbb{U}_n = \left\{ e^{2ik\pi/n}, k \in \{0, 1, \dots, n-1\} \right\} = \{1, \omega, \omega^2, \dots, \omega^{n-1}\} \text{ avec } \omega = e^{2i\pi/n}.$$

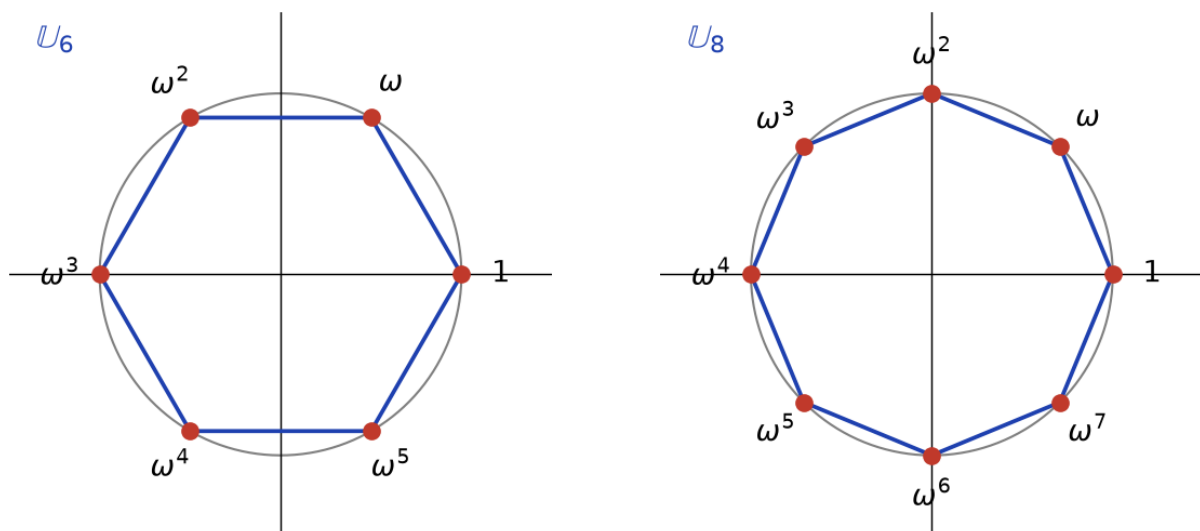
De plus, si $n \geq 2$, la somme des racines n -ièmes de l'unité est nulle.

Démonstration :

Si $z^n = 1$, alors $|z|^n = 1$, donc $|z| = 1$ et $z = e^{i\theta}$. L'équation devient $e^{in\theta} = 1$, soit $n\theta \in 2\pi\mathbb{Z}$, donc $\theta = 2k\pi/n$ avec $k \in \mathbb{Z}$. Deux entiers congrus modulo n donnent la même valeur ; ainsi $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ suffit. Ces n valeurs sont distinctes, car leurs arguments diffèrent de moins de 2π . Enfin, pour $n \geq 2$, $\omega \neq 1$, d'où

$$\sum_{k=0}^{n-1} \omega^k = \frac{1 - \omega^n}{1 - \omega} = 0.$$

Géométriquement, les éléments de $\mathbb{U}_n$ sont les sommets d'un polygone régulier à n côtés inscrit dans le cercle unité, dont l'un des sommets est 1 . La figure ci-dessous montre les cas $n = 6$ et $n = 8$.



L'ensemble $\mathbb{U}_n$ est stable par produit et par inverse : c'est un sous-groupe de $\mathbb{U}$. Pour $n = 3$, on note traditionnellement $j = e^{2i\pi/3}$, si bien que $\mathbb{U}_3 = \{1, j, j^2\}$ et $1 + j + j^2 = 0$.

2. Équation $z^n = a$

Proposition :

Soit $a = re^{ia}$ avec $r > 0$. Les solutions de $z^n = a$ sont les n complexes $r^{1/n} e^{ia/n} \omega^k$ pour $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$. Autrement dit, on obtient toutes les solutions en multipliant l'une d'entre elles par les racines n -ièmes de l'unité.

Exemple :

Réolvons $z^3 = 8i$. On a $8i = 8e^{i\pi/2}$, donc une solution est $2e^{i\pi/6} = \sqrt{3} + i$. Les deux autres sont $2e^{i5\pi/6} = -\sqrt{3} + i$ et $2e^{i3\pi/2} = -2i$.

3. Exponentielle d'un nombre complexe

Définition :

Pour $z = x + iy$ avec x, y réels, on pose $e^z = e^x e^{iy} = e^x (\cos y + i \sin y)$.

Propriété :

Pour tous $z, z' \in \mathbb{C}$: $e^{z+z'} = e^z e^{z'}$, $|e^z| = e^{\operatorname{Re}(z)}$ et $\operatorname{Im}(z)$ est un argument de e^z . En particulier, e^z ne s'annule jamais. De plus, $e^z = e^{z'}$ si et seulement si $z - z' \in 2i\pi\mathbb{Z}$.

Proposition :

Soit $a \in \mathbb{C}^*$, de module r et d'argument α . Les solutions de $e^z = a$ sont les complexes $z = \ln r + i(\alpha + 2k\pi)$, avec $k \in \mathbb{Z}$. Si $a = 0$, l'équation n'a pas de solution.

Démonstration :

On écrit $z = x + iy$. L'égalité $e^x e^{iy} = r e^{i\alpha}$ impose d'abord l'égalité des modules, $e^x = r$, donc $x = \ln r$. Ensuite, elle impose $e^{iy} = e^{i\alpha}$, c'est-à-dire $y \equiv \alpha \pmod{2\pi}$. Réciproquement, ces complexes conviennent.

Par exemple, $e^z = -1$ a pour solutions les complexes $i(\pi + 2k\pi)$, avec $k \in \mathbb{Z}$. Contrairement au cas réel, l'exponentielle complexe n'est donc pas injective.

VII. Nombres complexes et géométrie plane

1. Angles, alignement et orthogonalité

Propriété :

Soient A, B, C trois points d'affixes a, b, c , avec $A \neq B$ et $A \neq C$. Alors

$$\left| \frac{c-a}{b-a} \right| = \frac{AC}{AB} \text{ et } \arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right) \equiv \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \right) \pmod{2\pi}.$$

Corollaire :

Avec les mêmes hypothèses : A, B, C sont alignés si et seulement si $\frac{c-a}{b-a} \in \mathbb{R}$. Les droites (AB) et (AC) sont perpendiculaires si et seulement si $\frac{c-a}{b-a} \in i\mathbb{R}$. Enfin, le triangle ABC est équilatéral direct si et seulement si $c-a = e^{i\pi/3}(b-a)$.

Exemple :

Avec $a = 0$, $b = 2$ et $c = 1 + i$, on trouve $\frac{c-a}{b-a} = \frac{1+i}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\pi/4}$. Ainsi $AC = \frac{\sqrt{2}}{2}AB$ et l'angle $\widehat{BAC}$ mesure $\pi/4$.

2. Similitudes directes

Définition :

On appelle similitude directe toute application du plan qui s'écrit, en affixes, $z \rightarrow az + b$ avec $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$.

Théorème :

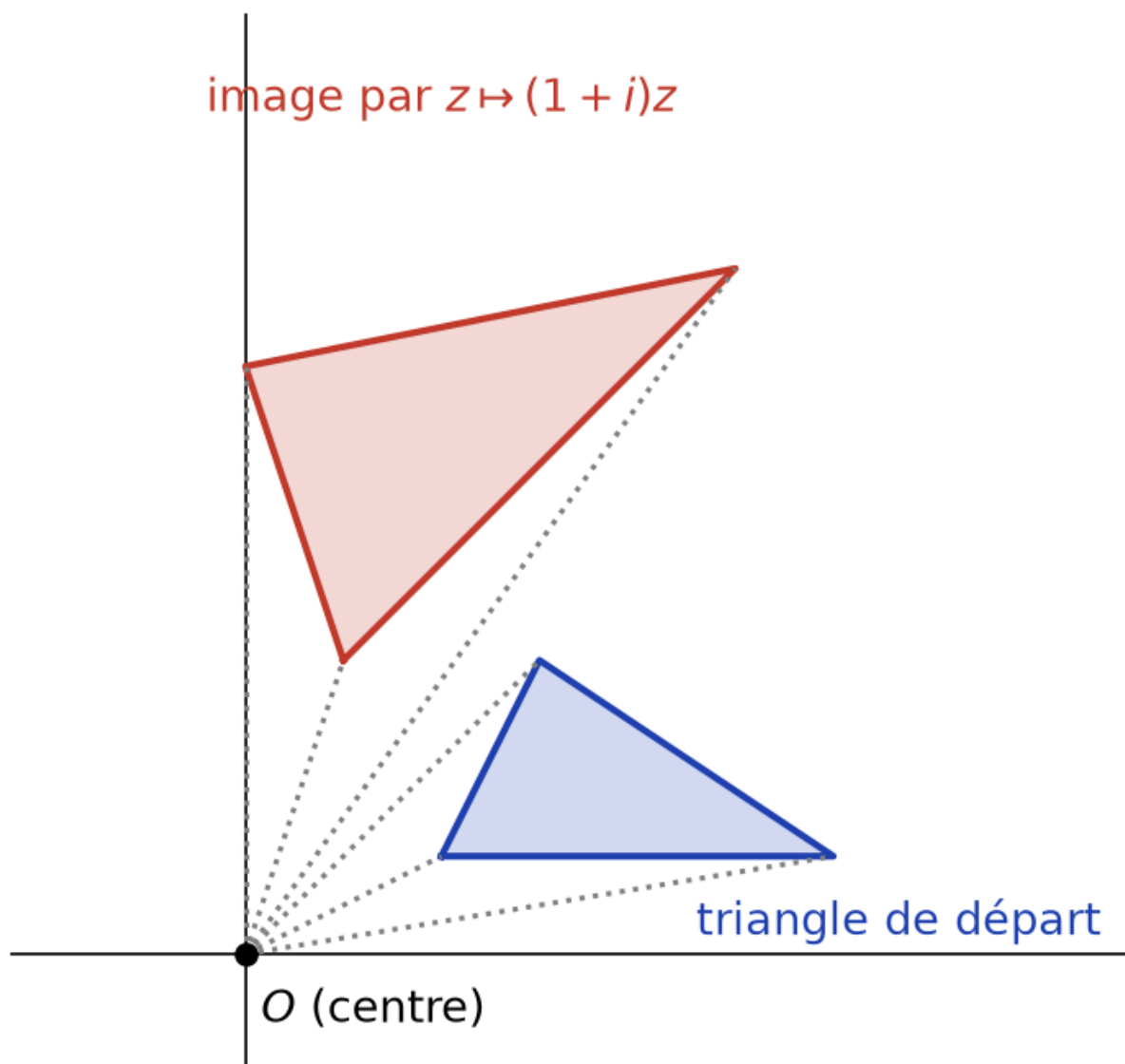
Soit $f : z \rightarrow az + b$ avec $a \neq 0$. Si $a = 1$, f est la translation de vecteur d'affixe b . Si $a \neq 1$, f possède un unique point fixe Ω d'affixe $\omega = \frac{b}{1-a}$, et $f(z) - \omega = a(z - \omega)$. Dans ce cas, f est la composée de la rotation de centre Ω et d'angle $\arg a$, et de l'homothétie de centre Ω et de rapport $|a|$. On dit que $|a|$ est le rapport et $\arg a$ l'angle de f .

Démonstration :

Si $a \neq 1$, l'équation $\omega = a\omega + b$ a pour unique solution $\omega = \frac{b}{1-a}$. En soustrayant

$\omega = a\omega + b$ à $f(z) = az + b$, on obtient $f(z) - \omega = a(z - \omega)$. Or multiplier $z - \omega$ par $a = |a|e^{i\theta}$ revient à le tourner de θ , puis à multiplier sa longueur par $|a|$.

Les cas particuliers sont importants. Si a est réel, f est une homothétie de rapport a . Si $|a| = 1$, f est une rotation d'angle $\arg a$. La figure ci-dessous montre l'effet de $z \rightarrow (1+i)z$, similitude de centre O , de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $\pi/4$: les formes et les angles sont conservés, les longueurs sont multipliées par $\sqrt{2}$.



Exemple :

Considérons $f(z) = iz + 2$. Ici $a = i$, de module 1 et d'argument $\pi/2$. Le centre vaut $\omega = \frac{2}{1-i} = 1+i$. Par conséquent, f est la rotation de centre $1+i$ et d'angle $\pi/2$.

Ce qu'il faut retenir

- Deux complexes sont égaux si et seulement s'ils ont mêmes parties réelle et imaginaire ; z est réel si et seulement si $\bar{z} = z$.
- Le module vérifie $|z|^2 = z\bar{z}$ et $|zw| = |z||w|$; l'égalité $|z+w| = |z| + |w|$ exige $z = \lambda w$ avec $\lambda \geq 0$ (si $w \neq 0$).
- Les formules d'Euler servent à linéariser, la formule de Moivre à exprimer $\cos(nt)$ et $\sin(nt)$ en fonction de $\cos t$ et $\sin t$.
- L'angle moitié donne $1 + e^{it} = 2\cos(t/2)e^{it/2}$ et $1 - e^{it} = -2i\sin(t/2)e^{it/2}$.
- Les sommes $\sum \cos(kt)$ et $\sum \sin(kt)$ se calculent comme parties réelle et imaginaire d'une somme géométrique.
- Les racines carrées de $a + ib$ s'obtiennent avec $x^2 - y^2 = a$, $x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2}$ et le signe de xy .
- Les racines de $az^2 + bz + c$ ont pour somme $-b/a$ et pour produit c/a .
- $\mathbb{U}_n = \left\{ e^{2ik\pi/n}, 0 \leq k \leq n-1 \right\}$; leur somme est nulle pour $n \geq 2$.
- $e^z = a$ avec $a = re^{i\alpha} \neq 0$ équivaut à $z = \ln r + i(\alpha + 2k\pi)$.
- Le quotient $\frac{c-a}{b-a}$ code l'angle $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ et le rapport AC / AB ; $z \rightarrow az + b$ est une similitude directe de rapport $|a|$ et d'angle $\arg a$.

Questions fréquentes sur nombres complexes

Comment trouver rapidement un argument d'un nombre complexe ?

Calculez d'abord le module $r = \sqrt{a^2 + b^2}$, puis cherchez un angle θ tel que $\cos\theta = a/r$ et $\sin\theta = b/r$. Les deux conditions sont nécessaires, car le cosinus seul ne fixe l'angle qu'au signe près. Pour $1 \pm e^{it}$, utilisez plutôt la factorisation par l'angle moitié.

Faut-il calculer les racines carrées d'un complexe sous forme algébrique ou trigonométrique ?

Si l'argument est un angle remarquable, la forme trigonométrique est immédiate : les racines de $re^{i\theta}$ sont $\pm\sqrt{r}e^{i\theta/2}$. Sinon, écrivez $(x + iy)^2 = a + ib$, puis utilisez $x^2 - y^2 = a$, $x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2}$ et le signe de xy , donné par celui de b .

Quelle différence entre linéariser et utiliser la formule de Moivre ?

Linéariser consiste à transformer une puissance comme $\cos^3 t$ en combinaison de $\cos(kt)$: on part des formules d'Euler. La démarche inverse, exprimer $\cos(nt)$ en fonction de $\cos t$, part de la formule de Moivre et de la partie réelle de $(\cos t + i\sin t)^n$. La linéarisation sert surtout à calculer des intégrales.

L'exponentielle complexe est-elle injective ?

Non. On a $e^z = e^{z'}$ si et seulement si $z - z' \in 2i\pi\mathbb{Z}$. C'est pourquoi l'équation $e^z = a$, pour $a \neq 0$, possède une infinité de solutions, de la forme $\ln|a| + i(\alpha + 2k\pi)$ où α est un argument de a .

Pour aller plus loin en maths sup

- Les énoncés : [exercices de maths sup sur nombres complexes](#)
- À maîtriser avant : [Calculs algébriques : sommes, produits, inégalités](#), [Trigonométrie et fonctions circulaires](#)
- Chapitre précédent : [Trigonométrie et fonctions circulaires](#)

- Chapitre suivant : [Fonctions usuelles et techniques de dérivation](#)
- Le même thème en L1 : [nombres complexes, cours de maths en L1](#)
- Tester vos connaissances : [QCM de maths sup par chapitre](#)
- Le sommaire : [tous les chapitres de maths sup](#) et les [chapitres de maths spé](#)