

Nombres complexes

I. Construction du corps des nombres complexes

L'équation $x^2 + 1 = 0$ n'a pas de solution réelle. En effet, un carré réel est toujours positif. On construit donc un ensemble plus grand que $\mathbb{R}$, dans lequel cette équation a des solutions. Ce nouvel ensemble n'est pas une invention mystérieuse : c'est le plan $\mathbb{R}^2$, muni de lois bien choisies.

1. Le plan muni de deux lois

Définition :

On note $\mathbb{C}$ l'ensemble $\mathbb{R}^2$ muni des deux lois suivantes. Pour (a, b) et (c, d) dans $\mathbb{R}^2$:

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d), \quad (a, b) \times (c, d) = (ac - bd, ad + bc).$$

Les éléments de $\mathbb{C}$ s'appellent les nombres complexes.

L'addition est celle des vecteurs du plan. La multiplication, en revanche, est nouvelle. Ensuite, on identifie le réel a au couple $(a, 0)$. Cette identification est légitime, car $(a, 0) + (c, 0) = (a + c, 0)$ et $(a, 0) \times (c, 0) = (ac, 0)$. Autrement dit, les lois de $\mathbb{C}$ prolongent celles de $\mathbb{R}$.

Théorème :

$(\mathbb{C}, +, \times)$ est un corps commutatif. Son zéro est $(0, 0)$ et son unité est $(1, 0)$. De plus, le nombre $i = (0, 1)$ vérifie $i^2 = -1$, et tout complexe s'écrit de façon unique $z = a + ib$ avec a, b réels.

Démonstration :

L'associativité et la commutativité se vérifient par un calcul direct sur les couples. Par exemple, $(c, d) \times (a, b) = (ca - db, cb + da)$, qui est bien égal à $(a, b) \times (c, d)$. Montrons surtout l'existence d'un inverse. Soit $(a, b) \neq (0, 0)$; alors $a^2 + b^2 > 0$. Posons $\left(\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2}\right)$. Le produit avec (a, b) vaut

$$\left(\frac{a^2 + b^2}{a^2 + b^2}, \frac{-ab + ba}{a^2 + b^2}\right) = (1, 0).$$

Ensuite, $i^2 = (0, 1) \times (0, 1) = (0 - 1, 0 + 0) = (-1, 0) = -1$. Enfin, $(a, b) = (a, 0) + (b, 0) \times (0, 1) = a + ib$, et l'unicité découle de l'égalité des couples.

Définition :

Si $z = a + ib$ avec $a, b \in \mathbb{R}$, le réel a est la **partie réelle** de z , notée $\operatorname{Re}(z)$, et le réel b est sa **partie imaginaire**, notée $\operatorname{Im}(z)$. L'écriture $a + ib$ est la **forme algébrique** de z . Un complexe de partie réelle nulle est dit imaginaire pur.

Remarque :

Il n'existe aucune relation d'ordre sur $\mathbb{C}$ compatible avec ses lois. Si un tel ordre existait, tout carré

serait positif. On aurait alors $1 = 1^2 \geq 0$ et $-1 = i^2 \geq 0$, donc $0 = 1 + (-1) \geq 1$, ce qui est absurde. Ainsi, une inégalité entre complexes n'a pas de sens : on compare seulement des modules ou des parties réelles.

2. Le conjugué

Définition :

Le **conjugué** de $z = a + ib$ est $\bar{z} = a - ib$. Géométriquement, le point d'affixe $\bar{z}$ est le symétrique du point d'affixe z par rapport à l'axe des réels.

Propriété :

Pour tous $z, w \in \mathbb{C}$:

$$\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}, \quad \overline{zw} = \bar{z} \bar{w}, \quad \bar{\bar{z}} = z, \quad \operatorname{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}, \quad \operatorname{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}.$$

De plus, z est réel si et seulement si $\bar{z} = z$, et imaginaire pur si et seulement si $\bar{z} = -z$.
Enfin, si $w \neq 0$, $\overline{z/w} = \bar{z} / \bar{w}$.

Démonstration :

Montrons la formule du produit. Posons $z = a + ib$ et $w = c + id$. D'une part, $zw = (ac - bd) + i(ad + bc)$, donc $\overline{zw} = (ac - bd) - i(ad + bc)$. D'autre part, $\bar{z} \bar{w} = (a - ib)(c - id) = (ac - bd) - i(ad + bc)$. Les deux expressions coïncident. Les autres formules se prouvent de la même façon.

Exemple :

Pour mettre un quotient sous forme algébrique, on multiplie par le conjugué du dénominateur. Par exemple :

$$\frac{1 + 2i}{3 - 4i} = \frac{(1 + 2i)(3 + 4i)}{(3 - 4i)(3 + 4i)} = \frac{-5 + 10i}{25} = -\frac{1}{5} + \frac{2}{5}i.$$

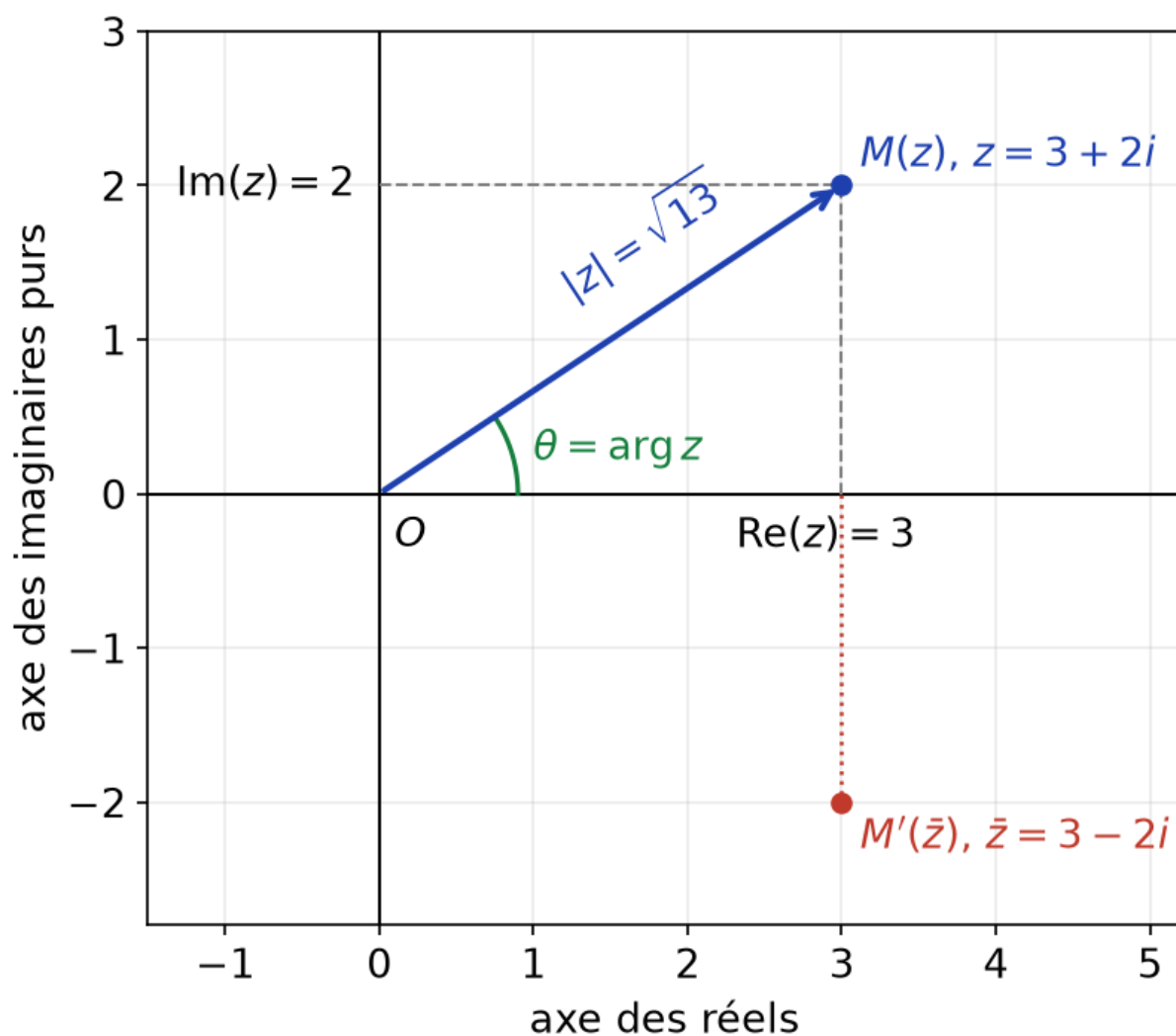
II. Module et inégalité triangulaire

1. Module d'un nombre complexe

Définition :

Le **module** de $z = a + ib$ est le réel positif $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$. C'est la distance de l'origine O au point M d'affixe z . Plus généralement, $|z - w|$ est la distance entre les points d'affixes z et w .

Comme le montre la figure ci-dessous, la partie réelle et la partie imaginaire sont les coordonnées du point M . Le module est la longueur du vecteur $\overrightarrow{OM}$, et le conjugué correspond au symétrique de M .



Proposition :

Pour tous $z, w \in \mathbb{C}$: $|z|^2 = z\bar{z}$, $|\bar{z}| = |z|$, $|zw| = |z||w|$, et $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$. De plus, $|\operatorname{Re}(z)| \leq |z|$ et $|\operatorname{Im}(z)| \leq |z|$. Enfin, si $z \neq 0$, alors $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$.

Démonstration :

D'abord, $z\bar{z} = (a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2 = |z|^2$. Ensuite, grâce à la propriété du conjugué d'un produit, $|zw|^2 = zw\bar{z}\bar{w} = z\bar{z}w\bar{w} = |z|^2|w|^2$. Les deux membres sont positifs, donc $|zw| = |z||w|$. Par ailleurs, $a^2 \leq a^2 + b^2$, d'où $|a| \leq |z|$. Enfin, $z \cdot \bar{z} / |z|^2 = 1$ donne l'inverse.

2. L'inégalité triangulaire

Théorème :

Pour tous $z, w \in \mathbb{C}$, $|z + w| \leq |z| + |w|$. Il y a égalité si et seulement si $w = 0$ ou s'il existe un réel $\lambda \geq 0$ tel que $z = \lambda w$.

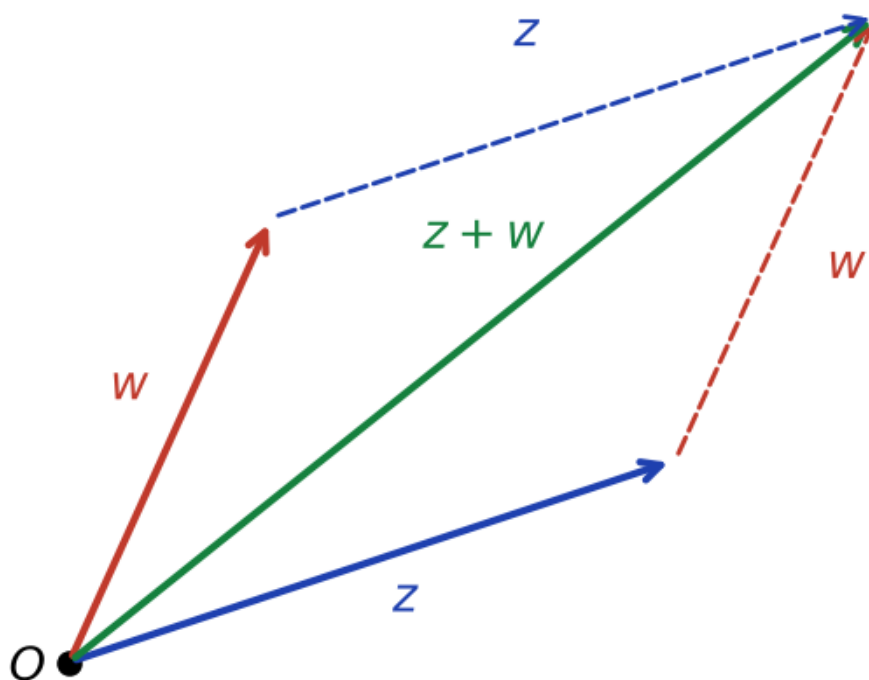
Démonstration :

On développe le carré du module :

$$|z + w|^2 = (z + w)(\bar{z} + \bar{w}) = |z|^2 + |w|^2 + 2 \operatorname{Re}(z\bar{w}).$$

Or $\operatorname{Re}(z\bar{w}) \leq |z\bar{w}| = |z| |w|$. Par conséquent, $|z + w|^2 \leq (|z| + |w|)^2$, et l'inégalité suit puisque les deux nombres sont positifs. Il y a égalité si et seulement si $\operatorname{Re}(z\bar{w}) = |z\bar{w}|$, c'est-à-dire si $z\bar{w}$ est un réel positif. Si $w \neq 0$, cela signifie que $z = \frac{z\bar{w}}{|w|^2} w$ avec $\lambda = \frac{z\bar{w}}{|w|^2} \geq 0$. La réciproque est immédiate.

Le nom de ce résultat vient de la géométrie. Comme le montre la figure ci-dessous, $|z|$, $|w|$ et $|z + w|$ sont les longueurs des côtés d'un triangle. Ainsi, la longueur d'un côté ne dépasse jamais la somme des deux autres.



$$|z + w| \leq |z| + |w| \text{ (inégalité triangulaire)}$$

Corollaire :

Pour tous $z, w \in \mathbb{C}$, $||z| - |w|| \leq |z - w|$. De plus, pour $z_1, \dots, z_n$ complexes, $\left| \sum_{k=1}^n z_k \right| \leq \sum_{k=1}^n |z_k|$.

Exemple :

Soit z tel que $|z| \leq 1$. Alors $|z^2 + 3z - 5| \geq 5 - |z|^2 - 3|z| \geq 5 - 1 - 3 = 1$. En particulier, le polynôme $z^2 + 3z - 5$ ne s'annule pas dans le disque unité fermé.

III. Trigonométrie et exponentielle complexe

1. Les formules de trigonométrie

Le cercle trigonométrique définit $\cos\theta$ et $\sin\theta$ comme les coordonnées d'un point du cercle de centre O et de rayon 1. On rappelle ici les formules à connaître parfaitement. En effet, toutes les autres s'en déduisent.

Propriété :

Pour tous réels a et b :

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b, \quad \sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b.$$

On en déduit $\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$ et $\sin 2a = 2 \sin a \cos a$. De plus, lorsque les tangentes sont définies, $\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$.

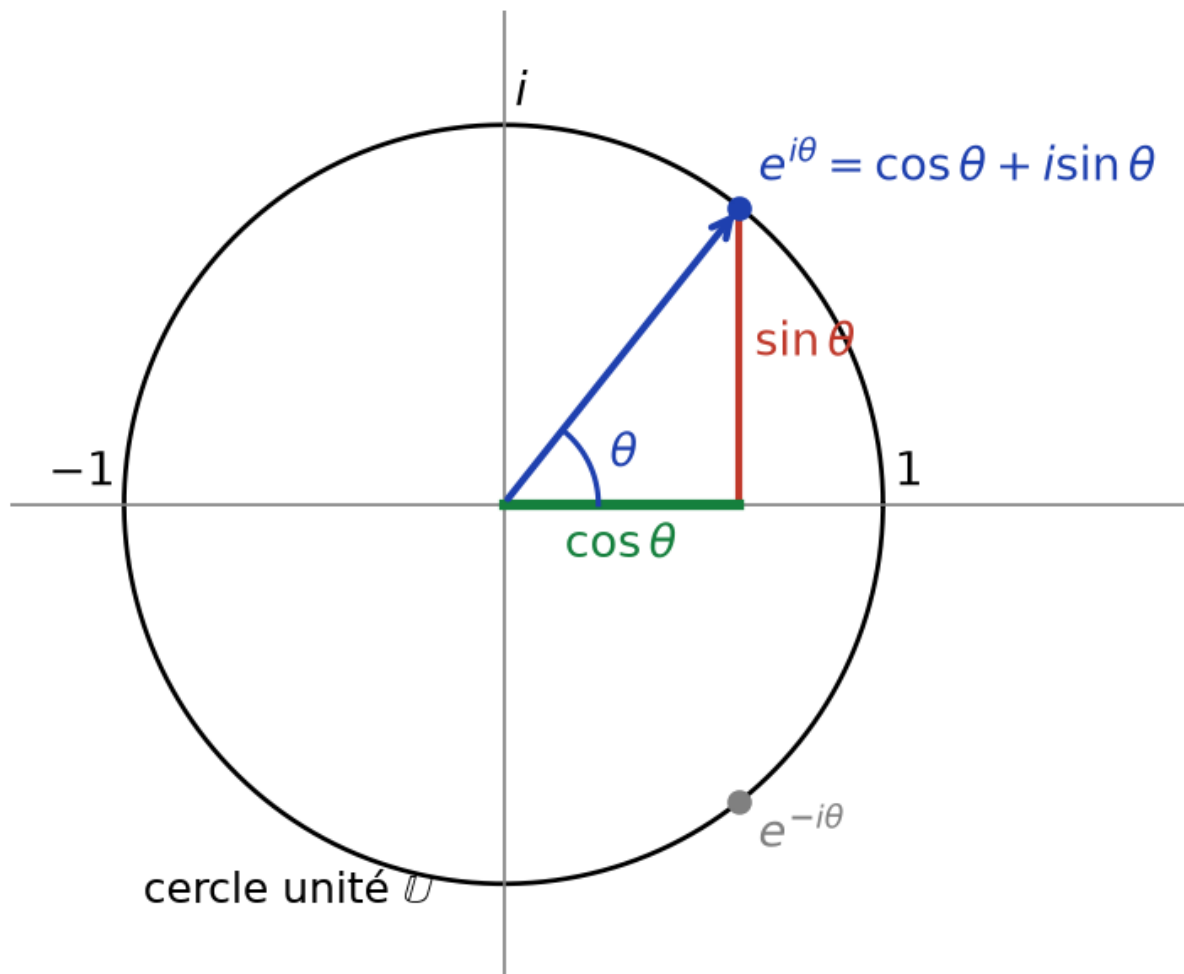
2. L'exponentielle d'un imaginaire pur

Définition :

Pour $\theta \in \mathbb{R}$, on pose $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$. On note $\mathbb{U}$ l'ensemble des complexes de module 1.

Comme le montre la figure ci-dessous, le point d'affixe $e^{i\theta}$ parcourt le cercle unité. Son conjugué

$e^{-i\theta}$ est le point symétrique par rapport à l'axe des réels.



Théorème :

L'application $\theta \rightarrow e^{i\theta}$ est surjective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{U}$, et pour tous réels a, b :

$$e^{i(a+b)} = e^{ia} e^{ib}, \quad \overline{e^{ia}} = e^{-ia} = \frac{1}{e^{ia}}, \quad e^{ia} = e^{ib} \Leftrightarrow a - b \in 2\pi\mathbb{Z}.$$

Démonstration :

On développe le produit :

$$e^{ia}e^{ib} = (\cos a \cos b - \sin a \sin b) + i(\sin a \cos b + \cos a \sin b).$$

D'après les formules d'addition, c'est exactement $\cos(a+b) + i\sin(a+b)$. Ensuite, soit $u = x + iy$ de module 1. Alors $x^2 + y^2 = 1$, donc il existe θ tel que $x = \cos\theta$ et $y = \sin\theta$: c'est la définition du cosinus et du sinus par le cercle. Enfin, $e^{ia} = e^{ib}$ équivaut à $e^{i(a-b)} = 1$, soit $\cos(a-b) = 1$ et $\sin(a-b) = 0$, c'est-à-dire $a-b \in 2\pi\mathbb{Z}$.

Proposition :

Formules d'Euler : pour tout réel θ , $\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$ et $\sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$.

Formule de Moivre : pour tout réel θ et tout entier $n \in \mathbb{Z}$,
 $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$.

Les formules d'Euler découlent des expressions de la partie réelle et de la partie imaginaire. La formule de Moivre, quant à elle, s'obtient par récurrence sur $n \geq 0$ à partir de $e^{i(a+b)} = e^{ia}e^{ib}$. Pour $n < 0$, on utilise ensuite $e^{-i\theta} = 1 / e^{i\theta}$.

3. Forme trigonométrique et argument

Théorème :

Tout complexe non nul z s'écrit $z = r e^{i\theta}$ avec $r = |z| > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Le réel θ est unique modulo 2π : on l'appelle un **argument** de z , noté $\arg z$. L'unique argument situé dans $]-\pi, \pi]$ est l'argument principal.

Démonstration :

Le complexe $z / |z|$ est de module 1. D'après le théorème précédent, il existe donc θ tel que $z / |z| = e^{i\theta}$. Si $r e^{i\theta} = r' e^{i\theta'}$, en prenant les modules on obtient $r = r'$. Ensuite, $e^{i\theta} = e^{i\theta'}$, donc $\theta - \theta' \in 2\pi\mathbb{Z}$.

Propriété :

Pour z, w non nuls et $n \in \mathbb{Z}$, modulo 2π : $\arg(zw) \equiv \arg z + \arg w$,
 $\arg(z / w) \equiv \arg z - \arg w$, $\arg \bar{z} \equiv -\arg z$ et $\arg(z^n) \equiv n \arg z$.

Ces règles découlent directement de $e^{i(a+b)} = e^{ia}e^{ib}$. Ainsi, multiplier deux complexes revient à multiplier les modules et à ajouter les arguments.

Méthode :

Pour passer de la forme algébrique $z = a + ib$ à la forme exponentielle :

- on calcule d'abord $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$;
- on factorise ensuite : $z = r\left(\frac{a}{r} + i\frac{b}{r}\right)$;
- on reconnaît enfin un angle θ tel que $\cos\theta = \frac{a}{r}$ et $\sin\theta = \frac{b}{r}$.

Attention : la seule relation $\tan\theta = b / a$ ne suffit pas, car elle ne détermine θ qu'à π près.

Exemple :

Soit $z = -1 + i\sqrt{3}$. D'abord, $|z| = \sqrt{1+3} = 2$. Ensuite, $z = 2\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. On reconnaît $\cos\frac{2\pi}{3}$ et $\sin\frac{2\pi}{3}$, donc $z = 2e^{2i\pi/3}$. Par conséquent, $z^6 = 2^6 e^{4i\pi} = 64$.

4. L'exponentielle complexe

Définition :

Pour $z = x + iy$ avec x, y réels, on pose $e^z = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i\sin y)$.

Propriété :

Pour tous $z, z' \in \mathbb{C}$, $e^{z+z'} = e^z e^{z'}$, $|e^z| = e^{\operatorname{Re}(z)}$ et $e^z \neq 0$. De plus, $e^z = e^{z'}$ si et seulement si $z - z' \in 2i\pi\mathbb{Z}$. Enfin, pour tout $a \in \mathbb{C}$ non nul, l'équation $e^z = a$ a pour solutions les complexes $\ln|a| + i\theta + 2ik\pi$, où θ est un argument de a et $k \in \mathbb{Z}$.

Démonstration :

La première formule combine la propriété de l'exponentielle réelle et celle de e^{iy} . Ensuite, si $z = x + iy$, l'équation $e^z = |a|e^{i\theta}$ équivaut à $e^x = |a|$ et $e^{iy} = e^{i\theta}$, par unicité de la forme trigonométrique. Autrement dit, $x = \ln|a|$ et $y \in \theta + 2\pi\mathbb{Z}$.

IV. Applications à la trigonométrie

1. Linéarisation

Linéariser, c'est écrire un produit ou une puissance de cosinus et de sinus comme une combinaison de $\cos(kx)$ et de $\sin(kx)$. Ce travail sert surtout à calculer des primitives.

Méthode :

Pour linéariser $\cos^p x \sin^q x$:

- on remplace d'abord chaque facteur par sa formule d'Euler ;
- on développe ensuite avec la formule du binôme ;
- on regroupe enfin les termes conjugués e^{ikx} et e^{-ikx} en $2\cos(kx)$ ou $2i\sin(kx)$.

Exemple :

Linéarisons $\cos^3 x$. Par la formule d'Euler et le binôme :

$$\cos^3 x = \frac{(e^{ix} + e^{-ix})^3}{8} = \frac{e^{3ix} + 3e^{ix} + 3e^{-ix} + e^{-3ix}}{8} = \frac{2\cos 3x + 6\cos x}{8}.$$

Ainsi, $\cos^3 x = \frac{1}{4}\cos 3x + \frac{3}{4}\cos x$. Une primitive de $\cos^3$ est donc $\frac{1}{12}\sin 3x + \frac{3}{4}\sin x$.

2. Développer $\cos(nx)$ et $\sin(nx)$

L'opération inverse consiste à exprimer $\cos(nx)$ en fonction de $\cos x$ et de $\sin x$. Pour cela, on

applique la formule de Moivre puis le binôme de Newton. On sépare ensuite partie réelle et partie imaginaire.

Exemple :

Posons $c = \cos x$ et $s = \sin x$. Alors

$\cos 3x + i \sin 3x = (c + is)^3 = c^3 + 3ic^2s - 3cs^2 - is^3$. En identifiant les parties réelles, puis en remplaçant s^2 par $1 - c^2$:

$$\cos 3x = c^3 - 3c(1 - c^2) = 4\cos^3 x - 3\cos x.$$

De même, les parties imaginaires donnent $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$.

3. Factorisation et sommes trigonométriques

La technique de l'angle moitié est l'outil central de cette partie. Elle consiste à mettre en facteur l'exponentielle de l'angle moyen.

Propriété :

Pour tous réels a et b :

$$e^{ia} + e^{ib} = 2\cos\left(\frac{a-b}{2}\right) e^{i\frac{a+b}{2}}, \quad e^{ia} - e^{ib} = 2i\sin\left(\frac{a-b}{2}\right) e^{i\frac{a+b}{2}}.$$

En prenant les parties réelles et imaginaires, on obtient par exemple

$$\cos p + \cos q = 2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2} \text{ et } \sin p - \sin q = 2\cos\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}.$$

Exemple :

Soit $x \notin 2\pi\mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$. Calculons $C_n = \sum_{k=0}^n \cos(kx)$. C'est la partie réelle d'une somme géométrique de raison $e^{ix} \neq 1$:

$$\sum_{k=0}^n e^{ikx} = \frac{e^{i(n+1)x} - 1}{e^{ix} - 1} = \frac{e^{i(n+1)x/2} 2i\sin\frac{(n+1)x}{2}}{e^{ix/2} 2i\sin\frac{x}{2}} = e^{inx/2} \frac{\sin\frac{(n+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}.$$

Par conséquent,
$$C_n = \frac{\cos\frac{nx}{2} \sin\frac{(n+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}.$$

V. Racines carrées et équations du second degré

1. Racines carrées d'un complexe

Théorème :

Tout complexe non nul w possède exactement deux racines carrées, c'est-à-dire deux complexes z tels que $z^2 = w$. Elles sont opposées. Si $w = re^{i\theta}$, ce sont $\sqrt{r} e^{i\theta/2}$ et $-\sqrt{r} e^{i\theta/2}$.

Démonstration :

Posons $z_0 = \sqrt{r} e^{i\theta/2}$. Alors $z_0^2 = r e^{i\theta} = w$. Ensuite, $z^2 = w$ équivaut à $z^2 - z_0^2 = 0$, c'est-à-dire $(z - z_0)(z + z_0) = 0$. Or un corps n'a pas de diviseur de zéro, donc $z = z_0$ ou $z = -z_0$. Enfin, ces deux racines sont distinctes car $z_0 \neq 0$.

Lorsque l'argument de w n'est pas un angle remarquable, on cherche plutôt les racines carrées sous forme algébrique.

Méthode :

Pour trouver les racines carrées de $w = \alpha + i\beta$, on cherche $z = x + iy$ avec $z^2 = w$. On écrit trois équations :

$$x^2 - y^2 = \alpha, \quad 2xy = \beta, \quad x^2 + y^2 = |w|.$$

La troisième vient de $|z|^2 = |w|$. Les première et troisième donnent x^2 et y^2 . Ensuite, le signe de β indique si x et y sont de même signe.

Exemple :

Cherchons les racines carrées de $3 - 4i$. On a $x^2 - y^2 = 3$, $x^2 + y^2 = 5$ et $xy = -2$. Donc $x^2 = 4$ et $y^2 = 1$, avec x et y de signes contraires. Les racines carrées sont donc $2 - i$ et $-2 + i$. On vérifie : $(2 - i)^2 = 4 - 4i - 1 = 3 - 4i$.

2. Équations du second degré

Théorème :

Soient $a, b, c \in \mathbb{C}$ avec $a \neq 0$, et $\Delta = b^2 - 4ac$. Soit δ une racine carrée de Δ . Alors l'équation $az^2 + bz + c = 0$ a pour solutions

$$z_1 = \frac{-b + \delta}{2a} \text{ et } z_2 = \frac{-b - \delta}{2a},$$

confondues si et seulement si $\Delta = 0$. De plus, $z_1 + z_2 = -\frac{b}{a}$ et $z_1 z_2 = \frac{c}{a}$.

Démonstration :

On met le trinôme sous forme canonique :

$$az^2 + bz + c = a \left[\left(z + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right] = a \left(z + \frac{b}{2a} - \frac{\delta}{2a} \right) \left(z + \frac{b}{2a} + \frac{\delta}{2a} \right).$$

Un produit est nul si et seulement si l'un des facteurs l'est, d'où les deux solutions. Enfin, la somme et le produit se calculent directement.

Attention :

La notation $\sqrt{\Delta}$ est réservée aux réels positifs. Pour un discriminant complexe, on parle d'**une** racine carrée δ , calculée par la méthode précédente.

Exemple :

Réolvons $z^2 - (3 + i)z + 4 + 3i = 0$. On calcule

$\Delta = (3 + i)^2 - 4(4 + 3i) = -8 - 6i$. Une racine carrée de Δ est $\delta = 1 - 3i$, car $(1 - 3i)^2 = 1 - 6i - 9$. Les solutions sont donc $\frac{3 + i + 1 - 3i}{2} = 2 - i$ et $\frac{3 + i - 1 + 3i}{2} = 1 + 2i$.

VI. Racines n-ièmes de l'unité et d'un complexe

1. Racines n-ièmes de l'unité

Définition :

Soit $n \geq 1$ un entier. Une **racine n-ième de l'unité** est un complexe z tel que $z^n = 1$. On note $\mathbb{U}_n$ leur ensemble.

Théorème :

L'ensemble $\mathbb{U}_n$ compte exactement n éléments : $\mathbb{U}_n = \left\{ e^{2ik\pi/n}, k \in \{0, 1, \dots, n-1\} \right\}$. Si $n \geq 2$, leur somme est nulle.

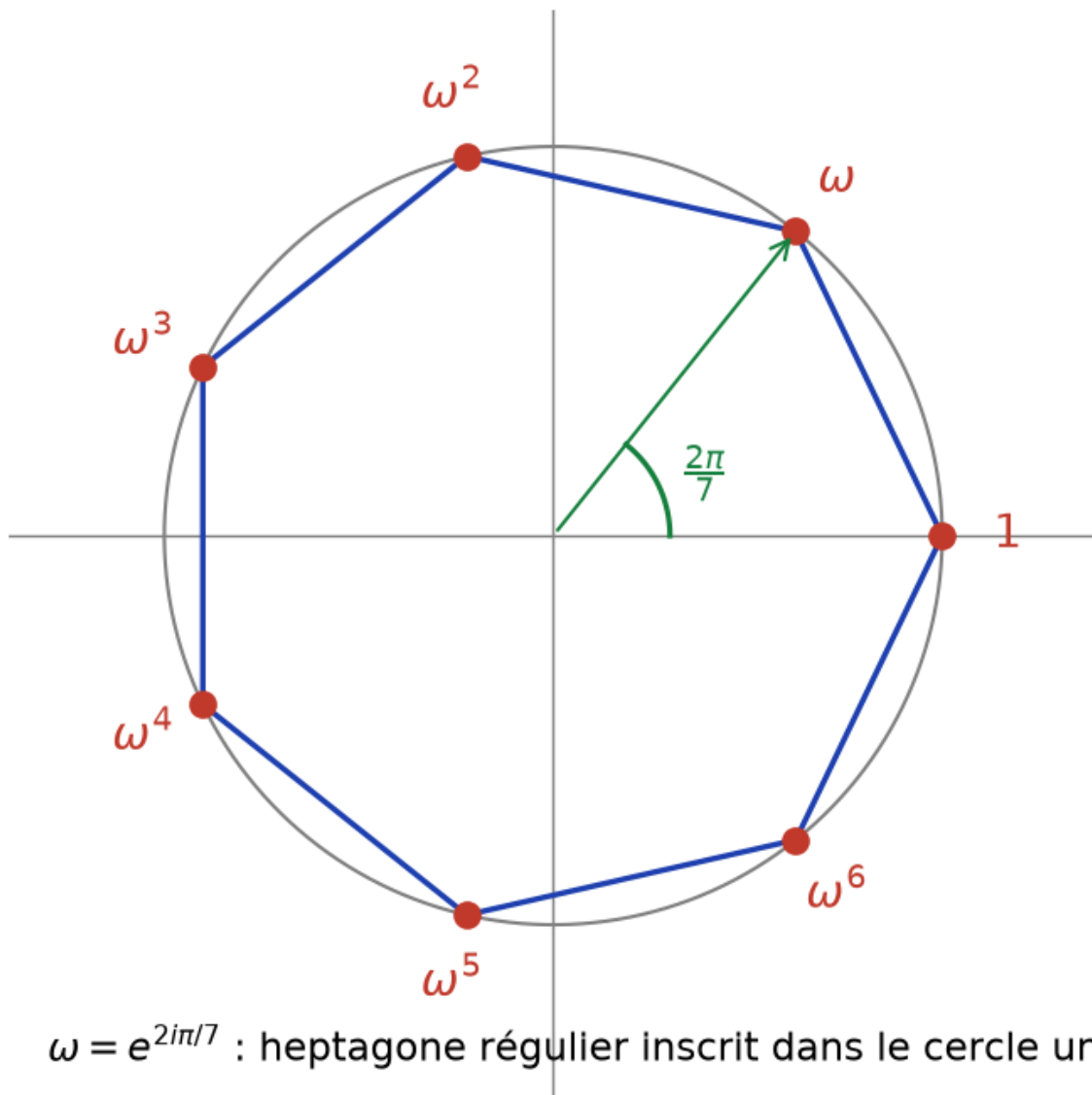
Démonstration :

Si $z^n = 1$, alors $|z|^n = 1$, donc $|z| = 1$ et $z = e^{i\theta}$. L'équation devient $e^{in\theta} = 1$, c'est-à-dire $n\theta \in 2\pi\mathbb{Z}$. Ainsi, $\theta = 2k\pi/n$ avec $k \in \mathbb{Z}$. Or $e^{2ik\pi/n}$ ne dépend que du reste de k modulo n . De plus, les valeurs obtenues pour $k = 0, \dots, n-1$ sont distinctes,

car leurs arguments diffèrent de moins de 2π . Enfin, posons $\omega = e^{2i\pi/n} \neq 1$. La somme vaut

$$\sum_{k=0}^{n-1} \omega^k = \frac{1 - \omega^n}{1 - \omega} = 0.$$

Comme le montre la figure ci-dessous pour $n = 7$, les racines n -ièmes de l'unité sont les sommets d'un polygone régulier. Ce polygone est inscrit dans le cercle unité et possède le sommet 1 .



Notation :

On note $j = e^{2i\pi/3} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Ainsi, $\mathbb{U}_3 = \{1, j, j^2\}$, avec $1 + j + j^2 = 0$ et $j^2 = \bar{j}$.

2. Racines n-ièmes d'un complexe non nul

Théorème :

Soit $a = re^{i\alpha}$ un complexe non nul. L'équation $z^n = a$ possède exactement n solutions :

$$z_k = r^{1/n} e^{i\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)}, \quad k \in \{0, 1, \dots, n-1\}.$$

Autrement dit, si z_0 est une solution, les solutions sont les z_0^ω avec $\omega \in \mathbb{U}_n$.

Démonstration :

D'abord, $z_0 = r^{1/n} e^{i\alpha/n}$ vérifie $z_0^n = a$. Ensuite, comme $z_0 \neq 0$, on a $z^n = a \Leftrightarrow (z / z_0)^n = 1 \Leftrightarrow z / z_0 \in \mathbb{U}_n$. Le résultat découle alors du théorème précédent.

Méthode :

Pour calculer les racines n-ièmes d'un complexe a :

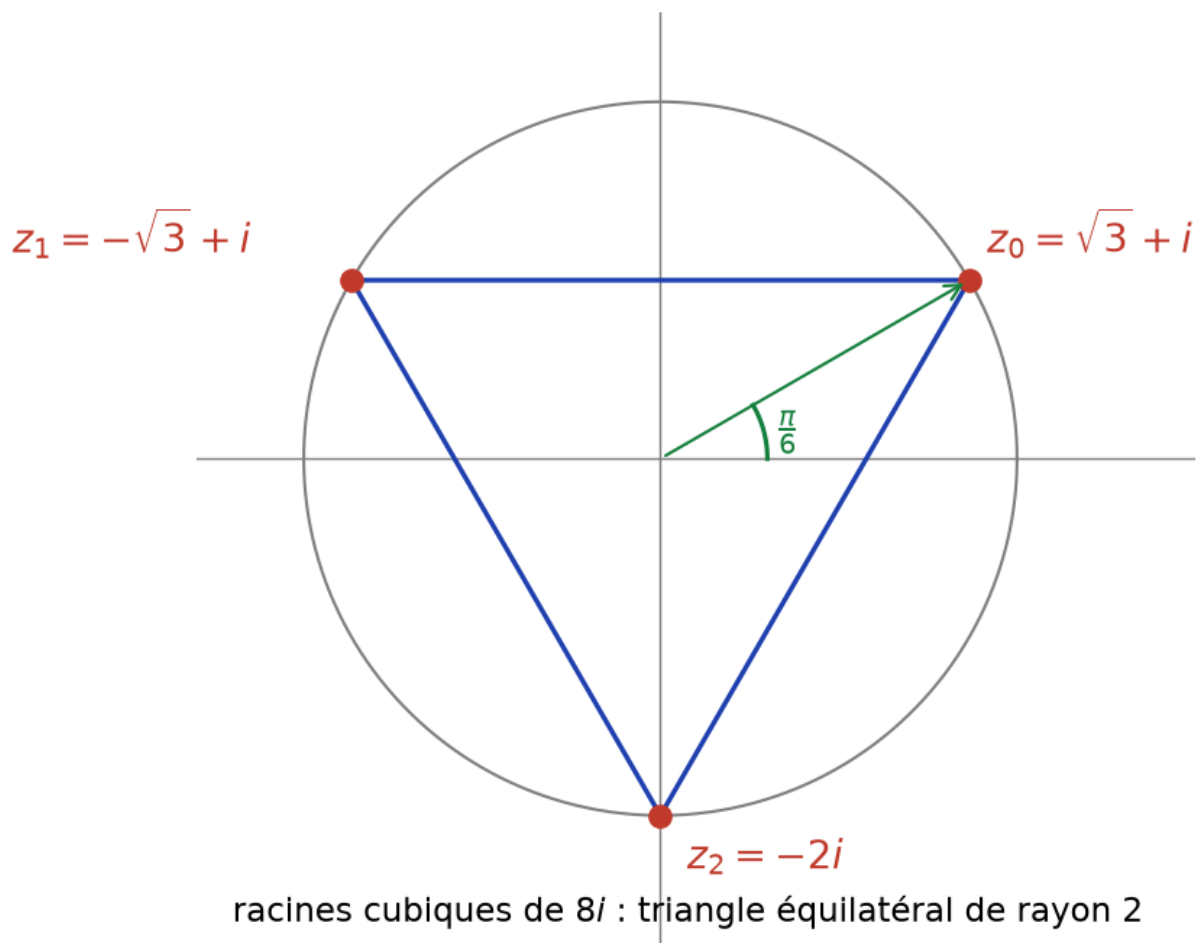
- on écrit d'abord a sous forme exponentielle $re^{i\alpha}$;

- on cherche ensuite $z = \rho e^{i\theta}$: l'équation devient $\rho^n = r$ et $n\theta \equiv \alpha \pmod{2\pi}$;
- on conclut enfin $\rho = r^{1/n}$ et $\theta = \frac{\alpha + 2k\pi}{n}$ pour $k = 0, \dots, n-1$.

Exemple :

Réolvons $z^3 = 8i$. On a $8i = 8e^{i\pi/2}$. Les solutions sont donc $2e^{i(\pi/6 + 2k\pi/3)}$ pour $k \in \{0, 1, 2\}$. Autrement dit, ce sont $\sqrt{3} + i$, $-\sqrt{3} + i$ et $-2i$.

La figure ci-dessous montre ces trois solutions. Elles forment un triangle équilatéral inscrit dans le cercle de rayon 2, obtenu en tournant le triangle $\{1, j, j^2\}$ puis en l'agrandissant.



VII. Interprétation géométrique des nombres complexes

On identifie le plan euclidien orienté à $\mathbb{C}$ grâce à un repère orthonormé direct. Ainsi, chaque point M a une affixe z , et chaque vecteur $\vec{u}$ a une affixe. Les calculs de distances et d'angles se traduisent alors en calculs de modules et d'arguments.

Proposition :

Soient A, B, C trois points distincts d'affixes a, b, c . Alors $AB = |b - a|$, et une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ est $\arg \frac{c-a}{b-a}$. En particulier, A, B, C sont alignés si et seulement si $\frac{c-a}{b-a}$ est réel. De même, $(AB) \perp (AC)$ si et seulement si ce quotient est imaginaire pur.

1. Translations, homothéties, rotations

Théorème :

Soient $a \in \mathbb{C}$ non nul et $b \in \mathbb{C}$. On considère l'application $f : z \rightarrow az + b$.

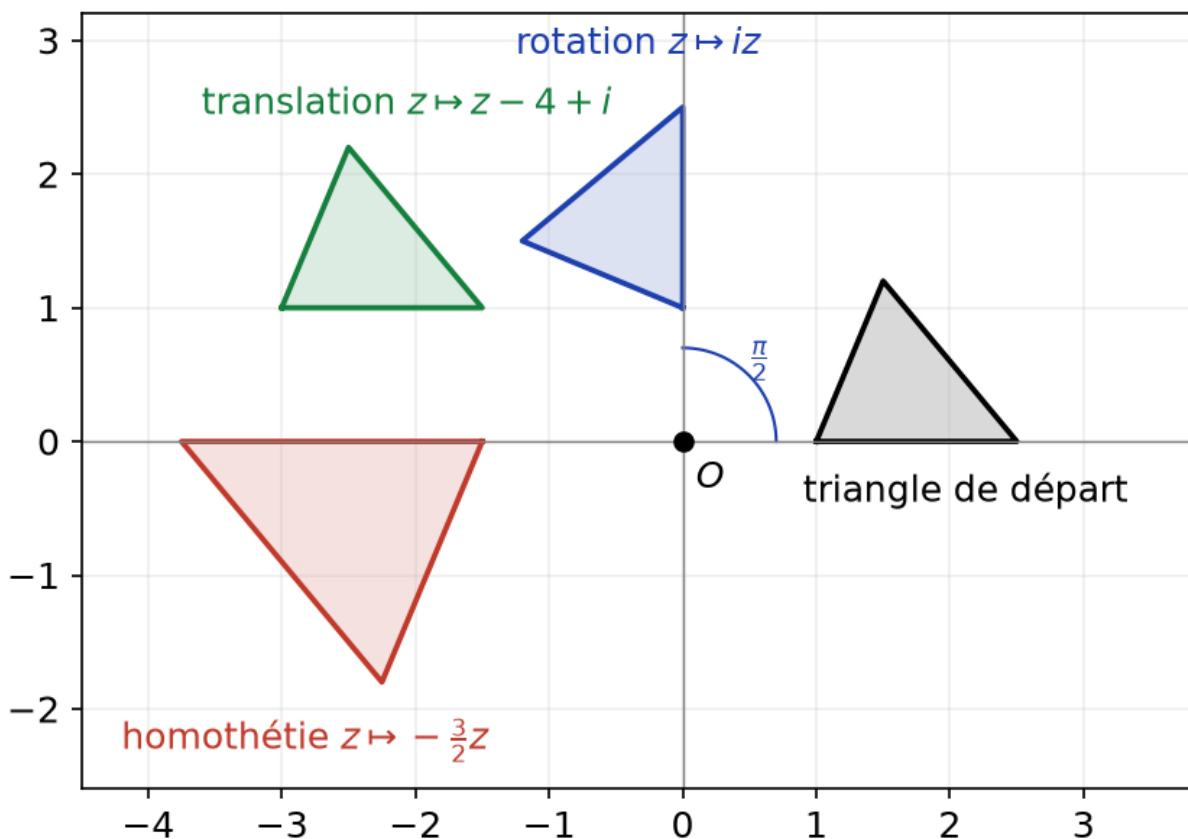
- Si $a = 1$, f est la **translation** de vecteur d'affixe b .
- Si $a \neq 1$, f a un unique point fixe $\omega = \frac{b}{1-a}$, et $f(z) - \omega = a(z - \omega)$.
- Si a est un réel différent de 1, f est l'**homothétie** de centre ω et de rapport a .
- Si $a = e^{i\theta}$ avec $\theta \notin 2\pi\mathbb{Z}$, f est la **rotation** de centre ω et d'angle θ .

Dans le cas général $a = \rho e^{i\theta}$, f est la composée de la rotation de centre ω et d'angle θ avec l'homothétie de même centre et de rapport ρ : c'est une similitude directe.

Démonstration :

Si $a \neq 1$, l'équation $w = aw + b$ a pour unique solution $w = b / (1 - a)$. En soustrayant $w = aw + b$ à $f(z) = az + b$, on obtient $f(z) - w = a(z - w)$. Ensuite, si $a = \rho e^{i\theta}$, la distance $|f(z) - w|$ vaut $\rho |z - w|$. De plus, l'argument de $f(z) - w$ est celui de $z - w$ augmenté de θ . On reconnaît les définitions géométriques de l'homothétie et de la rotation.

La figure ci-dessous montre les images d'un même triangle par trois transformations. La translation déplace le triangle sans le tourner. La rotation $z \rightarrow iz$ le fait tourner d'un quart de tour autour de O . Enfin, l'homothétie de rapport $-\frac{3}{2}$ le retourne et l'agrandit.



Exemple :

Déterminons la nature de $f : z \rightarrow iz + 1 + i$. Ici $a = i = e^{i\pi/2}$, donc f est une rotation

d'angle $\frac{\pi}{2}$. Son centre vérifie $\omega = i\omega + 1 + i$, soit $\omega = \frac{1+i}{1-i} = \frac{(1+i)^2}{2} = i$. Ainsi, f est la rotation de centre i et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

Remarque :

L'application $z \rightarrow \bar{z}$ est la symétrie orthogonale par rapport à l'axe des réels. Elle conserve les distances mais change l'orientation des angles. Ce n'est donc pas une application de la forme $z \rightarrow az + b$.

Ce qu'il faut retenir

- $\mathbb{C}$ est le plan $\mathbb{R}^2$ muni d'une multiplication qui en fait un corps commutatif, avec $i^2 = -1$; il n'y a pas d'ordre compatible sur $\mathbb{C}$.
- Le conjugué est compatible avec la somme et le produit, et $|z|^2 = z\bar{z}$; pour inverser un complexe, on multiplie par le conjugué.
- Le module est multiplicatif et vérifie l'inégalité triangulaire $|z + w| \leq |z| + |w|$, avec égalité quand z et w sont positivement liés.
- Tout complexe non nul s'écrit $re^{i\theta}$ avec $r = |z|$; l'argument est défini modulo 2π , et les arguments s'ajoutent dans un produit.
- Les formules d'Euler servent à linéariser, la formule de Moivre sert à développer $\cos(nx)$ et $\sin(nx)$.
- La technique de l'angle moitié factorise $e^{ia} \pm e^{ib}$ et donne les sommes $\sum \cos(kx)$.
- Tout complexe non nul a deux racines carrées opposées ; toute équation du second degré a deux solutions dans $\mathbb{C}$, éventuellement confondues.
- Il y a exactement n racines n -ièmes de l'unité, les $e^{2ik\pi/n}$, de somme nulle si $n \geq 2$; les racines n -ièmes de $a \neq 0$ s'obtiennent en multipliant l'une d'elles par ces racines.
- L'application $z \rightarrow az + b$ est une translation si $a = 1$, sinon une similitude de centre

$\frac{b}{1-a}$, d'angle $\arg a$ et de rapport $|a|$.

Questions fréquentes sur nombres complexes

Pourquoi ne peut-on pas comparer deux nombres complexes ?

Aucune relation d'ordre sur $\mathbb{C}$ n'est compatible avec l'addition et la multiplication. En effet, dans un tel ordre tout carré serait positif, donc 1 et $-1 = i^2$ seraient positifs, et on obtiendrait $0 \geq 1$. On ne compare donc que des modules, des parties réelles ou des arguments.

Comment trouver l'argument d'un complexe $a + ib$?

On calcule d'abord le module r , puis on cherche un angle θ tel que $\cos \theta = a/r$ et $\sin \theta = b/r$. La seule formule $\tan \theta = b/a$ ne suffit pas, car elle ne donne l'angle qu'à π près : il faut regarder le signe de a et de b .

Quelle est la différence entre linéariser et utiliser la formule de Moivre ?

Linéariser consiste à transformer une puissance comme $\cos^3 x$ en somme de $\cos(kx)$, grâce aux formules d'Euler ; c'est utile pour intégrer. La formule de Moivre fait l'inverse : elle exprime $\cos(nx)$ ou $\sin(nx)$ comme un polynôme en $\cos x$ et $\sin x$.

Peut-on écrire la racine carrée d'un nombre complexe ?

Non, la notation $\sqrt{}$ est réservée aux réels positifs. Un complexe non nul possède exactement deux racines carrées opposées, et aucune n'est privilégiée. On parle donc d'une racine carrée δ du discriminant, calculée sous forme algébrique ou exponentielle.

Pour aller plus loin en L1

- Les énoncés : [exercices de maths en L1 sur nombres complexes](#)

- Les solutions : [corrigé des exercices sur nombres complexes](#)
- À maîtriser avant : [Logique, raisonnement et ensembles](#)
- Chapitre précédent : [Entiers naturels, récurrence et dénombrement](#)
- Chapitre suivant : [Nombres réels et borne supérieure](#)
- Le sommaire : [tous les chapitres de maths de L1](#) et la [licence de maths de L1 à L3](#)