

Nombres complexes

Corrigé de l'exercice 1 : Calculs sous forme algébrique

1. On développe, en utilisant $i^2 = -1$: $z_1 = 2 - 2i + 3i - 3i^2 = 5 + i$. Pour le quotient, on multiplie par le conjugué du dénominateur :

$$z_2 = \frac{(1 + 2i)(3 + 4i)}{(3 - 4i)(3 + 4i)} = \frac{3 + 4i + 6i + 8i^2}{9 + 16} = \frac{-5 + 10i}{25}.$$

Ainsi $z_1 = 5 + i$ et $z_2 = -\frac{1}{5} + \frac{2}{5}i$.

2. D'abord, avec la forme algébrique, $|z_2| = \sqrt{\frac{1}{25} + \frac{4}{25}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$. Ensuite, le module d'un quotient est le quotient des modules : $|z_2| = \frac{|1 + 2i|}{|3 - 4i|} = \frac{\sqrt{5}}{5}$. **Les deux méthodes donnent**

$$|z_2| = \frac{\sqrt{5}}{5}.$$

3. On a $(1 + i)^2 = 1 + 2i + i^2 = 2i$. Par conséquent, $(1 + i)^8 = (2i)^4 = 16i^4 = 16$. Par ailleurs, $2026 = 4 \times 506 + 2$, donc $i^{2026} = (i^4)^{506} i^2 = -1$. **Donc**
 $(1 + i)^8 = 16$ et $i^{2026} = -1$.

4. On écrit $z = x + iy$ avec x, y réels. Alors

$2z + i\bar{z} = 2x + 2iy + ix + y = (2x + y) + i(x + 2y)$. Par identification des parties réelle et imaginaire, l'équation équivaut au système $2x + y = 3$ et $x + 2y = 0$. La seconde équation donne $x = -2y$; ensuite, la première donne $-3y = 3$, soit $y = -1$ et $x = 2$. On vérifie : $2(2 - i) + i(2 + i) = 4 - 2i + 2i - 1 = 3$. **L'unique solution est**
 $z = 2 - i$.

Corrigé de l'exercice 2 : Forme trigonométrique et valeurs exactes

1. On a $|z| = \sqrt{1+3} = 2$, donc $z = 2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. De même, $|w| = \sqrt{2}$ et $w = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. Ainsi $z = 2e^{i\pi/3}$ et $w = \sqrt{2}e^{-i\pi/4}$.

2. D'une part, $\frac{z}{w} = \frac{2}{\sqrt{2}}e^{i(\pi/3 + \pi/4)} = \sqrt{2}e^{7i\pi/12}$. D'autre part,

$$\frac{z}{w} = \frac{(1 + i\sqrt{3})(1 + i)}{(1 - i)(1 + i)} = \frac{1 + i + i\sqrt{3} - \sqrt{3}}{2} = \frac{1 - \sqrt{3}}{2} + i\frac{1 + \sqrt{3}}{2}.$$

En identifiant, $\sqrt{2}\cos\frac{7\pi}{12} = \frac{1 - \sqrt{3}}{2}$ et $\sqrt{2}\sin\frac{7\pi}{12} = \frac{1 + \sqrt{3}}{2}$. On divise par $\sqrt{2}$, puis on multiplie numérateur et dénominateur par $\sqrt{2}$. Donc $\cos\frac{7\pi}{12} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$ et $\sin\frac{7\pi}{12} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$. Le cosinus est bien négatif, ce qui est cohérent avec $\frac{7\pi}{12} \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$.

3. D'après la formule de Moivre, $z^{10} = 2^{10}e^{10i\pi/3}$. Or $\frac{10\pi}{3} = 2\pi + \frac{4\pi}{3}$, donc $e^{10i\pi/3} = e^{4i\pi/3} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Par conséquent, $z^{10} = -512 - 512\sqrt{3}i$.

4. On a $z^n = 2^n e^{in\pi/3}$ avec $2^n > 0$. Ce complexe est un réel strictement positif si et seulement si $e^{in\pi/3} = 1$, c'est-à-dire $\frac{n\pi}{3} \in 2\pi\mathbb{Z}$. Autrement dit, n doit être un multiple de 6. **Les entiers cherchés sont les $n = 6m$, avec $m \in \mathbb{N}$.**

Corrigé de l'exercice 3 : Racines carrées sous forme algébrique

1. On cherche $x + iy$, avec x, y réels, tel que $(x + iy)^2 = -5 + 12i$. L'identification et l'égalité des modules donnent $x^2 - y^2 = -5$, $x^2 + y^2 = 13$ et $2xy = 12$. Donc $x^2 = 4$, $y^2 = 9$, et x, y sont de même signe. On obtient $\pm(2 + 3i)$. De même, pour $8 - 6i$, de module 10 : $x^2 = 9$, $y^2 = 1$ et $xy < 0$, d'où $\pm(3 - i)$. Enfin, $|-15 - 8i| = \sqrt{225 + 64} = 17$; ainsi $x^2 = 1$, $y^2 = 16$ et $xy = -4 < 0$, d'où $\pm(1 - 4i)$. **Les racines carrées sont $\pm(2 + 3i)$, $\pm(3 - i)$ et $\pm(1 - 4i)$.**

2. Pour $1 + i$, de module $\sqrt{2}$, on obtient $x^2 - y^2 = 1$, $x^2 + y^2 = \sqrt{2}$ et $2xy = 1 > 0$. Par demi-somme et demi-différence, $x^2 = \frac{\sqrt{2} + 1}{2}$ et $y^2 = \frac{\sqrt{2} - 1}{2}$, avec x et y de même

signe. **Les racines carrées de $1 + i$ sont $\pm \left(\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}} \right)$.**

3. On a $1 + i = \sqrt{2} e^{i\pi/4}$. D'après le cours, ses racines carrées sont $\pm \sqrt{\sqrt{2}} e^{i\pi/8}$. **Ce sont $\pm 2^{1/4} e^{i\pi/8}$.**

4. La racine $2^{1/4} e^{i\pi/8}$ a une partie réelle strictement positive, car $\frac{\pi}{8} \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$. C'est donc celle de la question 2 affectée du signe $+$. En identifiant les parties réelles, $2^{1/4} \cos \frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}}$. Par suite,

$$\cos 2\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}} = \frac{2+\sqrt{2}}{4}.$$

Comme $\cos \frac{\pi}{8} > 0$, on obtient $\cos \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$.

Point de méthode : la condition sur le signe de xy est indispensable. Sans elle, on obtiendrait quatre candidats au lieu de deux.

Corrigé de l'exercice 4 : Équations du second degré à coefficients complexes

1. Le discriminant vaut

$$\Delta = (3 + 4i)^2 - 4(-1 + 7i) = 9 + 24i - 16 + 4 - 28i = -3 - 4i. \text{ Cherchons } \delta = x + iy \text{ tel que } \delta^2 = \Delta. \text{ On a } x^2 - y^2 = -3, x^2 + y^2 = 5 \text{ et } 2xy = -4.$$

Donc $x^2 = 1$, $y^2 = 4$ et $xy < 0$: on prend $\delta = 1 - 2i$. Les solutions sont alors

$$\frac{3 + 4i + 1 - 2i}{2} = 2 + i \text{ et } \frac{3 + 4i - 1 + 2i}{2} = 1 + 3i. \text{ L'ensemble des solutions est } \left\{ 2 + i, 1 + 3i \right\}.$$

2. On divise par i . Comme $\frac{3i-1}{i} = 3 - \frac{1}{i} = 3 + i$, l'équation équivaut à

$$z^2 - 3z + 3 + i = 0. \text{ Son discriminant est } 9 - 4(3 + i) = -3 - 4i = (1 - 2i)^2. \text{ Les solutions sont donc } \frac{3 + 1 - 2i}{2} = 2 - i \text{ et } \frac{3 - 1 + 2i}{2} = 1 + i. \text{ Vérifions : leur somme vaut } 3 = -\frac{-3i}{i} \text{ et leur produit } (2 - i)(1 + i) = 2 + 2i - i + 1 = 3 + i = \frac{3i - 1}{i}. \text{ Les solutions sont } 2 - i \text{ et } 1 + i.$$

3. Ici, $\Delta = 4\cos^2\theta - 4 = -4\sin^2\theta = (2i\sin\theta)^2$. On peut donc prendre $\delta = 2i\sin\theta$. Les solutions sont $\frac{2\cos\theta \pm 2i\sin\theta}{2} = \cos\theta \pm i\sin\theta$. **Les solutions sont $e^{i\theta}$ et $e^{-i\theta}$, confondues lorsque $\theta \in \pi\mathbb{Z}$.**
4. D'après la réciproque du cours, u et v sont les racines de $z^2 - z + 1 = 0$. Son discriminant vaut $-3 = (i\sqrt{3})^2$. Ainsi, $\{u, v\} = \left\{\frac{1+i\sqrt{3}}{2}, \frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right\}$. **On trouve $u = e^{i\pi/3}$ et $v = e^{-i\pi/3}$, à l'ordre près.**

Corrigé de l'exercice 5 : Module, conjugaison et inégalité triangulaire

1. On développe avec $|u|^2 = u\bar{u}$: $|z+w|^2 = |z|^2 + |w|^2 + 2\operatorname{Re}(z\bar{w})$ et $|z-w|^2 = |z|^2 + |w|^2 - 2\operatorname{Re}(z\bar{w})$. En sommant, les doubles produits s'éliminent. **Donc $|z+w|^2 + |z-w|^2 = 2(|z|^2 + |w|^2)$.** Dans le parallélogramme construit sur les vecteurs d'affixes z et w , les diagonales ont pour affixes $z+w$ et $z-w$. Ainsi, la somme des carrés des diagonales égale la somme des carrés des quatre côtés.
2. Posons $Z = \frac{z+w}{1+zw}$, bien défini car $zw \neq -1$. Comme $|z| = 1$, on a $\bar{z} = \frac{1}{z}$; de même, $\bar{w} = \frac{1}{w}$. Donc

$$\bar{Z} = \frac{\frac{1}{\bar{z}} + \frac{1}{\bar{w}}}{1 + \frac{1}{\bar{z}\bar{w}}} = \frac{\frac{z+w}{zw}}{\frac{zw+1}{zw}} = \frac{z+w}{1+zw} = Z.$$

Le complexe Z est égal à son conjugué : il est réel.

3. Soit z une solution. D'après l'inégalité triangulaire, $5 = |z+3i| \leq |z| + |3i| = 2 + 3 = 5$. Il y a donc égalité. Comme $3i \neq 0$, le cas d'égalité fournit un réel $\lambda \geq 0$ tel que $z = 3i\lambda$. Ensuite, $|z| = 3\lambda = 2$ donne $\lambda = \frac{2}{3}$, soit $z = 2i$. Réciproquement, $|2i| = 2$ et $|5i| = 5$. **L'unique solution est $z = 2i$.**
4. Écrivons $z = a + ib$. D'abord, l'inégalité triangulaire donne $|z| \leq |a| + |ib| = |a| + |b|$. Ensuite, $(|a| + |b|)^2 = a^2 + b^2 + 2|a||b|$. Or $2|a||b| \leq a^2 + b^2$, car $(|a| - |b|)^2 \geq 0$. Donc $(|a| + |b|)^2 \leq 2|z|^2$. Comme les deux membres sont positifs, on peut prendre la racine carrée. **Ainsi $|z| \leq |\operatorname{Re}(z)| + |\operatorname{Im}(z)| \leq \sqrt{2}|z|$.**

Corrigé de l'exercice 6 : Linéarisation et calcul d'intégrales

1. Avec la formule d'Euler et le binôme de Newton,

$$\cos^3 t = \frac{e^{3it} + 3e^{it} + 3e^{-it} + e^{-3it}}{8} = \frac{2\cos(3t) + 6\cos t}{8}.$$

De même, $(2i)^4 = 16$, d'où

$$\sin^4 t = \frac{e^{4it} - 4e^{2it} + 6 - 4e^{-2it} + e^{-4it}}{16} = \frac{2\cos(4t) - 8\cos(2t) + 6}{16}.$$

Donc $\cos^3 t = \frac{\cos(3t) + 3\cos t}{4}$ **et** $\sin^4 t = \frac{\cos(4t) - 4\cos(2t) + 3}{8}.$

2. On écrit $\sin t \cos^2 t = \frac{(e^{it} - e^{-it})(e^{2it} + 2 + e^{-2it})}{8i}$. En développant, on obtient $e^{3it} + 2e^{it} + e^{-it} - e^{it} - 2e^{-it} - e^{-3it}$, soit $(e^{3it} - e^{-3it}) + (e^{it} - e^{-it})$. Par conséquent, $\sin t \cos^2 t = \frac{2i\sin(3t) + 2i\sin t}{8i}$. **Ainsi** $\sin t \cos^2 t = \frac{\sin(3t) + \sin t}{4}.$

3. Grâce à la linéarisation,

$$\int_0^{\pi/2} \sin^4 t \, dt = \frac{1}{8} \left[\frac{\sin(4t)}{4} - 2\sin(2t) + 3t \right]_0^{\pi/2} = \frac{1}{8} \cdot \frac{3\pi}{2}.$$

En effet, $\sin(2\pi) = \sin(\pi) = 0$. **Donc** $\int_0^{\pi/2} \sin^4 t \, dt = \frac{3\pi}{16}.$

4. D'abord, par linéarisation :

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin(3t) + \sin t}{4} \, dt = \frac{1}{4} \left[-\frac{\cos(3t)}{3} - \cos t \right]_0^{\pi} = \frac{1}{4} \left(\frac{4}{3} + \frac{4}{3} \right) = \frac{2}{3}. \text{ Ensuite, on remarque}$$

que $\sin t \cos^2 t$ est la dérivée de $-\frac{\cos^3 t}{3}$. Donc l'intégrale vaut $\left[-\frac{\cos^3 t}{3} \right]_0^{\pi} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}$. **Les deux méthodes donnent** $\frac{2}{3}.$

Corrigé de l'exercice 7 : Formule de Moivre et valeur de

sin($\pi/10$)

- Notons $c = \cos t$ et $s = \sin t$. Par la formule de Moivre et le binôme,
 $\cos(3t) + i\sin(3t) = (c + is)^3 = c^3 + 3ic^2s - 3cs^2 - is^3$. On identifie les parties réelles : $\cos(3t) = c^3 - 3c(1 - c^2)$. Puis les parties imaginaires :
 $\sin(3t) = 3(1 - s^2)s - s^3$. **Donc** $\cos(3t) = 4\cos^3 t - 3\cos t$ **et**
 $\sin(3t) = 3\sin t - 4\sin^3 t$.
- La partie réelle de $(c + is)^4$ vaut $c^4 - 6c^2s^2 + s^4$. On remplace s^2 par $1 - c^2$:
$$c^4 - 6c^2 + 6c^4 + 1 - 2c^2 + c^4 = 8c^4 - 8c^2 + 1.$$
Ainsi $\cos(4t) = 8\cos^4 t - 8\cos^2 t + 1$.
- Supposons $\cos t \neq 0$ et $\cos(3t) \neq 0$. D'après la question 1, $\tan(3t) = \frac{3c^2s - s^3}{c^3 - 3cs^2}$. On divise numérateur et dénominateur par c^3 , et on note $T = \tan t$. On obtient
 $\tan(3t) = \frac{3T - T^3}{1 - 3T^2}$. Or $\cos(3t) \neq 0$ équivaut à $t \notin \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}\mathbb{Z}$, et cet ensemble exclu contient déjà $\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$. **Pour** $t \notin \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}\mathbb{Z}$, $\tan(3t) = \frac{3\tan t - \tan^3 t}{1 - 3\tan^2 t}$.
- Pour $t = \frac{\pi}{10}$, on a $2t = \frac{\pi}{5} = \frac{\pi}{2} - \frac{3\pi}{10}$. Donc $\sin(2t) = \cos(\frac{\pi}{2} - 2t) = \cos(3t)$. Avec les formules de duplication et de la question 1, cela s'écrit $2sc = 4c^3 - 3c$. Comme $c = \cos\frac{\pi}{10} \neq 0$, on simplifie : $2s = 4c^2 - 3 = 1 - 4s^2$. Ainsi s est racine de $4X^2 + 2X - 1$, de discriminant 20 . Donc $s = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{4}$. Or $s > 0$ puisque $\frac{\pi}{10} \in]0, \pi[$. **Par conséquent**, $\sin\frac{\pi}{10} = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}$.

Corrigé de l'exercice 8 : Technique de l'angle moitié

- Par l'angle moitié, $1 + e^{i\theta} = 2\cos(\theta/2)e^{i\theta/2}$. Si $\theta \in]-\pi, \pi[$, alors $\theta/2 \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, donc $\cos(\theta/2) > 0$. **Dans ce cas, le module vaut $2\cos(\theta/2)$ et $\theta/2$ est un argument.** Si $\theta \in]\pi, 3\pi[$, en revanche, $\cos(\theta/2) < 0$. On écrit alors
 $1 + e^{i\theta} = -2\cos(\theta/2)e^{i(\theta/2 + \pi)}$. **Le module vaut $-2\cos(\theta/2)$ et $\theta/2 + \pi$ est un argument.**
- On a $1 - e^{i\theta} = -2i\sin(\theta/2)e^{i\theta/2}$. Or $-i = e^{-i\pi/2}$, d'où

$1 - e^{i\theta} = 2\sin(\theta/2) e^{i(\theta - \pi)/2}$. Pour $\theta \in]0, 2\pi[$, on a $\sin(\theta/2) > 0$. **Le module vaut $2\sin(\theta/2)$ et $\frac{\theta - \pi}{2}$ est un argument.**

3. Pour $\theta \in]0, \pi[$, le dénominateur ne s'annule pas. Ensuite,

$$\frac{1 + e^{i\theta}}{1 - e^{i\theta}} = \frac{2\cos(\theta/2) e^{i\theta/2}}{-2i\sin(\theta/2) e^{i\theta/2}} = \frac{\cos(\theta/2)}{-i\sin(\theta/2)} = i \frac{\cos(\theta/2)}{\sin(\theta/2)}.$$

Le quotient vaut $i \frac{\cos(\theta/2)}{\sin(\theta/2)}$: il est imaginaire pur.

4. Par la formule du binôme, $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} e^{ik\theta} = (1 + e^{i\theta})^n = 2^n \cos^n(\theta/2) e^{in\theta/2}$. Cette

égalité est valable pour tout réel θ . Il reste à prendre les parties réelle et imaginaire. **On obtient**

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cos(k\theta) = 2^n \cos^n\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{n\theta}{2}\right) \text{ et } \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \sin(k\theta) = 2^n \cos^n\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{n\theta}{2}\right).$$

Point de méthode : un module est toujours positif. Avant de lire le module dans $2\cos(\theta/2)e^{i\theta/2}$, vérifiez donc le signe du cosinus.

Corrigé de l'exercice 9 : Sommes trigonométriques

1. Si $t \in 2\pi\mathbb{Z}$, alors $kt \in 2\pi\mathbb{Z}$ pour tout k . Ainsi $\cos(kt) = 1$ et $\sin(kt) = 0$. **Donc $C_n(t) = n + 1$ et $S_n(t) = 0$.**

2. Si $t \notin 2\pi\mathbb{Z}$, la raison e^{it} est différente de 1. La somme géométrique vaut $\frac{1 - e^{i(n+1)t}}{1 - e^{it}}$. On factorise par l'angle moitié en haut et en bas :

$$C_n(t) + iS_n(t) = \frac{-2i\sin\left(\frac{(n+1)t}{2}\right)e^{i(n+1)t/2}}{-2i\sin\left(\frac{t}{2}\right)e^{it/2}} = \frac{\sin\left(\frac{(n+1)t}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} e^{int/2}.$$

Le facteur devant l'exponentielle est réel. **On en déduit $C_n(t) = \frac{\cos\left(\frac{nt}{2}\right)\sin\left(\frac{(n+1)t}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}$ et**

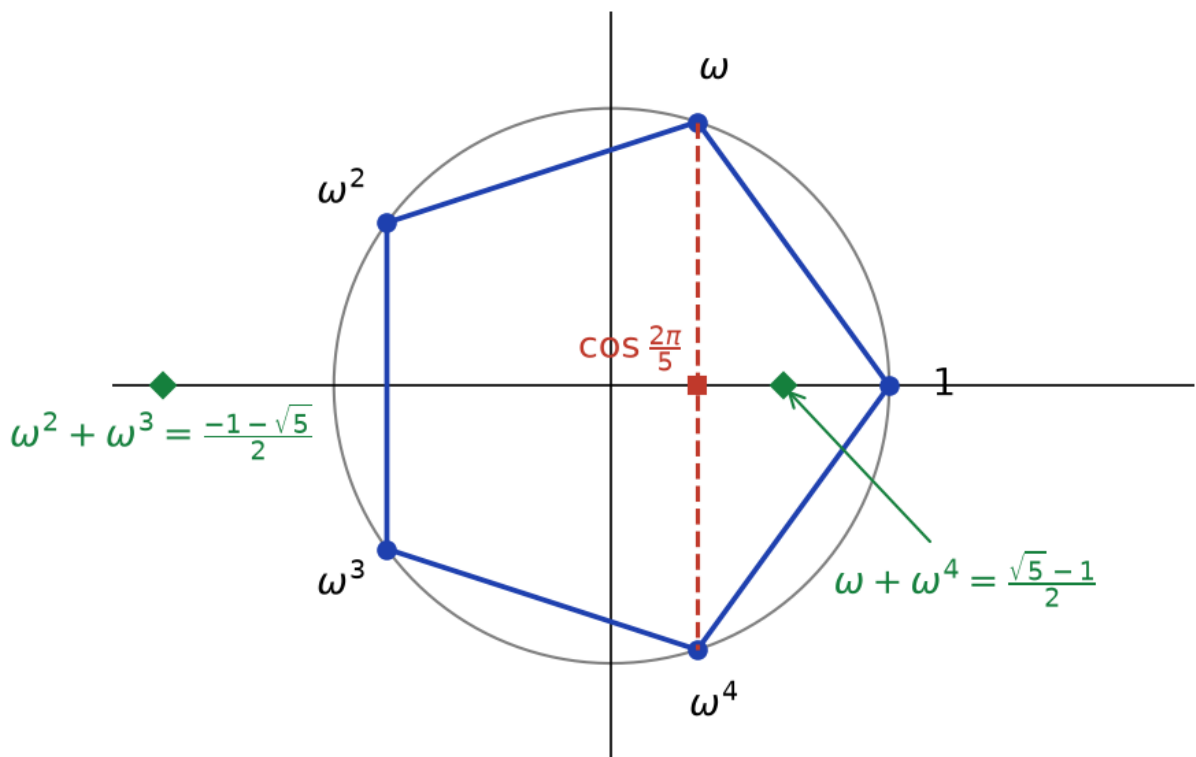
$$S_n(t) = \frac{\sin\left(\frac{nt}{2}\right)\sin\left(\frac{(n+1)t}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}.$$

3. On linéarise : $\cos^2(kt) = \frac{1 + \cos(2kt)}{2}$. Donc $\sum_{k=0}^n \cos^2(kt) = \frac{n+1}{2} + \frac{1}{2}C_n(2t)$.
Comme $t \notin \pi\mathbb{Z}$, on a $2t \notin 2\pi\mathbb{Z}$: la question 2 s'applique en remplaçant t par $2t$. **Ainsi**
$$\sum_{k=0}^n \cos^2(kt) = \frac{n+1}{2} + \frac{\cos(nt)\sin((n+1)t)}{2\sin t}.$$
4. Pour $n = 1$ et $t = \frac{\pi}{3}$, la somme directe vaut $\cos^2 0 + \cos^2 \frac{2\pi}{3} = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$. La formule donne $1 + \frac{\cos(\pi/3)\sin(2\pi/3)}{2\sin(\pi/3)} = 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$, car $\sin \frac{2\pi}{3} = \sin \frac{\pi}{3}$. **Les deux valeurs coïncident : $\frac{5}{4}$.**

Corrigé de l'exercice 10 : Racines cinquièmes de l'unité et $\cos(2\pi/5)$

1. On a $\omega^5 = e^{2i\pi} = 1$ et $\omega \neq 1$. La somme géométrique vaut donc $\frac{1 - \omega^5}{1 - \omega} = 0$. **Ainsi**
 $1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 = 0$.
2. Comme $|\omega| = 1$, on a $\bar{\omega} = \omega^{-1} = \omega^4$. Donc $a = \omega + \bar{\omega} = 2 \operatorname{Re}(\omega)$. De même,
 $\omega^3 = \omega^{-2} = \bar{\omega}^2$, donc $b = 2 \operatorname{Re}(\omega^2)$. **Par conséquent, $a = 2\cos \frac{2\pi}{5}$ et $b = 2\cos \frac{4\pi}{5}$.**
3. D'après la question 1, $a + b = -1$. Ensuite,
 $ab = \omega^3 + \omega^4 + \omega^6 + \omega^7 = \omega^3 + \omega^4 + \omega + \omega^2 = -1$, car $\omega^5 = 1$. Ainsi, a et b sont les racines de $X^2 + X - 1$, c'est-à-dire $\frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Or $\frac{2\pi}{5} \in]0, \frac{\pi}{2}[$, donc $a > 0$.
On obtient $a = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, $b = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ et $\cos \frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$.
4. On a $\cos \frac{\pi}{5} = -\cos\left(\pi - \frac{\pi}{5}\right) = -\cos \frac{4\pi}{5} = -\frac{b}{2}$. **Donc $\cos \frac{\pi}{5} = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$.**

La figure ci-dessous place les racines cinquièmes de l'unité. Elle montre aussi les deux sommes a et b sur l'axe réel : chacune est le double de l'abscisse d'une paire de sommets symétriques.

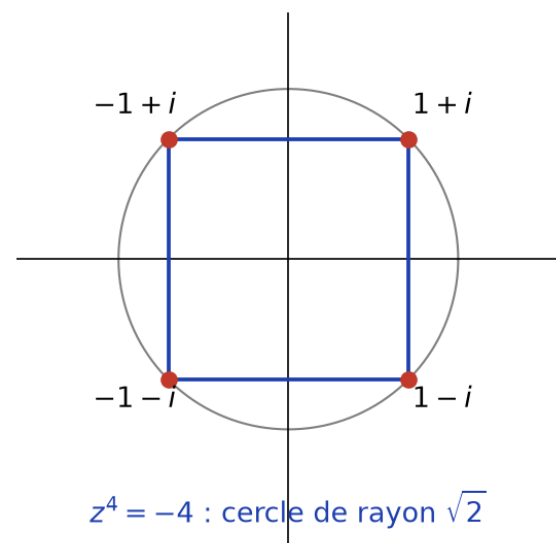
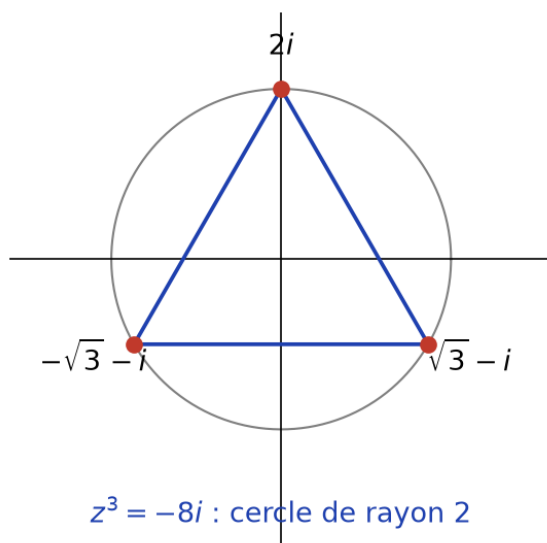


Corrigé de l'exercice 11 : Équations $z^n = a$

- On a $-8i = 8e^{-i\pi/2}$, et $2^3 = 8$. D'après le cours, les solutions sont les $2e^{i(-\pi/6 + 2k\pi/3)}$, pour $k \in \{0, 1, 2\}$. Leurs arguments sont $-\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{2}$ et $\frac{7\pi}{6}$. **Les solutions sont $\sqrt{3} - i$, $2i$ et $-\sqrt{3} - i$.** Elles forment un triangle équilatéral inscrit dans le cercle de centre O et de rayon 2 .
- On a $-4 = 4e^{i\pi}$, et $\sqrt{2}^4 = 4$. Les solutions sont donc les $\sqrt{2}e^{i(\pi/4 + k\pi/2)}$, pour $k \in \{0, 1, 2, 3\}$. **Ce sont $1 + i$, $-1 + i$, $-1 - i$ et $1 - i$,** sommets d'un carré inscrit dans le cercle de rayon $\sqrt{2}$.
- On regroupe les solutions conjuguées. Les complexes $1 \pm i$ ont pour somme 2 et pour produit 2 : ce sont les racines de $z^2 - 2z + 2$. De même, $-1 \pm i$ sont les racines de $z^2 + 2z + 2$. On vérifie alors le produit :
 $(z^2 + 2 - 2z)(z^2 + 2 + 2z) = (z^2 + 2)^2 - 4z^2 = z^4 + 4$. **Donc**
 $z^4 + 4 = (z^2 - 2z + 2)(z^2 + 2z + 2)$.
- Soit z une solution. En passant aux modules, $|z|^4 = |z|$, soit $|z|(|z|^3 - 1) = 0$. Donc $|z| = 0$ ou $|z| = 1$. D'abord, $z = 0$ est solution. Ensuite, si $|z| = 1$, alors $\bar{z} = \frac{1}{z}$ et

l'équation équivaut à $z^5 = 1$. Réciproquement, tout $z \in \mathbb{U}_5$ est de module 1 et vérifie $z^4 = z^{-1} = \bar{z}$. **L'ensemble des solutions est $\{0\} \cup \mathbb{U}_5$, soit six solutions : 0 et les $e^{2ik\pi/5}$, $0 \leq k \leq 4$.**

La figure ci-dessous représente les solutions des deux premières équations : un triangle équilatéral et un carré.



Corrigé de l'exercice 12 : Une équation de degré $n - 1$

- Pour $z = 1$, le membre de gauche vaut 2^n et celui de droite vaut 0. Donc 1 n'est pas solution. Pour $z \neq 1$, on peut diviser par $(z - 1)^n \neq 0$. Ainsi (E) équivaut à $z \neq 1$ et $\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^n = 1$.
- Pour $z \neq 1$, l'équation $\frac{z+1}{z-1} = u$ équivaut à $z+1 = uz - u$, soit $z(u-1) = u+1$. Si $u = 1$, elle devient $0 = 2$: c'est impossible. Si $u \neq 1$, on obtient $z = \frac{u+1}{u-1}$, qui est bien différent de 1. **L'unique solution est $z = \frac{u+1}{u-1}$ si $u \neq 1$, et il n'y en a aucune si $u = 1$.**
- D'après les questions 1 et 2, les solutions de (E) sont les $\frac{u+1}{u-1}$, avec $u \in \mathbb{U}_n \setminus \{1\}$. On

écrit $u = e^{i\theta}$ avec $\theta = \frac{2k\pi}{n}$ et $1 \leq k \leq n-1$. Par l'angle moitié,
 $u + 1 = 2\cos(\theta/2)e^{i\theta/2}$ et $u - 1 = 2i\sin(\theta/2)e^{i\theta/2}$. Comme $\frac{\theta}{2} = \frac{k\pi}{n} \in]0, \pi[$, le sinus ne s'annule pas. Donc

$$z_k = \frac{\cos(k\pi/n)}{i\sin(k\pi/n)} = -i \frac{\cos(k\pi/n)}{\sin(k\pi/n)}.$$

Enfin, la fonction $x \rightarrow \frac{\cos x}{\sin x}$ a pour dérivée $-\frac{1}{\sin^2 x} < 0$ sur $]0, \pi[$. Elle y est donc strictement décroissante, donc injective. **Les $n-1$ solutions z_k sont deux à deux distinctes.**

4. Si z est solution, alors $|z+1|^n = |z-1|^n$. Comme ces modules sont des réels positifs, $|z+1| = |z-1|$. Autrement dit, le point d'affixe z est à égale distance des points d'affixes -1 et 1 . Il appartient donc à leur médiatrice. **Cette médiatrice est l'axe imaginaire : toute solution est imaginaire pure.**

Corrigé de l'exercice 13 : Exponentielle complexe

- On met chaque second membre sous forme trigonométrique, puis on applique le cours. D'abord, $1 + i\sqrt{3} = 2e^{i\pi/3}$. Ensuite, $-3 = 3e^{i\pi}$. Enfin, $-2i = 2e^{-i\pi/2}$. **Les solutions sont respectivement $\ln 2 + i(\frac{\pi}{3} + 2k\pi)$, $\ln 3 + i(\pi + 2k\pi)$ et $\ln 2 + i(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi)$, avec $k \in \mathbb{Z}$.**
- On pose $Z = e^z$. L'équation devient $Z^2 - (1+i)Z + i = 0$. Or 1 et i ont pour somme $1+i$ et pour produit i : ce sont les deux racines. Ainsi, $e^z = 1$ ou $e^z = i = e^{i\pi/2}$. La première donne $z = 2ik\pi$; la seconde donne $z = i(\frac{\pi}{2} + 2k\pi)$. **Les solutions sont les $2ik\pi$ et les $i(\frac{\pi}{2} + 2k\pi)$, avec $k \in \mathbb{Z}$.**
- Écrivons $z = x + iy$. Alors $e^z = e^x \cos y + ie^x \sin y$. Comme $e^x > 0$, e^z est réel si et seulement si $\sin y = 0$, c'est-à-dire $y \in \pi\mathbb{Z}$. De plus, e^z est alors du signe de $\cos y$. **Ainsi $e^z \in \mathbb{R}$ si et seulement si $\text{Im}(z) \in \pi\mathbb{Z}$, et $e^z < 0$ si et seulement si $\text{Im}(z) \in \pi + 2\pi\mathbb{Z}$.**
- Pour tout z , $|e^z| = e^{\text{Re}(z)} > 0$. **Par conséquent, e^z ne s'annule jamais.**

Corrigé de l'exercice 14 : Triangle rectangle, alignement et triangles équilatéraux

1. On calcule $c - a = -1 + 3i$ et $b - a = 3 + i$. Ensuite,

$$\frac{c - a}{b - a} = \frac{(-1 + 3i)(3 - i)}{10} = \frac{-3 + i + 9i + 3}{10} = i.$$

Ce quotient a pour module 1 et pour argument $\frac{\pi}{2}$. Donc $AC = AB$ et $(\vec{AB}, \vec{AC}) \equiv \frac{\pi}{2}$.

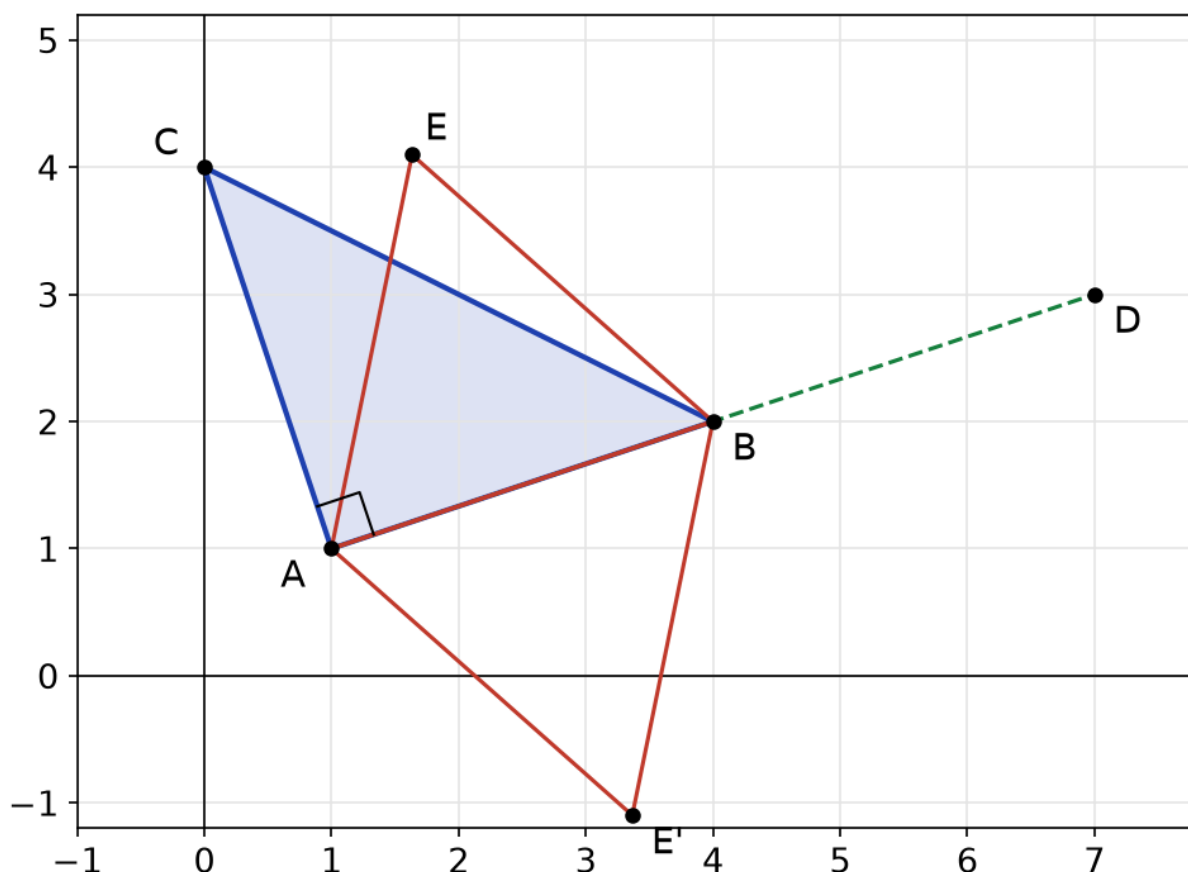
Le triangle ABC est rectangle isocèle en A .

2. On a $d - a = 6 + 2i = 2(3 + i)$. Donc $\frac{d - a}{b - a} = 2$, qui est réel. **Les points A , B , D sont alignés** ; plus précisément, $\vec{AD} = 2\vec{AB}$, donc B est le milieu de $[AD]$.

3. Le triangle ABE est équilatéral si et seulement si $e - a = e^{\pm i\pi/3}(b - a)$. Avec le signe $+$, $\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(3 + i) = \frac{3 - \sqrt{3}}{2} + i\frac{1 + 3\sqrt{3}}{2}$. Avec le signe $-$, on trouve de même $\frac{3 + \sqrt{3}}{2} + i\frac{1 - 3\sqrt{3}}{2}$. Il reste à ajouter $a = 1 + i$. **On obtient $e = \frac{5 - \sqrt{3}}{2} + i\frac{3 + 3\sqrt{3}}{2}$ et $e' = \frac{5 + \sqrt{3}}{2} + i\frac{3 - 3\sqrt{3}}{2}$.**

4. Le triangle est rectangle en A , avec $AB = AC = |3 + i| = \sqrt{10}$. Son aire vaut donc $\frac{AB \times AC}{2} = \frac{10}{2}$. **L'aire du triangle ABC vaut 5.**

Comme le montre la figure ci-dessous, les deux triangles équilatéraux sont symétriques par rapport à la droite (AB) , qui passe aussi par D .



Corrigé de l'exercice 15 : Lieux géométriques

1. On multiplie par le conjugué du dénominateur :

$$Z = \frac{(x + i(y - 1))((x + 1) - iy)}{(x + 1)^2 + y^2}.$$

Le numérateur vaut $x(x + 1) + y(y - 1) + i[(y - 1)(x + 1) - xy]$. De plus,

$$(y - 1)(x + 1) - xy = y - x - 1. \text{ Donc } \operatorname{Re}(Z) = \frac{x^2 + x + y^2 - y}{(x + 1)^2 + y^2} \text{ et}$$

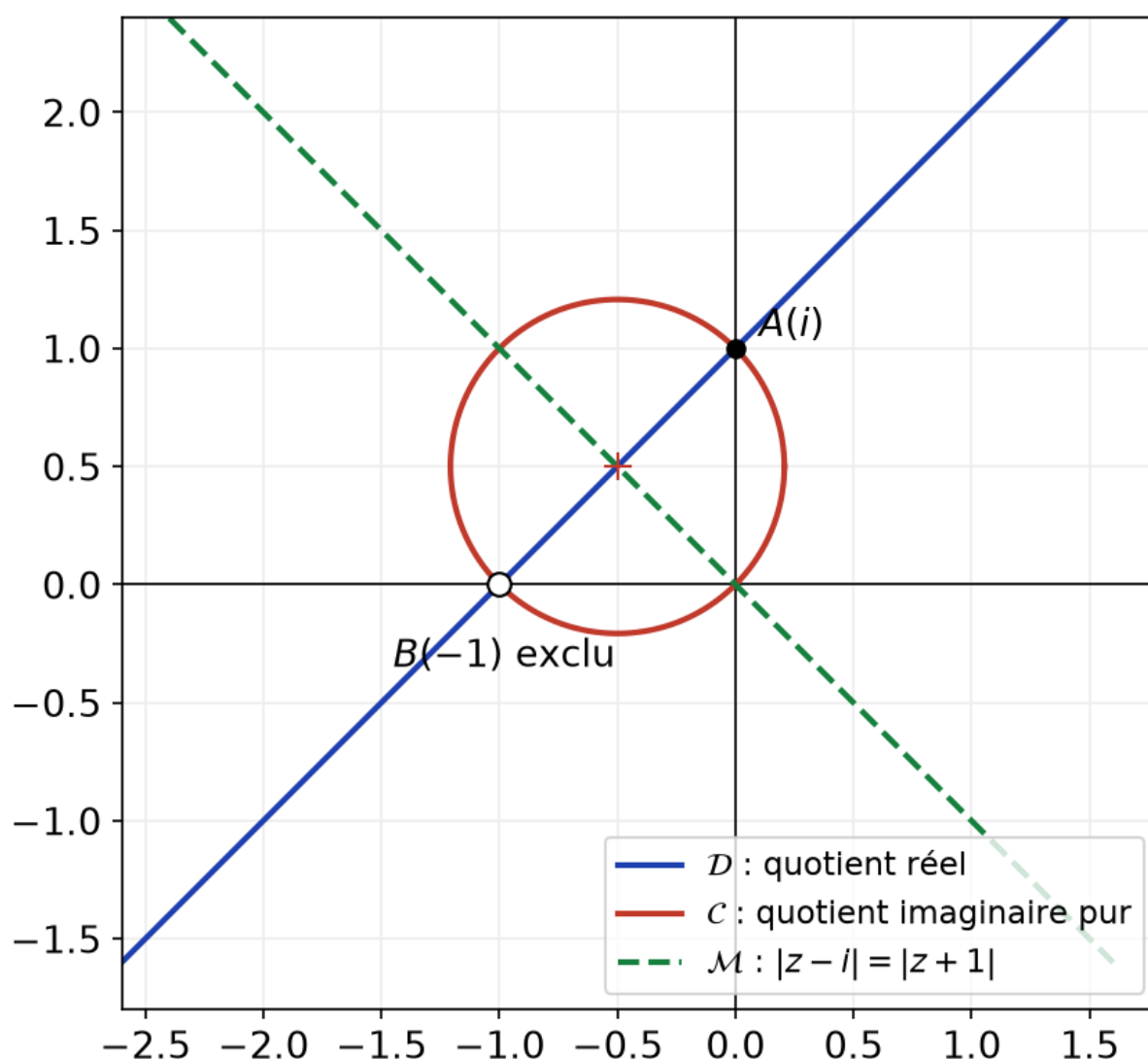
$$\operatorname{Im}(Z) = \frac{y - x - 1}{(x + 1)^2 + y^2}.$$

2. Z est réel si et seulement si $y = x + 1$, avec $M \neq B$. Cette droite passe par $A(0, 1)$ et par $B(-1, 0)$. Ainsi $\mathcal{D}$ est la droite (AB) privée du point B .
3. Z est imaginaire pur si et seulement si $x^2 + x + y^2 - y = 0$. Par mise sous forme

canonique, cela s'écrit $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$. Le centre $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ est le milieu de $[AB]$, et le rayon $\frac{\sqrt{2}}{2}$ vaut $\frac{AB}{2}$. **Donc $\mathcal{C}$ est le cercle de diamètre $[AB]$, privé du point B .**

4. On a $|Z| = 1$ si et seulement si $|z - i| = |z + 1|$, c'est-à-dire $MA = MB$. En coordonnées, $x^2 + (y - 1)^2 = (x + 1)^2 + y^2$ équivaut à $-2y = 2x$. **Ainsi $\mathcal{M}$ est la droite d'équation $y = -x$, médiatrice de $[AB]$.**
5. Pour $M \neq A$ et $M \neq B$, Z est le quotient des affixes de $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{BM}$. D'abord, Z est réel si et seulement si ces vecteurs sont colinéaires, donc si $M \in (AB)$. Ensuite, Z est imaginaire pur si et seulement si $(AM) \perp (BM)$, donc si M est sur le cercle de diamètre $[AB]$. Enfin, $|Z| = \frac{AM}{BM}$. **On retrouve les trois ensembles ; le point A , où $Z = 0$, appartient à la fois à $\mathcal{D}$ et à $\mathcal{C}$.**

La figure ci-dessous représente les trois ensembles. On remarque que le cercle $\mathcal{C}$ passe aussi par l'origine : en effet, pour $z = 0$, on trouve $Z = -i$.



Corrigé de l'exercice 16 : Similitudes directes

1. Pour g , on a $a = i$, de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$. Son point fixe vérifie $\omega = i\omega + 1 + i$, donc $\omega = \frac{1+i}{1-i} = \frac{(1+i)^2}{2} = i$. Pour h , le coefficient -2 est réel, et le point fixe vérifie $\omega = -2\omega + 3$, soit $\omega = 1$. **Ainsi g est la rotation de centre i et d'angle $\frac{\pi}{2}$, et h est l'homothétie de centre 1 et de rapport -2 .**
2. Comme $1+i \neq 1$, f n'est pas une translation. Son point fixe vérifie $\omega = (1+i)\omega + 2-i$, soit $-i\omega = 2-i$. En multipliant par i , on obtient $\omega = i(2-i) = 1+2i$. Par ailleurs, $1+i = \sqrt{2} e^{i\pi/4}$. **Donc f a pour affixe $1+2i$, et f est la similitude de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{4}$.**

3. On calcule $f(0) = 2 - i$ et $f(1) = 3$. Ensuite, $f(1 + i) = (1 + i)^2 + 2 - i = 2 + i$ et $f(i) = i - 1 + 2 - i = 1$. Une similitude multiplie les longueurs par $\sqrt{2}$ et conserve les angles orientés. **L'image de $OIKJ$ est donc le carré de sommets $2 - i$, 3 , $2 + i$ et 1 , de côté $\sqrt{2}$.**

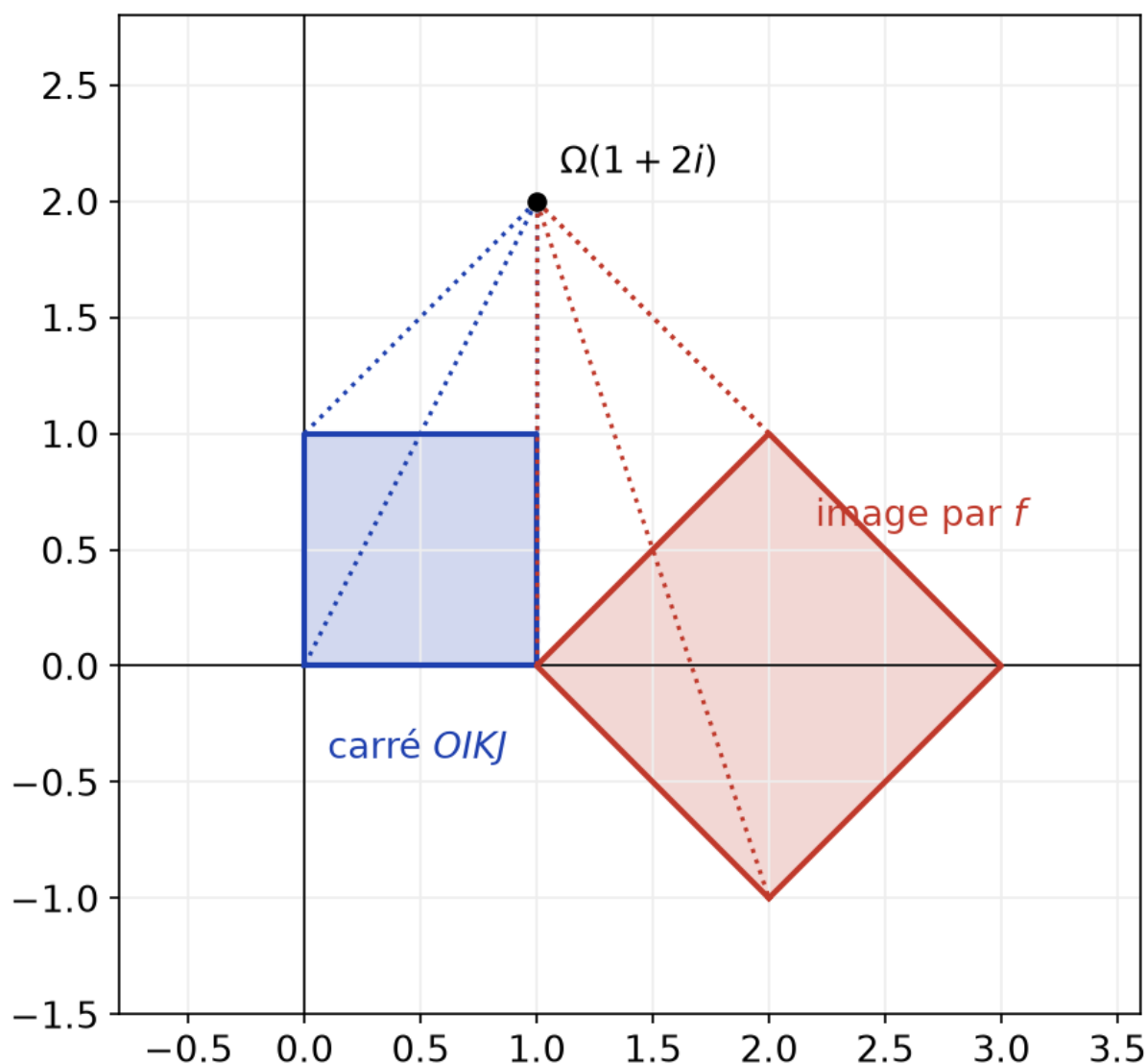
4. On compose : $g(f(z)) = i((1 + i)z + 2 - i) + 1 + i = (-1 + i)z + 2 + 3i$. Or $-1 + i = \sqrt{2} e^{3i\pi/4}$. Le centre vérifie $\omega = (-1 + i)\omega + 2 + 3i$, donc

$$\omega = \frac{2 + 3i}{2 - i} = \frac{(2 + 3i)(2 + i)}{5} = \frac{1 + 8i}{5}.$$

Ainsi $g \circ f$ est la similitude de centre $\frac{1 + 8i}{5}$, de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $\frac{3\pi}{4}$.

5. On cherche $s(z) = az + b$. La condition $s(0) = 1$ donne $b = 1$. Ensuite, $s(1) = a + 1 = 1 + i$ donne $a = i$. Son centre vérifie $\omega = i\omega + 1$, soit $\omega = \frac{1}{1 - i} = \frac{1 + i}{2}$. **Donc $s(z) = iz + 1$: c'est la rotation de centre $\frac{1 + i}{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$.**

La figure ci-dessous montre le carré $OIKJ$ et son image par f . On y voit que chaque sommet est tourné de $\frac{\pi}{4}$ autour de O , puis éloigné de ce centre d'un facteur $\sqrt{2}$.



Corrigé de l'exercice 17 : Une somme de racines septièmes de l'unité

1. Comme $|\omega| = 1$ et $\omega^7 = 1$, on a $\overline{\omega^p} = \omega^{-p} = \omega^{7-p}$. Donc $\overline{\omega} = \omega^6$, $\overline{\omega^2} = \omega^5$ et $\overline{\omega^4} = \omega^3$. **Par conséquent**, $\overline{S} = \omega^6 + \omega^5 + \omega^3 = T$.

2. D'abord, $S + T = \omega + \omega^2 + \dots + \omega^6 = -1$, car la somme des racines septièmes de l'unité est nulle. Ensuite, on développe le produit en neuf termes :

$$ST = \omega^4 + \omega^6 + \omega^7 + \omega^5 + \omega^7 + \omega^8 + \omega^7 + \omega^9 + \omega^{10}.$$

On réduit les exposants modulo 7 : $ST = 3 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 + \omega^5 + \omega^6 = 3 - 1$

. **Donc** $S + T = -1$ et $ST = 2$.

3. On a $\operatorname{Im}(S) = \sin\frac{2\pi}{7} + \sin\frac{4\pi}{7} + \sin\frac{8\pi}{7}$. Or $\sin\frac{8\pi}{7} = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{7}\right) = -\sin\frac{\pi}{7}$, ce qui donne l'expression demandée. De plus, $\sin\frac{4\pi}{7} = \sin\frac{3\pi}{7}$. Comme $0 < \frac{\pi}{7} < \frac{3\pi}{7} < \frac{\pi}{2}$ et que le sinus est strictement croissant sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, on a $\sin\frac{3\pi}{7} > \sin\frac{\pi}{7}$. Enfin, $\sin\frac{2\pi}{7} > 0$. **Donc** $\operatorname{Im}(S) > 0$.
4. D'après la question 2, S et T sont les racines de $X^2 + X + 2$. Son discriminant vaut $1 - 8 = -7 = (i\sqrt{7})^2$. Les racines sont donc $\frac{-1 \pm i\sqrt{7}}{2}$. Comme $\operatorname{Im}(S) > 0$, **on obtient** $S = \frac{-1 + i\sqrt{7}}{2}$.
5. On identifie les parties réelle et imaginaire de S . **Ainsi** $\cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{4\pi}{7} + \cos\frac{8\pi}{7} = -\frac{1}{2}$ et $\sin\frac{2\pi}{7} + \sin\frac{4\pi}{7} - \sin\frac{\pi}{7} = \frac{\sqrt{7}}{2}$.

Point de méthode : connaître la somme et le produit de deux nombres les détermine à l'ordre près. Un argument de signe permet ensuite de savoir lequel est lequel.

Corrigé de l'exercice 18 : Problème, produit de sinus et polygone régulier

1. Pour $n = 3$, on a $\omega_1 = j$ et $\omega_2 = j^2$. Donc $(z - j)(z - j^2) = z^2 - (j + j^2)z + j^3$. Or $1 + j + j^2 = 0$ et $j^3 = 1$. **On retrouve bien** $(z - j)(z - j^2) = z^2 + z + 1$.
2. L'égalité admise est valable pour tout complexe z , en particulier pour $z = 1$. Le membre de gauche vaut alors $1 + 1 + \dots + 1$, avec n termes. **Donc** $\prod_{k=1}^{n-1} (1 - \omega_k) = n$.
3. Posons $\theta = \frac{2k\pi}{n}$. Par l'angle moitié, $1 - \omega_k = 1 - e^{i\theta} = -2i\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)e^{ik\pi/n}$. Comme $|-2i| = 2$ et $|e^{ik\pi/n}| = 1$, on obtient $|1 - \omega_k| = 2\left|\sin\frac{k\pi}{n}\right|$. Or $\frac{k\pi}{n} \in]0, \pi[$ lorsque $1 \leq k \leq n-1$, donc ce sinus est strictement positif. **Ainsi** $|1 - \omega_k| = 2\sin\frac{k\pi}{n}$.
4. On prend le module de l'égalité de la question 2. Le module d'un produit est le produit des modules :

$$n = \prod_{k=1}^{n-1} |1 - \omega_k| = 2^{n-1} \prod_{k=1}^{n-1} \sin \frac{k\pi}{n}. \text{ Par conséquent, } \prod_{k=1}^{n-1} \sin \frac{k\pi}{n} = \frac{n}{2^{n-1}}.$$

5. Le nombre $|1 - \omega_k|$ est la distance du sommet d'affixe 1 au sommet d'affixe ω_k . **Le produit des distances d'un sommet du polygone régulier aux $n - 1$ autres sommets vaut n** ; pour l'heptagone de la figure, le produit des six longueurs vaut 7.
6. Pour $n = 6$, on a $\sin \frac{\pi}{6} = \sin \frac{5\pi}{6} = \frac{1}{2}$, $\sin \frac{\pi}{3} = \sin \frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin \frac{\pi}{2} = 1$. Le produit vaut donc $\frac{1}{4} \times \frac{3}{4} \times 1 = \frac{3}{16}$. D'autre part, $\frac{6}{2^5} = \frac{6}{32} = \frac{3}{16}$. **La formule est vérifiée pour $n = 6$.**

Corrigé de l'exercice 19 : Coefficients binomiaux de trois en trois

1. Si p est multiple de 3, alors $j^p = 1$ et la somme vaut 3. Sinon, $j^p \neq 1$, car $e^{2ip\pi/3} = 1$ exige $\frac{2p\pi}{3} \in 2\pi\mathbb{Z}$. C'est donc une somme géométrique de raison $j^p \neq 1$: elle vaut $\frac{1 - j^{3p}}{1 - j^p} = 0$, car $j^{3p} = 1$. **Ainsi $1 + j^p + j^{2p} = 3$ si 3 divise p , et 0 sinon.**
2. Par la formule du binôme, $(1 + 1)^n + (1 + j)^n + (1 + j^2)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (1 + j^k + j^{2k})$. D'après la question 1, seuls restent les termes où k est multiple de 3, chacun multiplié par 3. **Donc $3A_n = 2^n + (1 + j)^n + (1 + j^2)^n$.**
3. On a $1 + j = 1 - \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$. De plus, $1 + j^2 = 1 + \bar{j} = \overline{1 + j}$. **Ainsi $1 + j = e^{i\pi/3}$ et $1 + j^2 = e^{-i\pi/3}$.**
4. D'après la formule de Moivre, $(1 + j)^n + (1 + j^2)^n = e^{in\pi/3} + e^{-in\pi/3} = 2\cos \frac{n\pi}{3}$, par la formule d'Euler. **Donc $A_n = \frac{1}{3} \left(2^n + 2\cos \frac{n\pi}{3} \right)$.**
5. Pour $n = 4$, la somme directe vaut $\binom{4}{0} + \binom{4}{3} = 1 + 4 = 5$, et la formule donne $\frac{1}{3} \left(16 + 2\cos \frac{4\pi}{3} \right) = \frac{16 - 1}{3} = 5$. Pour $n = 6$, la somme directe vaut $1 + 20 + 1 = 22$, et la formule donne $\frac{64 + 2}{3} = 22$. **La formule est vérifiée dans les deux cas.**

Point de méthode : pour isoler les termes d'indice multiple de 3, on somme sur les racines cubiques de l'unité. Cette technique de filtrage se généralise à $\mathbb{U}_m$ pour tout entier m .

[Revenir aux énoncés des exercices](#)

Pour aller plus loin en maths sup

- Le cours : [nombres complexes, cours de maths sup](#)
- Les énoncés : [exercices de maths sup sur nombres complexes](#)
- À maîtriser avant : [Calculs algébriques : sommes, produits, inégalités](#), [Trigonométrie et fonctions circulaires](#)
- Chapitre précédent : [Trigonométrie et fonctions circulaires](#)
- Chapitre suivant : [Fonctions usuelles et techniques de dérivation](#)
- Le même thème en L1 : [nombres complexes, exercices de maths en L1](#)
- Tester vos connaissances : [QCM de maths sup par chapitre](#)
- Le sommaire : [tous les chapitres de maths sup](#) et les [chapitres de maths spé](#)