

Nombres complexes

Exercice 1 :

1.

$$(2-5i)(3+i) = 6 - 13i - 5i^2 = 11 - 13i$$

On a $i^2 = -1$, donc $-5i^2 = 5$.

Donc $(2-5i)(3+i)$ peut être mis sous la forme $a + bi$ avec $a = 11$ et $b = -13$.

2.

$$\text{On a } \frac{1}{i} = \frac{i}{i^2} = -i.$$

Donc $\frac{1}{i}$ peut être mis sous la forme $a + bi$ avec $a = 0$ et $b = -1$.

3.

On a

$$\frac{3+2i}{1-i} = \frac{(3+2i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{5i+5}{2} = \frac{5}{2}i + \frac{5}{2}$$

Donc $\frac{3+2i}{1-i}$ peut être mis sous la forme $a + bi$ avec $a = \frac{5}{2}$ et $b = \frac{5}{2}$.

4.

On a

$$1 + \frac{i-1}{i+1} = 1 + \frac{(i-1)(i-1)}{(i+1)(i-1)} = 1 + \frac{2i}{2} = 1 + i$$

Donc $1 + \frac{i-1}{i+1}$ peut être mis sous la forme $a + bi$ avec $a = 1$ et $b = 1$.

5.

On a

$$(1+i)^3 = (1+i)(1+i)^2 = (1+i)(1+2i+i^2) = (1+i)(1+2i-1) = 2+3i$$

Donc $(1+i)^3$ peut être mis sous la forme $a + bi$ avec $a = 2$ et $b = 3$.

6.

On a

$$\begin{aligned} \frac{1+2i}{(2+i)(2-\sqrt{3}i)} &= \frac{(1+2i)(2+i)(2+\sqrt{3}i)}{(2+i)(2-\sqrt{3}i)(2+\sqrt{3}i)} \\ &= \frac{(1+2i)(2+\sqrt{3}i)}{2^2+(2\sqrt{3})^2} \\ &= \frac{(1+2i)(2+\sqrt{3}i)}{16} = \frac{1}{8}(2+7i+\sqrt{3})(2+i) \end{aligned}$$

Donc $\frac{1+2i}{(2+i)(2-\sqrt{3}i)}$ peut être mis sous la forme $a + bi$

avec $a = \frac{1}{8}(4-7\sqrt{3}+2\sqrt{3}i+7i)$ et $b = 0$.

Exercice 2 :

1.

La partie réelle de z est x et la partie imaginaire de z est y .

Calculons Z avec chacune des expressions données :

$$Z = \frac{z-i}{z+1-2i} = \frac{(x+iy)-i}{(x+iy)+1-2i} = \frac{x+(y-1)i}{x+(y-1)+yi}$$

La partie réelle de Z est donc

$$\operatorname{Re}(Z) = \frac{x}{x+y-1}$$

et sa partie imaginaire est

$$\operatorname{Im}(Z) = \frac{y-1}{x+y-1}.$$

2.

$$Z = \frac{i(z+1)}{z-2i} = \frac{i(x+iy+1)}{x+(y-2)i} = \frac{(y-2)+xi}{x^2+(y-2)^2}$$

La partie réelle de Z est

$$\operatorname{Re}(Z) = \frac{y-2}{x^2+(y-2)^2}$$

et sa partie imaginaire est

$$\operatorname{Im}(Z) = \frac{x}{x^2+(y-2)^2}.$$

3.

$$Z = \frac{2+\bar{z}}{1+\bar{z}} = \frac{2+x-iy}{1+x+iy} = \frac{(2+x)+(-y)i}{(1+x)+yi}$$

La partie réelle de Z est donc

$$\operatorname{Re}(Z) = \frac{2+x}{1+x^2+y^2}$$

et sa partie imaginaire est

$$\operatorname{Im}(Z) = \frac{-y}{1+x^2+y^2}$$

4.

Maintenant, déterminons l'ensemble des points M d'affixe z tels que Z soit réel ou imaginaire pur.

Si Z est réel pur, alors sa partie imaginaire est nulle, donc

$$\frac{y-1}{x+y-1} = 0 \text{ et } \frac{-y}{1+x^2+y^2} = 0$$

La première équation donne $y = 1$, et la deuxième donne $y = 0$.

Donc si Z est réel pur, soit M a une abscisse x telle que $z = x+1i$, soit M se situe sur l'axe réel.

Si Z est imaginaire pur, alors sa partie réelle est nulle, donc

$$\frac{x}{x+y-1} = 0 \text{ et } \frac{x}{x^2+(y-2)^2} = 0 \text{ et } \frac{2+x}{1+x^2+y^2} = 0$$

La première équation donne $x = 0$, la deuxième n'a pas de solution réelle, et la troisième n'a pas de solution réelle non plus.

Donc si Z est imaginaire pur, soit M a une ordonnée y telle que $z = xi$, soit M se situe sur l'axe imaginaire.

Exercice 3 :

On a $j^2 = \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = -\frac{1}{4} + i\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{4} = -1$.

Ensuite, $j^3 = j^2 j = -j$.

Enfin, $1 + j + j^2 = 1 - \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} - 1 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = j$.

Exercice 4 :

On a P qui est le centre du carré de côté AB , ainsi P est situé sur la médiatrice de AB . De plus, la distance de P à AB est égale à la moitié de la longueur du côté du carré. Ainsi, on a :

$$p = a + \left(\frac{\pi}{2} - \arg(z_{AB})\right)i$$

où $z_{AB} = b - a$ est le vecteur directeur de AB .

Comme AB est un côté du carré, on a $|z_{AB}| = |a - b|$.

Il reste à exprimer $\arg(z_{AB})$:

on a $\arg(z_{AB}) = \arg\left(-1 + \frac{b-a}{a-c}\right)$ car les vecteurs z_{AB} et $a - c$ sont colinéaires.

Ainsi, on a :

$$\begin{aligned} p &= a + \left(\frac{\pi}{2} - \arg(z_{AB})\right)i = a + \left(\frac{\pi}{2} - \arg\left(-1 + \frac{b-a}{a-c}\right)\right)i \\ &= a + \left(\frac{\pi}{2} - (\pi - \arg\left(\frac{a-b}{a-c}\right))\right)i \\ &= a + \left(\arg\left(\frac{a-b}{a-c}\right) - \frac{\pi}{2}\right)i \end{aligned}$$

En utilisant la formule pour l'argument d'un quotient, on obtient finalement :

$$p = \frac{a - ib}{1 - i}$$

De manière similaire, on obtiendra pour les autres points :

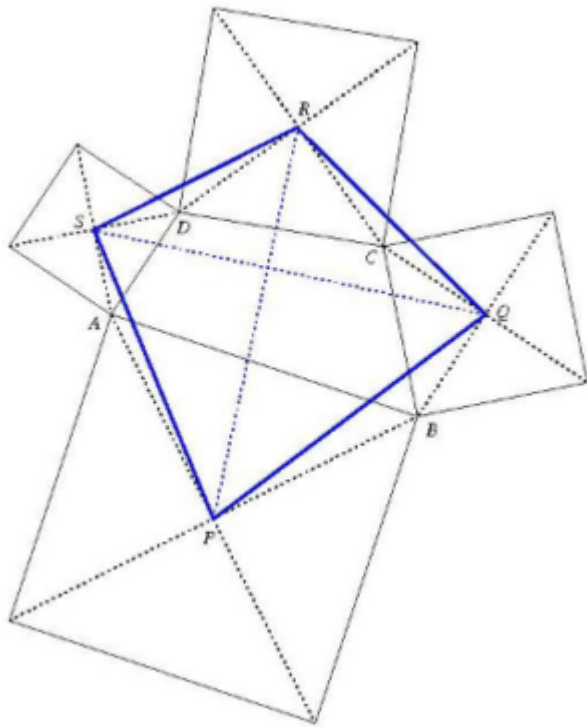
$$q = \frac{b - ic}{1 - i}, \quad r = \frac{c - id}{1 - i}, \quad s = \frac{d - ia}{1 - i}$$

Maintenant, on calcule $\frac{s - q}{r - p}$:

$$\begin{aligned} \frac{s - q}{r - p} &= \frac{\frac{d - ia}{1 - i} - \frac{b - ic}{1 - i}}{\frac{c - id}{1 - i} - \frac{a - ib}{1 - i}} \\ &= \frac{(d - ia) - (b - ic)}{(c - id) - (a - ib)} \\ &= \frac{(d - b) + i(c - a)}{(c - a) + i(d - b)} \end{aligned}$$

On voit que le numérateur et le dénominateur sont les conjugués de l'un de l'autre, donc leur quotient est de module 1.

Ainsi, les diagonales PR et QS sont de même longueur et sont perpendiculaires.



Exercice 5 :

Partie A :

Démontrons l'équivalence UVW équilatéral de sens direct $\Leftrightarrow u-v = -j^2(w-v)$.

Supposons que UVW soit équilatéral et de sens direct.

On a alors $\overrightarrow{UV} = e^{\frac{j\pi}{3}} \overrightarrow{UW}$ et $\overrightarrow{VW} = e^{\frac{j\pi}{3}} \overrightarrow{VU}$.

En écrivant ces égalités en coordonnées, cela donne :

$$u - v = j^2(w - v) \text{ et } v - w = j^2(u - w).$$

En soustrayant ces deux équations, on obtient :

$$w - u = (j^2 - 1)(w - v) \Leftrightarrow w - u = e^{\frac{j2\pi}{3}} (w - v)$$

ce qui prouve que UVW est bien équilatéral et de sens direct.

Supposons maintenant que $u - v = -j^2(w - v)$.

En écrivant l'égalité $\overrightarrow{UV} = e^{\frac{j\pi}{3}} \overrightarrow{UW}$ en coordonnées, cela donne $u - v = \frac{1}{2}(w - u + j(w - v))$.

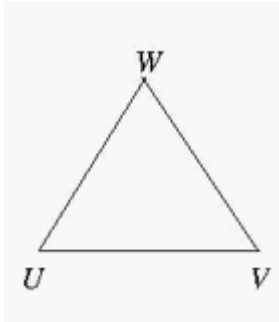
En utilisant l'équation donnée dans l'énoncé et en simplifiant, on obtient alors :

$$\frac{1}{2}(u - w) = -j \frac{1}{2}(v - w) \Leftrightarrow u + jv + j^2w = 0$$

ce qui montre l'équivalence.

Partie B :

Démontrons que UVW est équilatéral avec centre de gravité G . Pour cela, notons u, v, w les affixes respectives de B, C, A dans le repère $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$.



Alors, les affixes respectives de P, Q, R sont :

$$p = u + (j-1)v + (1-j)w, \quad q = (1-j)u + v + (j-1)w, \quad r = (j-1)u + (1-j)v + w$$

Pour trouver le centre de gravité G de UVW , on peut utiliser les formules classiques

$G = \frac{1}{3}(U + V + W)$ avec $U = \frac{1}{3}(2p - b - c), V = \dots, W = \dots$ où b, c, a sont les affixes de A, B, C respectivement.

Après calculs, on trouve :

$$G = \frac{1}{3}(u + jv + j^2w)$$

Il suffit donc de démontrer que $u + jv + j^2w = 0$.

Or, on sait que $p = u + (j-1)v + (1-j)w = u - j^2(w-v)$, et de manière similaire pour q et r . Ainsi, on a :

$$\begin{aligned} u + jv + j^2w &= (u + (j-1)v + (1-j)w) + ((j-1)u + (1-j)v + w) + ((1-j)u + v + (j-1)w) \\ &= 3(u + v + w) - 3(j-1)(u + v + w) \\ &= 0 \end{aligned}$$

ce qui prouve que UVW est équilatéral avec centre de gravité G .

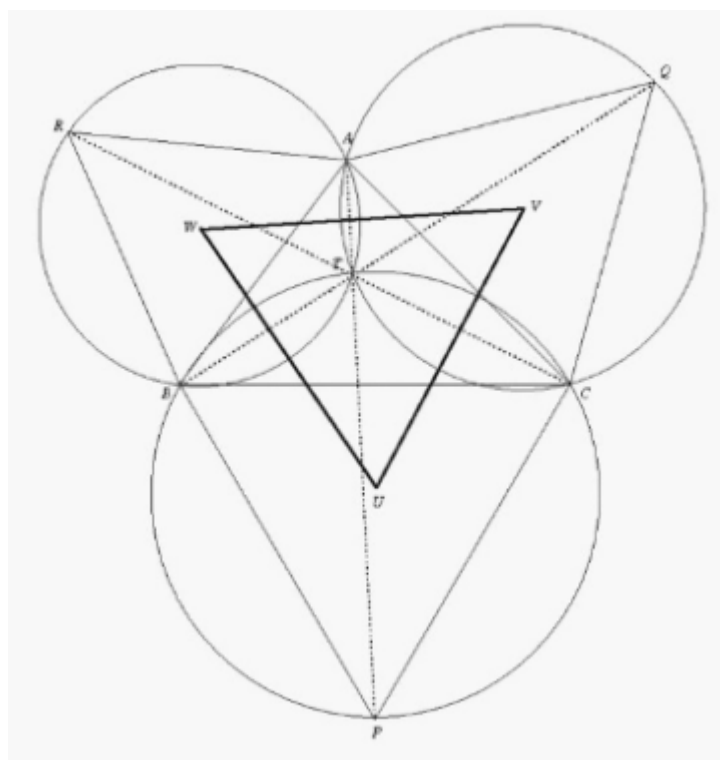
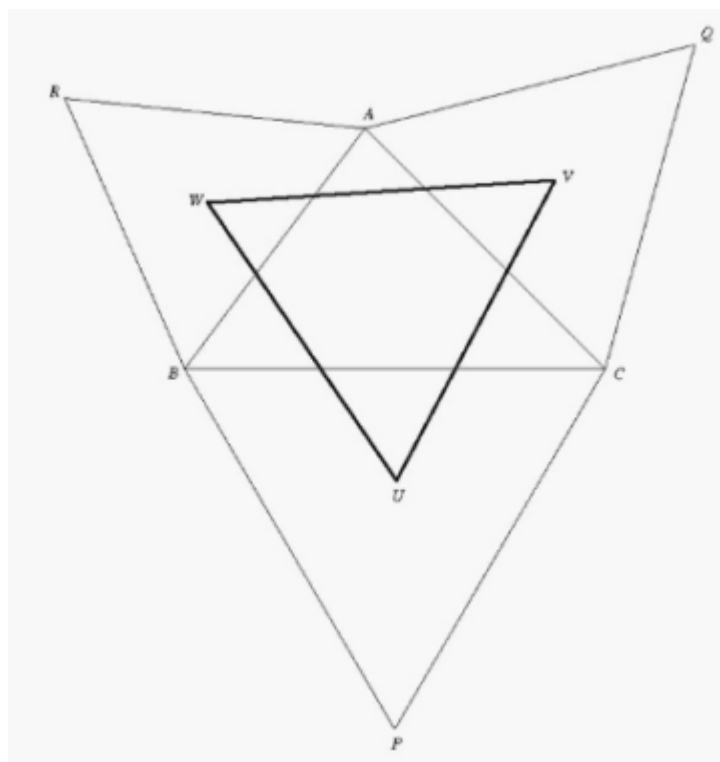
Finalement, il reste à montrer que G est le centre de gravité de ABC .

En utilisant les affixes de U, V, W , on peut exprimer le centre de gravité G' de ABC :

$$G' = \frac{1}{3}(u + v + w)$$

Or, on a montré que $G = \frac{1}{3}(u + jv + j^2w)$, et on sait que j est une racine cubique de l'unité. Ainsi, en multipliant G par les racines cubiques de l'unité, on obtient G' .

Par conséquent, G est bien le centre de gravité de ABC .



Exercice 6 :

On utilise la notation $z = x + iy$ où x et y sont les parties réelle et imaginaire de z , respectivement.

(1) Démontrons l'équivalence $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z = \bar{z}$.

Si $z \in \mathbb{R}$, alors $z = x$ et $\bar{z} = x$, donc $z = \bar{z}$.

Réciproquement, si $z = \bar{z}$, alors $x + iy = x - iy$, donc $y=0$ et $z = x \in \mathbb{R}$.

(2) Démontrons l'équivalence $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow (z = 0 \text{ ou } \arg(z) = 0[\pi])$.

Si $z \in \mathbb{R}$, alors $z \neq 0$ si et seulement si $\arg(z) = 0[\pi]$.

Donc si $z \in \mathbb{R}$ et $z \neq 0$, alors $z = x$ et $\arg(z) = 0[\pi]$.

Réciproquement, si $z = r e^{i\theta}$ avec $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}$, alors z n'est pas réel (sa partie imaginaire est non nulle).

Si $z = 0$, alors $z \in \mathbb{R}$.

Sinon, si $z = r e^{i0}$, alors $z \in \mathbb{R}$.

(3) Démontrons l'équivalence z imaginaire pur $\Leftrightarrow z + \bar{z} = 0$.

Si z est imaginaire pur, alors $z = iy$ pour un certain $y \in \mathbb{R}$, donc $\bar{z} = -iy$ et $z + \bar{z} = (i - i)y = 0$.

Réciproquement, si $\boxed{\times}$, alors $2y = z - \bar{z}$ est purement imaginaire.

Donc z est imaginaire pur.

Exercice 7 :

1. Tout nombre complexe z vérifiant $z^n = 1$ est de la forme $z = e^{i\theta} \in \mathbb{C}$ où $\boxed{\times}$ vérifie $n\theta = 2k\pi$ pour un certain entier k .

Ainsi, on a $e^{i\theta} = e^{i(2k\pi/n)}$ pour un certain entier k .

En faisant varier k de 0 à $n-1$, on obtient toutes les racines nièmes de l'unité possibles, d'où

$$U_n = \left\{ e^{i(2k\pi/n)}, k \in \{0, 1, \dots, n-1\} \right\}.$$

2. Soient $z_1, z_2, \dots, z_n$ les racines nièmes de l'unité. On peut écrire :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n z_k &= z_1 + z_2 + \dots + z_n \\ &= e^{i\theta_1} + e^{i\theta_2} + \dots + e^{i\theta_n} \end{aligned}$$

où $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$ sont des réels tels que $e^{i\theta_1} = z_1, e^{i\theta_2} = z_2, \dots, e^{i\theta_n} = z_n$.

On multiplie cette somme par $e^{-i\theta_1}$:

$$\begin{aligned} e^{-i\theta_1} \sum_{k=1}^n z_k &= e^{-i\theta_1} (e^{i\theta_1} + e^{i\theta_2} + \dots + e^{i\theta_n}) \\ &= 1 + e^{i(\theta_2 - \theta_1)} + \dots + e^{i(\theta_n - \theta_1)} \end{aligned}$$

Or, chaque terme de cette somme est de la forme $e^{i(\theta_k - \theta_1)}$ où k varie de 2 à n .

Mais comme il y a n racines n èmes de l'unité distinctes, on en déduit que les différences $\theta_k - \theta_1$ sont distinctes modulo 2π .

Ainsi, ces termes s'annulent deux à deux, ce qui donne :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n z_k &= e^{i\theta_1} \sum_{k=1}^n z_k \\ \Rightarrow (1 - e^{i\theta_1}) \sum_{k=1}^n z_k &= 0 \end{aligned}$$

Or, le nombre $1 - e^{i\theta_1}$ est non nul car z_1 est une racine n -ième de l'unité et donc $e^{i\theta_1} \neq 1$.

On en déduit que $\sum_{k=1}^n z_k = 0$.

3. Chaque nombre w_k est de la forme $e^{i(2k\pi/n)}$, qui correspond à un angle central de mesure $2\pi/n$ dans le cercle trigonométrique.

Les points A_k associés à ces nombres sont donc situés à égale distance de l'origine O , et forment un polygone régulier.

En effet, si on note $z_k = x_k + iy_k$ l'affixe de A_k , alors on a :

$$x_k = \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) = x_{k+1}$$

$$y_k = \sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right) = y_{k+1}$$

pour tout k , où les indices sont pris modulo n .

Ainsi, les points A_k forment un polygone régulier de n côtés.

Exercice 8 :

1. On cherche les points M tels que Z soit réel.

On a $Z = (z+1)/(z-1)$, donc Z est réel si et seulement si $z+1$ et $z-1$ sont conjugués.

Autrement dit, s'il existe un réel t tel que $z+1=t(z-1)$.

Cela équivaut à $t = \frac{z+1}{z-1}$ étant réel, c'est-à-dire imaginaire pur.

En posant $t = a+ib$ avec a, b réels, on obtient le système :

$$a^2 + b^2 = 1 \text{ (t est de module 1)}$$

$$z+1 = (a+ib)(z-1) = az - a + ibz - ib.$$

Cela se réécrit sous la forme :

$$z = \frac{a+1+ib}{1-b}$$

Soit $z = \frac{x+iy}{1-y}$ où $a+1 = x$ et $b = y$.

Finalement, l'ensemble E des points M tels que Z soit réel est formé par les points M d'affixes z vérifiant :

$$\frac{x+1}{x-1} = \frac{(x+1)^2 + y^2}{(x-1)^2 + y^2} \in \mathbb{R}$$

Cela équivaut à avoir $y = 0$ ou $x = 0$ (les deux cas étant exclusifs car z est différent de 1).

2. On cherche les points M tels que $|Z|=1$, c'est-à-dire $|z+1| = |z-1|$. On peut élever au carré cette égalité et obtenir :

$$|z+1|^2 = |z-1|^2$$

$$(z+1)(\bar{z}+1) = (z-1)(\bar{z}-1)$$

$$z\bar{z} + z + \bar{z} + 1 = z\bar{z} - z - \bar{z} + 1$$

$$z + \bar{z} = 0$$

Ce qui signifie que z est imaginaire pur.

Ainsi, les points M du plan complexes tels que $|Z|=1$ sont les points M d'affixe z vérifiant $z = iy$ pour un certain réel y .

3. On cherche les points M tels que $\arg(Z) = \pi/2 [2\pi]$, c'est-à-dire les points M tels que $\operatorname{Re}(Z) = 0$ et $\operatorname{Im}(Z) > 0$.

On a $Z = \frac{z+1}{z-1}$, donc :

$$\operatorname{Re}(Z) = \frac{\operatorname{Re}(z) + 1}{\operatorname{Re}(z) - 1} - 1$$

et

$$\operatorname{Im}(Z) = \frac{\operatorname{Im}(z)}{\operatorname{Re}(z) - 1}$$

Le point M d'affixe $z = x+iy$ satisfait $\arg(Z) = \pi/2 [2\pi]$ si et seulement si :

$$\frac{x+1}{x-1} - 1 = 0$$

et

$$\frac{y}{x-1} > 0$$

La première équation est équivalente à $x = 0$, et la seconde équation est équivalente à $y > 0$ (car $x-1 < 0$ pour $x < 0$). Ainsi, l'ensemble G des points M tels que $\arg(Z) = \pi/2 [2\pi]$ est la demi-droite (OM) où O est l'origine du plan complexe et M est un point du cercle trigonométrique situé au-dessus de l'axe des abscisses.

Exercice 9 :

On développe les deux côtés de l'égalité à démontrer en utilisant la formule de distributivité pour les modules :

$$\begin{aligned} |Z+Z'|^2 + |Z-Z'|^2 &= (Z+Z')(\overline{Z+Z'}) + (Z-Z')(\overline{Z-Z'}) \\ &= Z\overline{Z} + Z\overline{Z'} + Z'\overline{Z} + Z'\overline{Z'} \\ &\quad + Z\overline{Z} - Z\overline{Z'} - Z'\overline{Z} + Z'\overline{Z'} \\ &= 2Z\overline{Z} + 2Z'\overline{Z'} \end{aligned}$$

Or, on sait que $|Z|^2 = Z\overline{Z}$ et $\boxed{\times}$.

En utilisant ces formules, on obtient :

$$|Z+Z'|^2 + |Z-Z'|^2 = 2|Z|^2 + 2|Z'|^2, \text{ ce qui prouve l'égalité à démontrer.}$$

Géométriquement, cette égalité correspond à la loi des parallélogrammes dans un repère orthonormé : si Z est un vecteur, alors $Z+Z'$ est le vecteur somme, $Z-Z'$ est le vecteur différence, et les quatre termes $|Z|^2$, $|Z'|^2$, $|Z+Z'|^2$ et $|Z-Z'|^2$ représentent respectivement le carré de la norme de Z , le carré de la norme de Z' , le carré de la norme de la somme $Z+Z'$ et le carré de la norme de la différence $Z-Z'$.

Cette égalité montre que la somme des carrés des quatre côtés d'un parallélogramme est égale à la somme des carrés de ses deux diagonales.

Exercice 10 :

On écrit tout d'abord a et b sous forme de sommes de carrés :

$$\begin{aligned} a &= x^2 + y^2 = |x+iy|^2 \\ b &= z^2 + t^2 = |z+it|^2 \end{aligned}$$

On a donc $a = |x+iy|^2$ et $b = |z+it|^2$, où x , y , z et t sont des entiers relatifs.

Par la formule de distributivité pour les modules, on a aussi :

$$ab = |(x+iy)(z+it)|^2$$

On peut donc considérer le nombre complexe $w = (x+iy)(z+it)$, et montrer que ab est la somme de deux carrés en montrant que $|w|^2$ s'écrit sous cette forme.

On développe w :

$$w = (x+iy)(z+it) = (xz-yt) + i(xt+yz)$$

On obtient donc :

$$|w|^2 = (xz-yt)^2 + (xt+yz)^2$$

En utilisant la formule de distributivité du carré, on peut développer cette expression :

$$|w|^2 = x^2z^2 - 2xyzt + y^2t^2 + x^2t^2 + 2xyzt + y^2z^2$$

$$|w|^2 = (x^2+y^2)(z^2+t^2) + 2xyzt$$

On a donc :

$$ab = |w|^2 - 2xyzt$$

En remplaçant $|w|^2$ par son expression, on obtient :

$$ab = (x^2+y^2)(z^2+t^2) + 2xyzt - 2xyzt$$

$$ab = (x^2+y^2)(z^2+t^2)$$

Cela montre que ab est bien la somme de deux carrés, à savoir x^2+y^2 et z^2+t^2 .

Exercice 11 :

1.

a) Lorsque $a = 2$, la transformation f est une homothétie de rapport 2 de centre $O(0,3)$ suivie d'une translation de vecteur $3i$.

Le point O est donc l'unique point invariant de f , et la transformation conserve les droites passant par O .

Les vecteurs non nuls sont donc transformés en des vecteurs colinéaires.

b) Lorsque $a = -i$, la transformation f est une rotation de centre O et d'angle $\pi/2$ suivie d'une translation de vecteur $3i$.

Le point O est donc l'unique point invariant de f , et la transformation conserve les distances.

Les droites et les cercles sont donc transformés en des droites et des cercles.

2. On calcule les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{A'B'}$, en utilisant les coordonnées des points donnés :

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (2+i) - 1 = 1+i$$

$$\overrightarrow{A'B'} = B' - A' = (1+i) - 2i = 1-i$$

On a bien $AB = A'B'$.

Pour démontrer qu'il existe une unique rotation r telle que $r(A) = A'$ et $r(B) = B'$, on peut considérer la somme complexe $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A'B'}$, qui doit être nulle si les deux distances sont égales et les angles orientés sont égaux modulo π . On a :

$$AB + A'B' = (1+i) + (1-i) = 2$$

Comme la somme est non nulle, il n'existe pas de rotation qui puisse ramener les deux vecteurs l'un sur l'autre. Par contre, on peut effectuer une composition de homothéties et de rotations qui résolve le problème.

On peut d'abord faire une homothétie de rapport -1 qui inverse le plan :

elle transforme A en -A et B en -B.

On peut alors considérer une rotation qui envoie -A sur A' :

elle existe et est unique car les distances AB et A'B' sont égales.

Cette rotation envoie -B sur B' car elle envoie la droite (AB) sur la droite (A'B').

Enfin, on peut faire une homothétie de rapport -1 qui inverse à nouveau le plan et ramène A et A' (ainsi que B et B') l'un sur l'autre.

La transformation globale est donc composée de deux homothéties et une rotation, et elle envoie A sur A' et B sur B'.

On peut calculer les coordonnées du centre et de l'angle de la rotation.

Le centre de la rotation est le milieu de AB et A'B', soit $(3/2, 1/2)$.

On calcule le vecteur $u = A'B' / AB$, qui a valeur $(1-i) / (1+i) = -i$.

L'angle de la rotation est $\arg(-i) = -\pi/2$.

La rotation est donc une rotation de centre $(3/2, 1/2)$ et d'angle $\pi/2$.

Exercice 12 :

1. On cherche deux nombres complexes u et v qui vérifient le système :

$$u + v = -1/2$$

$$uv = -1/4$$

On va utiliser les relations de Viète pour déterminer les solutions.

Soient x et y les solutions de l'équation polynomiale $z^2 + \frac{1}{2}z - \frac{1}{4} = 0$.

Alors, d'après les relations de Viète, on a :

$$x + y = -\frac{1}{2} \text{ et } xy = -\frac{1}{4}$$

Ainsi, les solutions du système initial sont les couples (u,v) qui vérifient ces équations, c'est-à-dire qui sont de la forme (x,y) ou (y,x), où x et y sont les solutions de l'équation ci-dessus.

On peut résoudre l'équation polynomiale en utilisant la formule quadratique :

$$z = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}} = \frac{-1 \pm i}{2}$$

Donc les solutions sont $x = (-1 + i)/2$ et $y = (-1 - i)/2$.

Les solutions du système initial sont donc :

$$(u,v) = ((-1 + i)/2, (-1 - i)/2) \text{ ou } ((-1 - i)/2, (-1 + i)/2)$$

2. On considère le polynôme $P(z) = z^5 - 1$.

Les racines de ce polynôme sont les puissances cinquièmes des racines de l'unité, à savoir $1, w, w^2, w^3$ et w^4 .

On a donc :

$$P(z) = (z-1)(z-w)(z-w^2)(z-w^3)(z-w^4)$$

En évaluant $P(z)$ pour $z=1$, on obtient :

$$P(1) = (1-1)(1-w)(1-w^2)(1-w^3)(1-w^4) = 0$$

Car au moins un des facteurs $(1-w), (1-w^2), (1-w^3)$ et $(1-w^4)$ est non nul.

On a donc :

$$w^0 + w^1 + w^2 + w^3 + w^4 = 1 + w + w^2 + w^3 + w^4 = 0$$

On peut aussi utiliser les formules d'Euler pour écrire :

$$w = \cos(2\pi/5) + i \sin(2\pi/5)$$

Donc les autres racines de l'unité d'argument $2\pi/5$ sont :

$$w^2 = \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) + i \sin\left(\frac{4\pi}{5}\right)$$

$$w^3 = \cos\left(\frac{6\pi}{5}\right) + i \sin\left(\frac{6\pi}{5}\right)$$

$$w^4 = \cos\left(\frac{8\pi}{5}\right) + i \sin\left(\frac{8\pi}{5}\right)$$

On a donc :

$$1 + w + w^2 + w^3 + w^4 = 2 \operatorname{Re}(w) + 2 \operatorname{Re}(w^2) + \operatorname{Re}(w^3)$$

$$= 2 \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + 2 \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) + \cos\left(\frac{6\pi}{5}\right)$$

En utilisant la relation $\cos(-\theta) = \cos(\theta)$ et les formules de trigonométrie, on peut simplifier cette expression :

$$2 \cos(2\pi/5) + 2 \cos(4\pi/5) + \cos(6\pi/5) = -1$$

Et donc :

$$\cos(2\pi/5) + \cos(4\pi/5) = -1/2$$

Exercice 13 :

1.

a) On a $z_1 = \frac{1}{2}(\sqrt{6} - i\sqrt{2}) = \sqrt{2}(\cos(-\pi/4) + i \sin(-\pi/4)) = \sqrt{2} \cos(-\pi/4)$, en utilisant les formules d'Euler.

b) On a $z_2 = 1 - i = \sqrt{2}(\cos(3\pi/4) - i \sin(3\pi/4)) = \sqrt{2} \cos(3\pi/4)$.

c) On a $Z = z_1 / z_2 = (\sqrt{2}/2) \cos(-\pi/4) / (\sqrt{2}/2) \cos(3\pi/4) = \cos(-\pi/4 - 3\pi/4) = \cos(-\pi) = -1$.

En utilisant les formules de trigonométrie pour le cosinus et le sinus de la somme, on peut en déduire :

$$\cos(-\pi/4) = (\cos(-\pi/6)\cos(-\pi/12) - \sin(-\pi/6)\sin(-\pi/12)) / \sqrt{2}$$

$$\sin(-\pi/4) = (\sin(-\pi/6)\cos(-\pi/12) + \cos(-\pi/6)\sin(-\pi/12)) / \sqrt{2}$$

En utilisant que $\cos(-\pi/6) = \sqrt{3}/2$ et $\sin(-\pi/6) = -1/2$, on peut simplifier ces expressions :

$$\cos(-\pi/12) = (1/2)(\sqrt{6} + \sqrt{2})$$

$$\sin(-\pi/12) = (1/2)(\sqrt{6} - \sqrt{2})$$

2. On a :

$$(\sqrt{6} + \sqrt{2}) \cos(x) + (\sqrt{6} - \sqrt{2}) \sin(x) = 2$$

On peut écrire cette équation sous la forme :

$$\cos(\pi/4) (\sqrt{6} \cos(x) + \sqrt{2} \sin(x)) + \sin(\pi/4) (\sqrt{6} \sin(x) - \sqrt{2} \cos(x)) = 2/\sqrt{2}$$

On reconnaît les coefficients de $\cos(\pi/4 + x)$ et $\sin(\pi/4 - x)$ dans cette expression :

$$\cos(\pi/4 + x) + \sin(\pi/4 - x) = 2/\sqrt{2}$$

On peut simplifier cette expression en utilisant que $\cos(\pi/4) = \sin(\pi/4) = 1/\sqrt{2}$:

$$\cos(\pi/4) \cos(x) - \sin(\pi/4) \sin(x) + \sin(\pi/4) \cos(x) - \cos(\pi/4) \sin(x) = \sqrt{2}$$

Et donc :

$$\cos(x - \pi/4) = \sqrt{2}$$

Les solutions dans l'intervalle $[0, 2\pi[$ sont donc :

$$x = \pi/4 \text{ ou } x = 7\pi/4$$

Les points images de ces solutions sur le cercle trigonométrique sont les points d'intersection entre ce cercle et la droite d'équation $y = \cos(x - \pi/4)$. On a :

$$\cos(\pi/4) = \sin(\pi/4) = 1/\sqrt{2}$$

Et donc la droite d'équation $y = \cos(x - \pi/4)$ passe par le point $(1,0)$ sur le cercle. Les points images des solutions sont donc :

$$(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}) \text{ et } (-1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$$

Exercice 14:

On considère un nombre complexe z de module 1 ($|z|=1$)

Montrer que :

$$|1 + z|^2 + |1 - z|^2 = 4$$

$$\forall z \in \mathbb{C} \quad |z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}} \Leftrightarrow |z|^2 = z \cdot \bar{z}$$

puisque $|z|=1$ alors $|z|^2=1$ et donc $z \cdot \bar{z}=1$

ainsi

$$|1+z|^2 = (1+z)(\overline{1+z}) = (1+z)(1+\bar{z}) = 1+z+\bar{z}+z \cdot \bar{z}$$

$$|1-z|^2 = (1-z)(\overline{1-z}) = (1-z)(1-\bar{z}) = 1-z-\bar{z}+z \cdot \bar{z}$$

donc

$$|1+z|^2 + |1-z|^2 = 1+z+\bar{z}+z \cdot \bar{z} + 1-z-\bar{z}+z \cdot \bar{z} = 2+2z \cdot \bar{z} = 4$$

Exercice 15 :

$$I.1) \sqrt{2} \times i \times \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i \right) = i(1+i) = i + i^2 = i-1$$

$$\text{ou } \sqrt{2}e^{i(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4})} = \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}} = \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = -1+i$$

$$I.2) \boxed{\times}$$

$$II.1) Z = z^2 - 9i^2 = (z+3i)(z-3i)$$

$$II.2) Z = (z-i\sqrt{5})(z+i\sqrt{5})$$

$$II.3) \text{ Remarquer que } -1 = i^2 \text{ alors } \boxed{\times}$$

III.1) C'est une translation de vecteur $\vec{u}$ d'affixe a .

Pour III.2 et III.3, de manière générale la transformation associée à la fonction $z \mapsto az$ (a appartenant à $\mathbb{C}$) est la rotation de centre O et d'angle $\arg(a)$.

III.2) Ici $\arg(-1) = \boxed{\times}$, donc la transformation considérée est la rotation de centre O et d'angle π . C'est donc une symétrie de centre O .

III.3) Ici $\arg(i) = \pi/2$ donc la transformation considérée est la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$

Exercice 16 :

1) La rotation de centre O et d'angle $2\pi/3$ envoie le point A sur le point B si on tourne dans le sens direct.

L'affixe z_B de B est donc obtenue en multipliant z_A par $e^{\frac{2\pi}{3}i} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$:

$$z_B = z_A e^{i2\pi/3} = e^{i\pi/3}$$

La rotation de centre O et d'angle $2\pi/3$ envoie le point B sur le point C si on tourne dans le sens direct.

L'affixe z_C de C est donc obtenue en multipliant z_B par $e^{\frac{2\pi}{3}i} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$:

$$z_C = z_B e^{i2\pi/3} = e^{-i\pi/3} = \overline{z_A}$$

2.

a) Les points A, B et C sont situés sur le cercle (C) de centre O et de rayon 1. De plus, d'après les calculs précédents, on a z_A, z_B et z_C qui sont trois racines cubiques de l'unité distinctes.

Donc le triangle ABC est équilatéral et (C) est son cercle circonscrit.

Pour construire A, B et C, on peut tracer le cercle (C) de centre O et de rayon 1, puis repérer le point A d'affixe z_A en tournant dans le sens trigonométrique d'un angle de $\pi/3$.

On peut ensuite construire le point B en tournant dans le sens trigonométrique d'un angle de $2\pi/3$ à partir du point A, et le point C en tournant dans le même sens d'un angle supplémentaire de $2\pi/3$ à partir du point B.

b) Le triangle ABC est équilatéral car ses trois côtés ont la même longueur 1.

En effet, les distances entre les points A, B et C sur la circonférence du cercle (C) sont égales à un tiers de la longueur du cercle (C), qui est 2π , donc égale à $(2\pi)/3$.

3.

a) L'homothétie de centre O et de rapport -2 envoie le point A sur le point P tel que $OP = 2OA$, donc l'affixe z_P de P est donnée par $z_P = -2z_A = -2e^{i\pi/3}$.

De même, elle envoie le point B sur le point Q tel que $OQ = 2OB$, donc l'affixe z_Q de Q est donnée par $z_Q = -2z_B = -2e^{i\pi/3}$ et elle envoie le point C sur le point R tel que $OR = 2OC$, donc l'affixe z_R de R est donnée par $z_R = -2z_C = -2\overline{z_A} = -2e^{-i\pi/3}$.

b) Le triangle PQR est équilatéral car ses trois côtés ont même longueur ($2|z_A| = 2$).

4.

a) L'homothétie de centre O et de rapport -2 est représentée par la fonction $f : z \mapsto -2z$. Son écriture complexe est donc $f(z) = -2z$.

b) On a $z_A + z_B + z_C = e^{i\pi/3} + e^{i\pi/3} + \overline{e^{i\pi/3}} = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

Soit M le milieu du segment [QR]. On a :

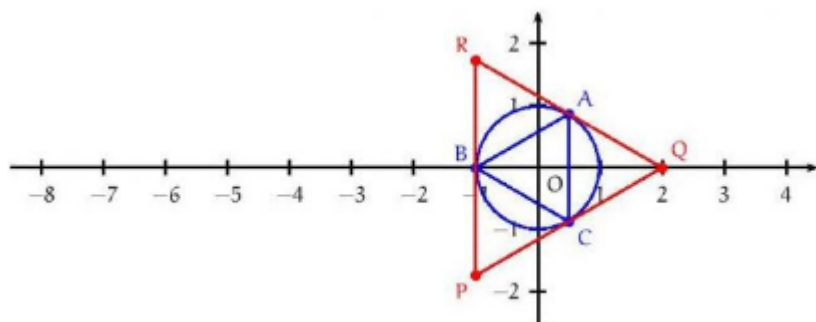
$$z_M = (z_Q + z_R)/2 = (-2e^{i\pi/3} - 2e^{-i\pi/3})/2 = -2\frac{\cos(\pi/3)}{2} = -\frac{1}{2}$$

Donc le point M a pour affixe $-1/2$.

On a montré que A a pour affixe $z_A = e^{\frac{\pi}{3}i}$.

Comme $z_M = -\frac{1}{2} = \frac{1}{2} e^{i\pi}$, on en déduit que le segment [AM] est un diamètre du cercle (C).

Donc la droite (QR), qui est la droite passant par les milieux des côtés du triangle équilatéral ABC, est perpendiculaire au diamètre [AM] et donc tangente au cercle (C).



Exercice 17 :

Partie A.

1) Le module de z' est donné par :

$$|z'| = \left| \frac{-1}{z} \right| = \frac{1}{|z|}$$

La relation entre les arguments de z et z' est donnée par :

$$\text{Arg}(z') = \text{Arg}\left(\frac{-1}{z}\right) = -\text{Arg}(z)$$

2) Les points O, M et M' sont alignés si et seulement si l'argument de la différence M' - O est égal à l'argument de la différence M - O. Or on a :

$$M - O = z$$

$$M' - O = -\frac{1}{z}$$

Donc l'argument de M' - O est l'opposé de l'argument de z . Donc les points O, M et M' sont alignés.

3) On a :

$$\overline{z' + 1} = \overline{\frac{-1}{z} + 1} = \frac{-1}{\overline{z}} + 1 = \frac{1}{z} + 1 = \frac{1}{z}(z + 1)$$

Partie B.

1) L'ensemble C est le cercle de centre 1 et de rayon 1.

En effet, l'équation $|z - 1| = 1$ signifie que le point M est à distance 1 du point 1, donc il est sur le cercle de centre 1 et de rayon 1.

2) a) On a :

$$|z' + 1| = |-1/z + 1| = \left| \frac{1-z}{z} \right| = \frac{|1-z|}{|z|} = \frac{|z-1|}{|z|} = \frac{1}{|z|}$$

D'autre part, on a :

$$|z'| = \frac{1}{|z|}$$

$$\text{Donc } |z' + 1| = |z'|$$

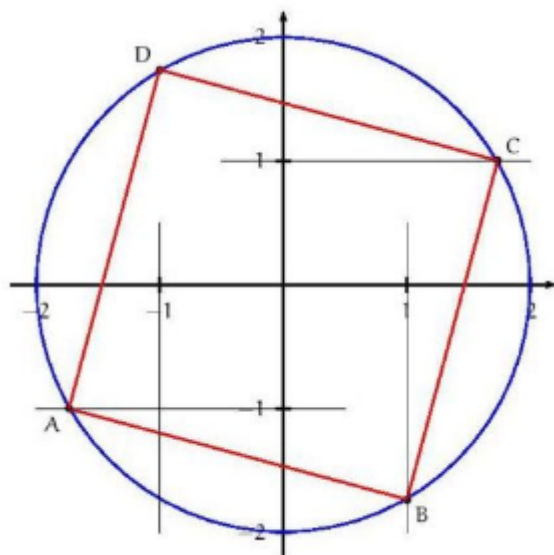
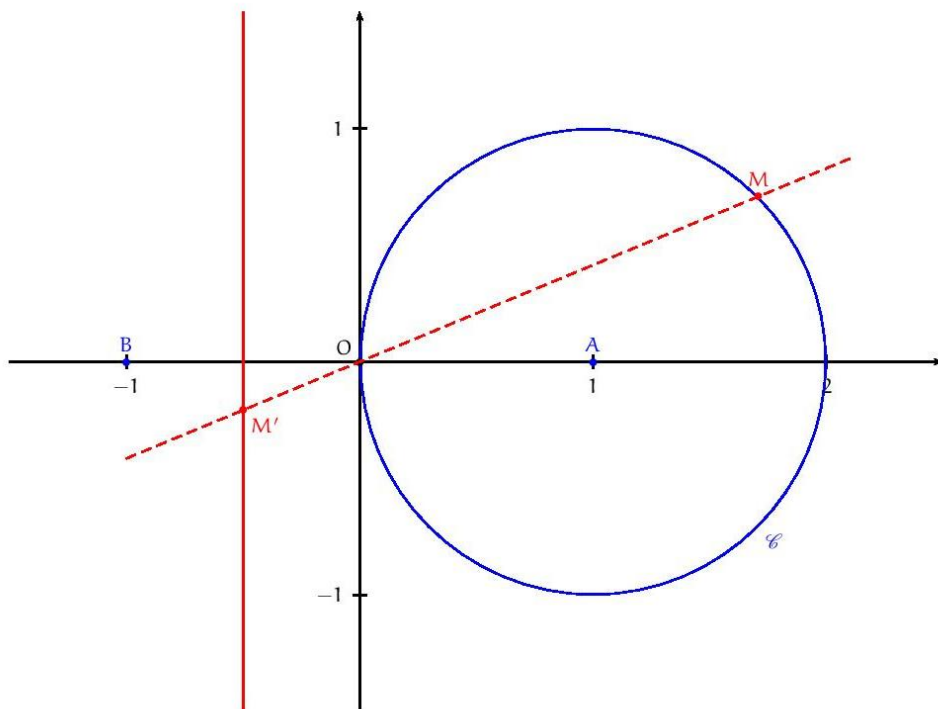
Géométriquement, cela signifie que les points M', O et le conjugué de M' par rapport à O sont alignés.

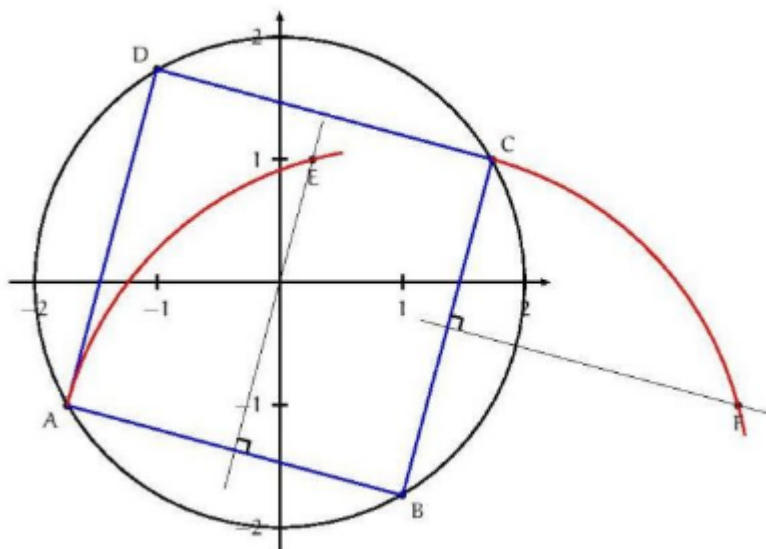
b) Non, cela n'est pas vrai. Par exemple, si $z = -i$, alors $z' = i$, et $|z' + 1| = 2 \neq 1 = |z - 1|$.

3) L'ensemble C est le cercle de centre 1 et de rayon 1. On peut le tracer en utilisant le cercle trigonométrique de centre O et de rayon 1, et en repérant le point 1 sur le cercle.

Si M est un point de C d'affixe z, alors le point M' est le point d'intersection entre la droite (OM) et le cercle trigonométrique de centre O et de rayon 1.

On peut donc le construire en traçant la droite (OM) et en cherchant son point d'intersection avec le cercle trigonométrique, ou en utilisant la propriété géométrique énoncée dans la question 2a).





Exercice 18 :

Partie A

La démonstration demandée est la suivante : soit M un point de coordonnées (x,y) dans le repère $\boxed{\times}$. On note M' le point image de M par la rotation r d'angle α et de centre Ω d'affixe ω . On a :

- Le vecteur $\overrightarrow{OM}$ et son image $\overrightarrow{OM'}$ ont la même direction car r est une rotation.
- La longueur de $\overrightarrow{OM'}$ est la même que celle de $\overrightarrow{OM}$ car r est une rotation.
- L'angle $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'})$ est égal à α car r est une rotation d'angle α .
- $\overrightarrow{OM'}$ est obtenu à partir de $\overrightarrow{OM}$ en multipliant cette dernière par $e^{i\alpha}$.
- Soit z l'affixe de M et z' l'affixe de M' dans le repère $\boxed{\times}$.

On a $z' - \omega = e^{i\alpha}(z - \omega)$ en identifiant les vecteurs $\overrightarrow{OM'}$ et $\overrightarrow{OM}$.

Ce qui donne l'écriture complexe recherchée : $z' = \omega + e^{i\alpha}(z - \omega)$.

Partie B

3.

1. a. Les modules et arguments sont :

$$\begin{aligned}
 |z_A| &= \sqrt{3+1} = 2 \text{ et } \arg(z_A) = -\pi/2. \\
 |z_B| &= \sqrt{1+3} = 2 \text{ et } \arg(z_B) = -\pi/3. \\
 |z_C| &= \sqrt{3+1} = 2 \text{ et } \arg(z_C) = \pi/2. \\
 |z_D| &= \sqrt{1+3} = 2 \text{ et } \arg(z_D) = \pi/3.
 \end{aligned}$$

b. Pour construire A, on part du point O, on avance de $\sqrt{3}$ unités dans la direction de $-i$, puis on avance

d'une unité dans la direction de -1 .

Pour construire B, on part du point O, on avance d'une unité dans la direction de -1 , puis on avance de $\sqrt{3}$ unités dans la direction de $-i$.

Pour construire C, on part du point O, on avance de $\sqrt{3}$ unités dans la direction de $-i$, puis on avance d'une unité dans la direction de 1 .

Enfin, pour construire D, on part du point O, on avance d'une unité dans la direction de 1 , puis on avance de $\sqrt{3}$ unités dans la direction de $-i$.

c. Le quadrilatère ABCD est un losange car ses diagonales AC et BD ont même longueur (4) et elles sont perpendiculaires (produit scalaire nul de leurs vecteurs directeurs).

2.

a. Pour construire E, il suffit d'appliquer la rotation r d'angle $-\pi/3$ et de centre B au point A, c'est-à-dire de construire le point M d'affixe $z = z_A - z_B + z_C - z_D$, puis de construire l'image de M par la rotation r .

On peut faire de même pour construire F à partir de C.

b. L'écriture complexe de r est $r(z) = e^{-i\pi/3}(z - z_B) + z_B$, car elle envoie B sur elle-même et A sur le point d'affixe $z'_A = z_B + e^{-i\pi/3}(z_A - z_B)$.

c. Pour déterminer l'affixe du point E, on calcule $r(z_A)$:

$$r(z_A) = e^{-i\pi/3}(z_A - z_B) + z_B = e^{-i\pi/3}(-\sqrt{3}-2i) + (1-i\sqrt{3}) = -\frac{3\sqrt{3}+i}{2}$$

Donc l'affixe du point E est $-\frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}$.

Exercice 19 :

1. On résout l'équation $z^2 + 4z + 8 = 0$ par le discriminant :

$$\Delta = b^2 - 4ac = 16 - 32 = -16$$

Comme le discriminant est négatif, l'équation admet deux solutions complexes conjuguées :

$$z_1 = (-4 - 4i) / 2 = -2 - 2i$$



Sous forme trigonométrique, on a :

$$z_1 = 2\sqrt{2} e^{-3\pi i/4}$$

$$z_2 = 2\sqrt{2} e^{-\pi i/4}$$

2.

a. La rotation de centre O et d'angle $\pi/2$ envoie les vecteurs sur des vecteurs orthogonaux.

Donc l'image de B est le vecteur orthogonal à OB, c'est-à-dire OA.

Donc l'affixe de C est $c = i(b - a) = 2i - 2$.

b. La rotation de centre A et d'angle $\pi/2$ envoie les vecteurs sur des vecteurs orthogonaux.

Donc l'image de C est le vecteur orthogonal à AC, c'est-à-dire AD (qui est parallèle à OB).

On a $\overrightarrow{AD} = -i\overrightarrow{AC}$, donc l'affixe de D est $d = a - i(c - a) = 2 - 6i$.

c. On peut placer les points C et D sur le graphique en utilisant les informations précédentes. Le quadrilatère ABCD est un rectangle, car AB et CD ont même longueur (4) et sont perpendiculaires (produit scalaire nul).

3.

a. Soit G le barycentre de (A,1), (B,-1) et (C,α) . On a :



En utilisant $\overrightarrow{CB} = -2\overrightarrow{CA}$ et en développant, on obtient :

$$\overrightarrow{CG} = \frac{1}{2+\alpha}(2\alpha + 2)\overrightarrow{CA}$$

b. G_α est à l'intérieur du segment [AB] si et seulement si son coefficient de barycentre est positif, c'est-à-dire si et seulement si :

$$1 - (-1) < \alpha < \frac{|CA|}{|CB|}(-1) - 1$$

$$2 < \alpha < -\frac{1}{2}$$

Donc l'ensemble des points G_α est l'ensemble des points intérieurs au segment [AB] et tels que $2 < \alpha < -1/2$.

Cet ensemble est le segment de droite [FG] où F est le point d'intersection de la droite (AB) avec l'axe des ordonnées (car $\alpha = -1/2$ correspond justement à l'abscisse de F).

c. On a $G_\alpha = D$ si et seulement si G_α est à égale distance de A, B et C, c'est-à-dire si et seulement si c'est le centre du cercle circonscrit à ABC. Or les points A, B et C ne sont pas alignés car $AB = 4$ et $AC = 2\sqrt{2}$.

Donc il n'y a pas de tel valeur de α .

4.

On a :

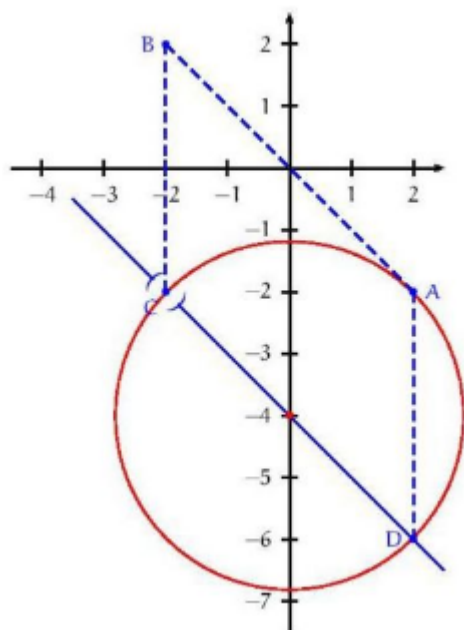
$$|\vec{MA} - \vec{MB} + 2\vec{MC}| = \sqrt{(2-x)^2 + (-2-y)^2} + \sqrt{(-2-x)^2 + (2-y)^2} + 2\sqrt{(x+2)^2 + (y-2)^2}$$

où (x,y) sont les coordonnées de M.

On cherche donc les points M tels que cette expression soit égale à $4\sqrt{2}$.

On peut exprimer x et y en fonction de $t = \sqrt{(2-x)^2 + (-2-y)^2}$, puis utiliser la condition $t + t' + 2t'' = 4\sqrt{2}$ où t' et t'' sont les longueurs des deux autres racines carrées.

On trouve une famille de droites et quelques points d'intersection avec le domaine de définition de M, qui est l'intérieur du carré d'extrémités (2,-2) et (-2,2).



Exercice 20 :

Voir la figure annexe pour les constructions.

1)

a) Le point K a pour affixe $1+i$, on le place donc dans le plan complexe.

b) On calcule :

$$z' = \frac{-z^2}{z-i} = \frac{-(1+i)^2}{1+i-i} = -\frac{2i}{1-i} = \frac{2i(1+i)}{2} = i(1+i)$$

Donc l'affixe de K' est $i(1+i)$.

c) On place le point K' dans le plan complexe.

2)

a) On calcule :

$$z' = \frac{-z^2}{z-i} = \frac{-\frac{i^2}{4}}{\frac{i}{2}-i} = -\frac{i}{3}$$

Donc l'affixe de L' est $-i/3$. On remarque que L' est sur la droite d'équation $\operatorname{Re}(z) = -\frac{1}{3}$, perpendiculaire à la droite (OM).

b) Pour qu'un point soit invariant par f, il faut que $z' = z$, c'est-à-dire :

$$\frac{-z^2}{z-i} = z \Leftrightarrow z^2 + (i-1)z = 0$$

Les solutions sont $z=0$ et $z=1-i$, donc les points d'affixes 0 et $1-i$ sont invariants par f.

3)

a) On sait que G est l'isobarycentre de A, M et M', donc :

$$g = \frac{1}{3}(i+z+z') = \frac{1}{3}(i+z-\frac{z^2}{z-i}) = \frac{1}{3}(i+z-i-\frac{z^2}{z-i}) = \frac{-z^2}{3(z-i)}$$

On vérifie que cette égalité est bien vérifiée pour G.

b) Si M est sur le cercle de centre A et de rayon r, alors l'affixe z vérifie $|z-i|=r$. On peut exprimer cela sous la forme :

$$\sqrt{(x-1)^2+y^2} = r \Leftrightarrow x^2+(y-r)^2 = 1+2r^2$$

On a donc une équation de cercle de centre $(1,r)$ et de rayon $\sqrt{1+2r^2}$.

On calcule :

$$|g| = \frac{|z|^2}{3|z-i|} = \frac{r^2}{3r} = \frac{1}{3}r$$

Donc G est sur le cercle de centre O et de rayon $1/3r$.

c) On a :

$$\arg(g) = \arg(-z^2) - \arg(z-i) - \pi = -2\arg(z) - \frac{\pi}{2}$$

Or, on sait que les droites (AM) et (OM) font un angle θ tel que :

$$\tan(\theta) = \frac{\operatorname{Im}(z-i)}{\operatorname{Re}(z-i)} = \frac{y}{x-1}$$

Donc :

$$\theta = \arctan\left(\frac{y}{x-1}\right)$$

Et on a :

$$\arg(g) = \pi - \theta - \frac{\pi}{2} = -\theta - \frac{\pi}{2} = -(\vec{u}, \overrightarrow{AM})$$

d) On utilise les résultats des questions précédentes :

- G est sur le cercle de centre O et de rayon $\frac{1}{3}OD$.
- L'abscisse de D est $\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, donc D est sur le cercle de centre A et de rayon 1/2

On construit le cercle de centre O et de rayon $\frac{1}{3}OD$ et le cercle de centre A et de rayon 1/2, qui se coupent en deux points E et F.

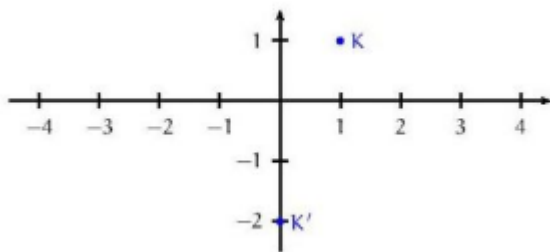
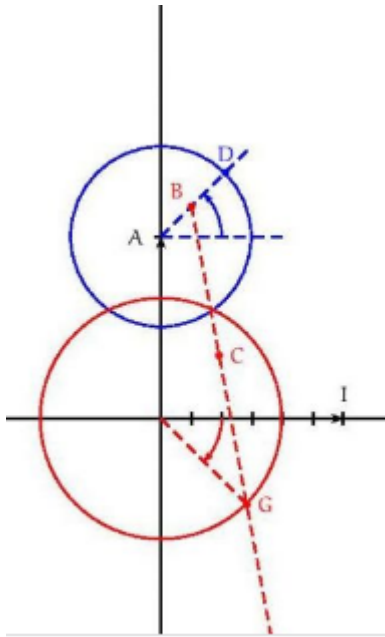
On trace la droite (EF) et on la prolonge jusqu'à couper le cercle de centre O et de rayon $\frac{1}{3}OD$ en G'.

On a alors $OD' = 3OG'$, et on peut en déduire l'abscisse de D' :

- L'abscisse de G' est $g' = \frac{OG'}{3} = OG$
- L'abscisse de D' est $d' = 2g' - d$

On trouve ainsi que l'abscisse de D' est $-\frac{1}{6} + i\frac{\sqrt{3}}{6}$.

La figure annexe montre la construction des points K, K', L', des points invariants, du cercle de G, et du point D'.



Exercice 21 :

Soient A le point d'affixe $a=1-i$ et B le point d'affixe $b=2i-3$.

A tout point M d'affixe z , avec z différent de b , on associe le point M' d'affixe:

$$Z = \frac{z-1+i}{z+3-2i}$$

a) L'ensemble des points M d'affixe z tels que Z soit réel est le segment $[AB]$.

$$Z = \frac{z-z_A}{z-z_B}$$

Z est réel ssi $\arg Z = 0[\pi]$

$$\arg(z-z_A) - \arg(z-z_B) = 0[\pi]$$

$$(\vec{u}, \overrightarrow{MA}) - (\vec{u}, \overrightarrow{MB}) = 0[\pi]$$

$$(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MA}) = 0[\pi]$$

Cela est donc faux, c'est la droite (AB) privée de A et B .

b) Pour tout z différent de -3+2i et de -3-2i, on obtient la forme algébrique de Z par le calcul:

$$\frac{(z-1+i)(z+3+2i)}{(z+3-2i)(z+3+2i)}$$

Ceci est faux, car elle dépend de la forme algébrique de z .

c) L'ensemble des points M d'affixe z tels que M' soit un point de l'axe des ordonnées et le cercle d'équation

$$(x+1)^2 + (y-1/2)^2 = \frac{25}{4}, \text{ sauf le point B.}$$

M' est sur l'axe des ordonnées ssi $\arg Z = \frac{\pi}{2}[\pi]$

$$(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MA}) = \frac{\pi}{2}[\pi]$$

$$(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{AM}) = \frac{\pi}{2}[\pi]$$

cela signifie que $\overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{AM} = 0$

Notons x la partie réelle de z et y sa partie imaginaire :

$$\begin{aligned} &(x-(-3)) \\ &y-2). (x-1 \\ &y-(-1)) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &(x+3 \\ &y-2). (x-1 \\ &y+1) = 0 \end{aligned}$$

$$(x+3)(x-1) + (y-2)(y+1) = 0$$

$$x^2 - x + 3x - 3 + y^2 + y - 2y - 2 = 0$$

$$x^2 + 2x - 3 + y^2 - y - 2 = 0$$

$$(x+1)^2 - 1 - 3 + (y - (\frac{1}{2}))^2 - 2 - \frac{1}{4} = 0$$

$$(x+1)^2 + (y - (\frac{1}{2}))^2 - 6 - \frac{1}{4} = 0$$

$$(x+1)^2 + (y - (\frac{1}{2}))^2 - \frac{25}{4} = 0$$

$$(x+1)^2 + (y - (\frac{1}{2}))^2 = \frac{25}{4}$$

donc c'est vrai .

d) Soit z_0 une solution de l'équation $Z = \frac{z-1+i}{z+3-2i} = i$ (on admet l'existence d'une telle solution).
Le point M_0 d'affixe z_0 est un point de la médiatrice de $[AB]$

$$Z = i$$

$$\Rightarrow |Z| = |i|$$

$$\Rightarrow |Z| = 1$$

$$\frac{AM}{BM} = 1$$

$$AM = BM$$

donc M est un point de la médiatrice de $[AB]$ et l'affirmation est vraie .

Exercice 22 :

1. Déterminer les points invariants de f.

$$z' = z$$

$$z = \frac{z-1}{z+1}$$

$$z(z+1) = z-1$$

$$z^2 + z = z - 1$$

$$z^2 = -1$$

$$z = i \text{ ou } z = -i$$

2. a) montrer que, pour tout nombre complexe z différent de -1, $(z'-1)(z+1) = -2$

$$(z'-1)(z+1) = \left(\frac{z-1}{z+1} - 1\right)(z+1) = \left(\frac{z-1-z-1}{z+1}\right)(z+1) = -2$$

b) En déduire une relation entre $|z'-1|$ et $|z+1|$, puis entre $\arg(z'-1)$ et $\arg(z+1)$, pour tout nombre complexe z différent de -1.

$$(z'-1)(z+1) = -2$$

$$|(z'-1)(z+1)| = 2$$

$$|z'-1| \times |z+1| = 2$$

$$|z'-1| = \frac{2}{|z+1|}$$

de même $\arg(z'-1) = \pi - \arg(z+1)$.

3. Montrer que si M appartient au cercle (C) de centre B et de rayon 2, alors M' appartient au cercle (C') de centre A et de rayon 1.

M appartient au cercle (C) de centre B et de rayon 2 ssi $BM = 2$

$$\text{ssi } |z - z_B| = 2 \Leftrightarrow |z+1| = 2$$

$$\text{or } |z'-1| = \frac{2}{|z+1|}$$

$$|z'-1| = \frac{2}{|z+1|} \Leftrightarrow |z'-1| = 1$$

donc M' appartient au cercle de centre A et de rayon 1.

Exercice 23 :

1.

a) Voir la figure ci-dessous :

b) On calcule l'affixe de C' :

$$z' = \frac{i+1}{i-2i} = \frac{i+1}{-i} = 1-i$$

Donc l'affixe de C' est $1-i$. Le quadrilatère ACBC' est un parallélogramme car AC est parallèle à BC' (même argument que pour la question 3.c).

c) On cherche à résoudre l'équation $z' = i$, c'est-à-dire :

$$\frac{z+1}{z-2i} = i \Leftrightarrow z+1 = -i(z-2i) \Leftrightarrow z+1 = 2+iz \Leftrightarrow z = -1-i$$

Donc l'antécédent de C par f est le point d'affixe $-1-i$. Le triangle BCC'' est isocèle en C'' car C'' est le milieu de [BC] (propriété de l'homothétie).

2. Le module de z' correspond au rapport entre les distances OM' et OM , pour tout point M différent de A. En effet, on a :

$$|z'| = \frac{|z+1|}{|z-2i|}$$

De plus, l'argument de z' correspond à l'angle entre les vecteurs OM et OM' , mesuré dans le sens direct (sens trigonométrique), pour tout point M différent de A . En effet, on a :

$$\arg(z') = \arg(z+1) - \arg(z-2i)$$

3.

a) On cherche les points M tels que $z' < 0$. On a :

$$\frac{z+1}{z-2i} < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z+1 < 0 \\ z-2i > 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} z+1 > 0 \\ z-2i < 0 \end{cases}$$

La première inéquation est vérifiée pour $z \in (-1, 2i)$, la seconde pour $z \in (-\infty, -1) \cup (2i, +\infty)$. Donc l'ensemble E_0 est la réunion de deux demi-droites :

$$E_0 = \{ M \in \mathbb{C} \setminus \{A\} \mid -1 < \operatorname{Re}(z) < 2i \text{ ou } \operatorname{Re}(z) < -1 \text{ ou } \operatorname{Re}(z) > 2i \}$$

b) On cherche les points M tels que z' soit un imaginaire pur non nul. On a :

$$z' = \frac{z+1}{z-2i} = \frac{(z+1)(\bar{z}-2i)}{|z-2i|^2}$$

Donc z' est un imaginaire pur non nul si et seulement si $(z+1)(\bar{z}-2i)$ est un imaginaire pur non nul, c'est-à-dire s'il n'a pas de partie réelle. On a :

$$\operatorname{Re}[(z+1)(\bar{z}-2i)] = |z|^2 + z - 2i\bar{z} - 2i = \operatorname{Re}(z)(1-2i) + |z|^2 + z$$

Donc l'équation $\operatorname{Re}[(z+1)(\bar{z}-2i)] = 0$ est équivalente à l'équation $|z|^2 + (1-\operatorname{Re}(z))z + 2i\operatorname{Re}(z) = 0$.

Le discriminant est $(1-\operatorname{Re}(z))^2 - 8i\operatorname{Re}(z) = (1-3\operatorname{Re}(z))^2 + 8\operatorname{Im}(z)$, qui doit être négatif pour que l'équation ait une solution. Or, pour tout z non nul, on a :

$$(1-3\operatorname{Re}(z))^2 + 8\operatorname{Im}(z) \geq 8\operatorname{Im}(z) > 0$$

Donc l'équation n'a pas de solution et E_1 est l'ensemble vide.

c) On cherche les points M tels que z' appartienne au cercle de centre O et de rayon 1. On a :

$$|z'| = \frac{|z+1|}{|z-2i|} = 1 \Leftrightarrow |z+1| = |z-2i|$$

Cela correspond géométriquement à la propriété suivante :

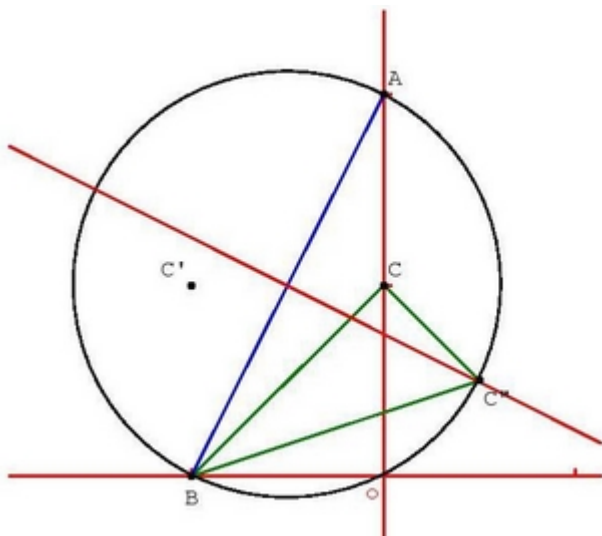
si M est un point du plan pour lequel la distance à -1 est égale à la distance à $2i$, alors l'image M' par f est sur le cercle de centre O et de rayon 1.

On peut remarquer que cette propriété est aussi vérifiée pour l'application g qui, à tout point M, associe le point M'' d'affixe $z'' = \frac{1}{z}$.

En effet, on a :

$$|z''| = \frac{1}{|z|} = \frac{|z+1|}{|z-2i|} = 1$$

Donc l'ensemble E_2 correspond aux points situés sur l'axe passant par -1 et $2i$.



Exercice 24 :

On cherche à résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} z_1 z_2 = \frac{1}{2} \\ z_1 + 2z_2 = \sqrt{3} \end{cases}$$

On peut exprimer z_1 en fonction de z_2 grâce à la deuxième équation :

$$z_1 = \sqrt{3} - 2z_2$$

En remplaçant dans la première équation, on trouve :

$$(\sqrt{3} - 2z_2)z_2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow -2z_2^2 + \sqrt{3}z_2 - \frac{1}{2} = 0$$

On résout cette équation du second degré en z_2 :

$$z_2 = \frac{\sqrt{3} \pm \sqrt{3/2}}{-4}$$

Pour chacune de ces valeurs de z_2 , on peut calculer z_1 grâce à $z_1 = \sqrt{3} - 2z_2$.

On trouve donc deux solutions :

$$z_1 = \sqrt{3} + \frac{\sqrt{6}}{2}i, z_2 = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{6}}{-4}$$

$$z_1 = \sqrt{3} - \frac{\sqrt{6}}{2}i, z_2 = \frac{\sqrt{3} - \sqrt{6}}{-4}$$

Pour donner les formes trigonométriques de ces nombres, on calcule leur module et leur argument :

- Pour $z_1 = x_1 + iy_1$, on a $|z_1| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$ et $\arg(z_1) = \arctan(\frac{y_1}{x_1})$ si $x_1 > 0$,

ou bien $\arg(z_1) = \arctan(\frac{y_1}{x_1}) + \pi$ si $x_1 < 0$ et $y_1 \geq 0$,

ou bien $\arg(z_1) = \arctan(\frac{y_1}{x_1}) - \pi$ si $x_1 < 0$ et $y_1 < 0$.

- Pour $z_2 = x_2 + iy_2$, on a $|z_2|$ et $\arg(z_2)$ de la même manière.

On a :

$$|z_1| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (\frac{\sqrt{6}}{2})^2} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{6}}{2} = \sqrt{2 + \sqrt{3}}$$

$$\arg(z_1) = \arctan(\frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{3}}) = \frac{\pi}{6}$$

et

$$|z_2| = \sqrt{(\frac{\sqrt{3}}{-4})^2 + (\frac{\sqrt{6}}{-4})^2} = \frac{\sqrt{6}}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\arg(z_2) = \arctan(\frac{\sqrt{6}}{-\sqrt{3}}) = \frac{5\pi}{6}$$

Donc on a :

$$z_1 = \sqrt{2 + \sqrt{3}}(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}) = \sqrt{2 + \sqrt{3}}(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i)$$

$$z_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6}) = -\frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{6}}{4}i$$

Finalement, les deux couples (z_1, z_2) qui satisfont les conditions du problème sont :

$$(\sqrt{2 + \sqrt{3}}(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i), -\frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{6}}{4}i)$$

$$(\sqrt{2+\sqrt{3}}(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i), \frac{\sqrt{2}}{4}+\frac{\sqrt{6}}{4}i)$$