

Nombres complexes

Corrigé de l'exercice 1 : Calculs sous forme algébrique

1. On développe en utilisant $i^2 = -1$:

$$(2 + 3i)(1 - i) = 2 - 2i + 3i - 3i^2 = 2 + i + 3.$$

Ainsi, $(2 + 3i)(1 - i) = 5 + i$ **et son module vaut** $\sqrt{26}$. On retrouve ce module par multiplicativité : $|2 + 3i| |1 - i| = \sqrt{13} \sqrt{2} = \sqrt{26}$.

2. On multiplie numérateur et dénominateur par le conjugué du dénominateur :

$$\frac{1 + 2i}{3 - 4i} = \frac{(1 + 2i)(3 + 4i)}{9 + 16} = \frac{3 + 4i + 6i - 8}{25} = \frac{-5 + 10i}{25}.$$

Donc $\frac{1 + 2i}{3 - 4i} = -\frac{1}{5} + \frac{2}{5}i$, **de module** $\frac{\sqrt{5}}{5}$. En effet, $\frac{|1 + 2i|}{|3 - 4i|} = \frac{\sqrt{5}}{5}$, ce qui confirme le calcul, car $\sqrt{\frac{1}{25} + \frac{4}{25}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$.

3. D'abord, $(1 + i)^2 = 1 + 2i - 1 = 2i$. Par conséquent, $(1 + i)^4 = (2i)^2 = -4$.
Ensuite, $2026 = 4 \times 506 + 2$ et $i^4 = 1$, donc $i^{2026} = i^2$. **Ainsi, $(1 + i)^4 = -4$ et $i^{2026} = -1$.**

4. Posons $z = x + iy$ avec x, y réels. Alors $z + 2\bar{z} = x + iy + 2x - 2iy = 3x - iy$.
L'équation devient $3x - iy = 3 - i$. Par identification des parties réelles et imaginaires, $3x = 3$ et $-y = -1$. **L'unique solution est $z = 1 + i$.**

Point de méthode : dès qu'une équation fait intervenir z et $\bar{z}$, on pose $z = x + iy$ et on identifie parties réelles et imaginaires.

Corrigé de l'exercice 2 : Construction de $\mathbb{C}$ à partir de $\mathbb{R}^2$

1. Pour tous couples, $(c, d) \times (a, b) = (ca - db, cb + da)$. Or la multiplication réelle est commutative, donc ce couple est égal à $(ac - bd, ad + bc)$. Ensuite,
 $(a, b) \times (1, 0) = (a - 0, 0 + b) = (a, b)$. **La loi est commutative et $(1, 0)$ est neutre.**
2. On applique la définition avec $a = c = 0$ et $b = d = 1$:
 $(0, 1) \times (0, 1) = (0 - 1, 0 + 0)$. **Donc $(0, 1)^2 = (-1, 0)$, c'est-à-dire $i^2 = -1$.**
3. Comme $(a, b) \neq (0, 0)$, on a $a^2 + b^2 > 0$. Cherchons (x, y) tel que
 $(a, b) \times (x, y) = (1, 0)$. On obtient le système $ax - by = 1$ et $bx + ay = 0$. Son déterminant vaut $a^2 + b^2 \neq 0$, donc il a une unique solution. Les formules de Cramer donnent
 $x = \frac{a}{a^2 + b^2}$ et $y = \frac{-b}{a^2 + b^2}$. Vérifions :

$$(a, b) \times \left(\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2} \right) = \left(\frac{a^2 + b^2}{a^2 + b^2}, \frac{-ab + ab}{a^2 + b^2} \right) = (1, 0).$$

L'inverse de (a, b) est $\left(\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2} \right)$.

4. Soit $x \in \mathbb{C}$. L'ordre est total, donc on a $0 \leq x$ ou $x \leq 0$. Dans le premier cas, la compatibilité avec le produit donne directement $0 \leq x \cdot x$. Dans le second cas, on ajoute $-x$ aux deux membres : $x \leq 0$ donne $x + (-x) \leq 0 + (-x)$, soit $0 \leq -x$. Alors
 $0 \leq (-x)(-x) = x^2$. Ainsi, tout carré vérifie $0 \leq x^2$.

En particulier, $0 \leq 1^2 = 1$ et $0 \leq i^2 = -1$. Ajoutons 1 à la seconde inégalité :

$1 \leq -1 + 1 = 0$. On a donc $0 \leq 1$ et $1 \leq 0$. Par antisymétrie, $1 = 0$, ce qui est faux dans un corps. **Aucun ordre total n'est compatible avec les lois de $\mathbb{C}$.**

Corrigé de l'exercice 3 : Module et inégalité triangulaire

1. On utilise $|u|^2 = u\bar{u}$. D'une part, $|z + w|^2 = |z|^2 + |w|^2 + z\bar{w} + \bar{z}w$. D'autre part,
 $|z - w|^2 = |z|^2 + |w|^2 - z\bar{w} - \bar{z}w$. En ajoutant, les termes croisés disparaissent. **Donc**
 $|z + w|^2 + |z - w|^2 = 2(|z|^2 + |w|^2)$. Géométriquement, $z + w$ et $z - w$ représentent les diagonales du parallélogramme construit sur z et w . Autrement dit, la somme

des carrés des diagonales égale la somme des carrés des quatre côtés : c'est l'identité du parallélogramme.

2. On écrit $z = (z - w) + w$. L'inégalité triangulaire donne $|z| \leq |z - w| + |w|$, donc $|z| - |w| \leq |z - w|$. En échangeant les rôles de z et w , on obtient aussi $|w| - |z| \leq |w - z| = |z - w|$. **Ainsi, $||z| - |w|| \leq |z - w|$.**

3. Supposons $|z| \leq 1$. Pour la majoration, l'inégalité triangulaire donne

$$|z^3 - 2z + 4| \leq |z|^3 + 2|z| + 4 \leq 1 + 2 + 4 = 7.$$

Pour la minoration, on applique la question précédente avec 4 et $2z - z^3$:

$$|z^3 - 2z + 4| \geq 4 - |z^3 - 2z| \geq 4 - |z|^3 - 2|z| \geq 4 - 1 - 2 = 1.$$

Donc $1 \leq |z^3 - 2z + 4| \leq 7$ sur le disque unité fermé. En particulier, ce polynôme n'y a aucune racine.

4. On reprend la preuve du cours. On a $|z + w|^2 = |z|^2 + |w|^2 + 2\operatorname{Re}(z\bar{w})$ et $(|z| + |w|)^2 = |z|^2 + |w|^2 + 2|z\bar{w}|$. L'égalité impose donc $\operatorname{Re}(z\bar{w}) = |z\bar{w}|$. Or un complexe dont la partie réelle égale le module a une partie imaginaire nulle, et il est positif. Ainsi, $z\bar{w}$ est un réel positif, non nul car z et w sont non nuls. Enfin, $\frac{z}{w} = \frac{z\bar{w}}{|w|^2}$. **Donc z/w est un réel strictement positif.**

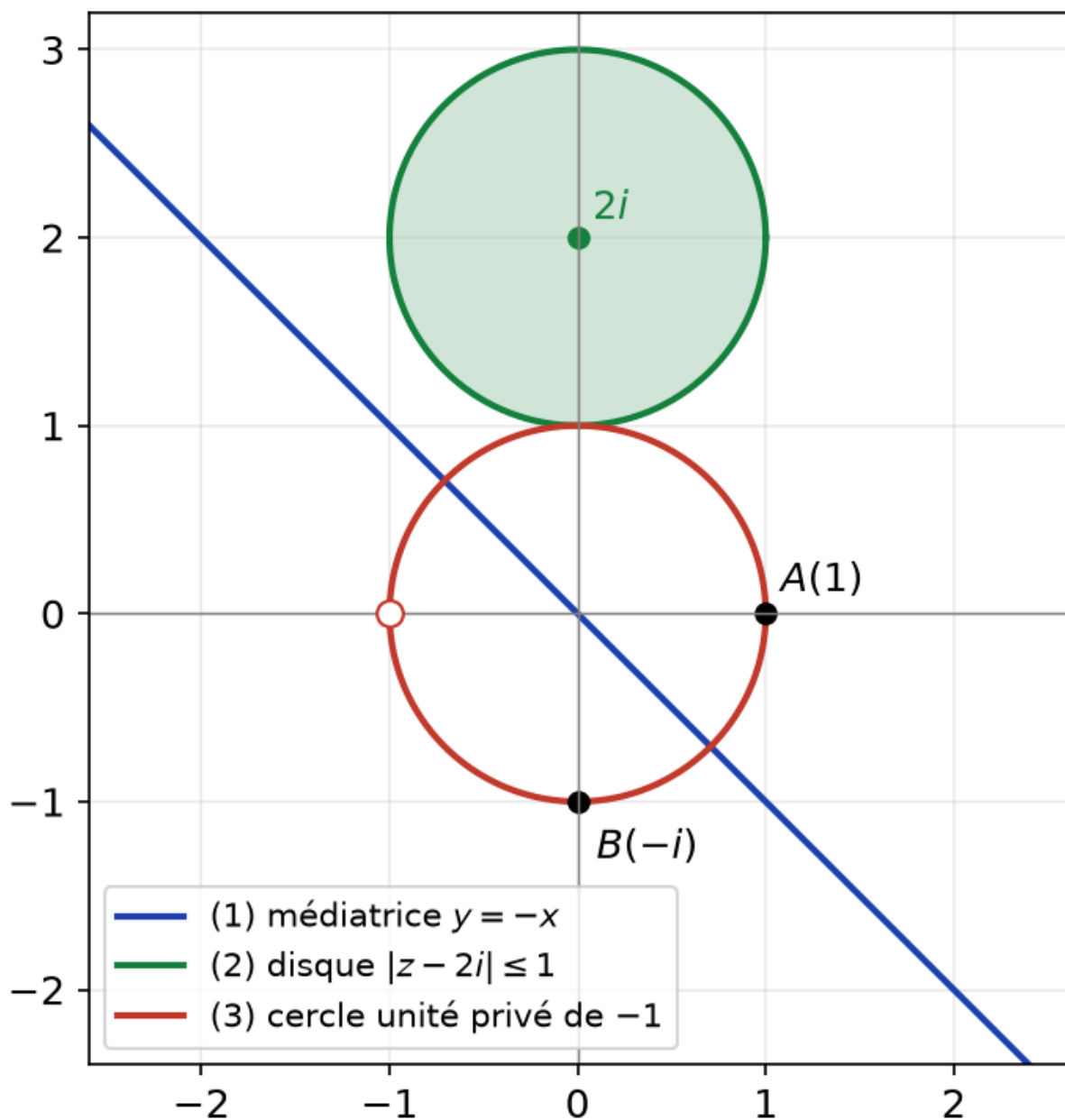
Corrigé de l'exercice 4 : Ensembles de points du plan

- Notons A et B les points d'affixes 1 et $-i$. La condition s'écrit $AM = BM$. C'est la médiatrice de $[AB]$. Vérifions par le calcul avec $z = x + iy$: $(x-1)^2 + y^2 = x^2 + (y+1)^2$, soit $-2x + 1 = 2y + 1$. **L'ensemble est la droite d'équation $y = -x$.**
- La condition signifie que la distance de M au point d'affixe $2i$ est au plus 1 . **C'est le disque fermé de centre $2i$ et de rayon 1 .**
- Soit $z \neq -1$. On multiplie par le conjugué du dénominateur :

$$\frac{z-1}{z+1} = \frac{(z-1)(\bar{z}+1)}{|z+1|^2} = \frac{|z|^2 - 1 + z - \bar{z}}{|z+1|^2}.$$

Or $z - \bar{z} = 2i \operatorname{Im}(z)$ est imaginaire pur. Par conséquent, la partie réelle du quotient vaut $\frac{|z|^2 - 1}{|z + 1|^2}$. Le quotient est imaginaire pur si et seulement si cette partie réelle est nulle, c'est-à-dire $|z| = 1$. **L'ensemble est le cercle unité privé du point d'affixe -1 .**

La figure ci-dessous représente les trois ensembles. On y voit la médiatrice de $[AB]$, le disque hachuré et le cercle unité dont le point -1 est exclu.



Corrigé de l'exercice 5 : Formules de trigonométrie

1. La formule d'addition donne

$$\cos \frac{\pi}{12} = \cos \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{4} + \sin \frac{\pi}{3} \sin \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}.$$

De même, $\sin \frac{\pi}{12} = \sin \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{4} - \cos \frac{\pi}{3} \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$. Ensuite, on calcule le quotient :

$$\tan \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{\sqrt{6} + \sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{6} - \sqrt{2})^2}{6 - 2} = \frac{8 - 4\sqrt{3}}{4}.$$

Ainsi, $\cos \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$, $\sin \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$ et $\tan \frac{\pi}{12} = 2 - \sqrt{3}$.

2. On a $\sin 2x = 2\sin x \cos x$. L'équation devient $\cos x (2\sin x - 1) = 0$. D'une part, $\cos x = 0$ donne $x = \frac{\pi}{2}$ ou $x = \frac{3\pi}{2}$ dans $[0, 2\pi[$. D'autre part, $\sin x = \frac{1}{2}$ donne $x = \frac{\pi}{6}$ ou $x = \frac{5\pi}{6}$. **Les solutions sont** $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{5\pi}{6}$ et $\frac{3\pi}{2}$.

3. On factorise par $\sqrt{1+3} = 2$:

$$\cos x + \sqrt{3} \sin x = 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} \cos x + \sin \frac{\pi}{3} \sin x \right) = 2 \cos \left(x - \frac{\pi}{3} \right).$$

L'équation équivaut donc à $\cos \left(x - \frac{\pi}{3} \right) = \frac{1}{2} = \cos \frac{\pi}{3}$. Ainsi, $x - \frac{\pi}{3} \equiv \frac{\pi}{3}$ ou $x - \frac{\pi}{3} \equiv -\frac{\pi}{3}$ modulo 2π . **Les solutions sont les réels** $2k\pi$ et $\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$. On vérifie : pour $x = \frac{2\pi}{3}$, $-\frac{1}{2} + \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 1$.

Corrigé de l'exercice 6 : Formes trigonométrique et exponentielle

1. On applique la méthode du cours à chaque nombre.

D'abord, $|z_1| = \sqrt{2}$ et $z_1 = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$, donc $z_1 = \sqrt{2} e^{i\pi/4}$.

Ensuite, $|z_2| = 2$ et $z_2 = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)$, donc $z_2 = 2e^{-i\pi/6}$.

De plus, $|z_3| = \sqrt{4+12} = 4$ et $z_3 = 4\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, donc $z_3 = 4e^{2i\pi/3}$.

Enfin, $z_4 = 5 \times (-i) = 5e^{-i\pi/2}$.

Bilan : $z_1 = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$, $z_2 = 2e^{-i\pi/6}$, $z_3 = 4e^{2i\pi/3}$, $z_4 = 5e^{-i\pi/2}$.

2. On calcule séparément : $(1+i)^{10} = 2^5 e^{10i\pi/4} = 32e^{5i\pi/2} = 32i$. De même, $(\sqrt{3}-i)^6 = 2^6 e^{-i\pi} = -64$. **Par conséquent**, $Z = \frac{32i}{-64} = -\frac{1}{2}i$.

3. On a $1+i\sqrt{3} = 2e^{i\pi/3}$, donc $(1+i\sqrt{3})^n = 2^n e^{in\pi/3}$. Ce nombre non nul est réel si et seulement si $e^{in\pi/3} = \pm 1$, c'est-à-dire $\frac{n\pi}{3} \in \pi\mathbb{Z}$. **C'est le cas si et seulement si n est un multiple de 3.**

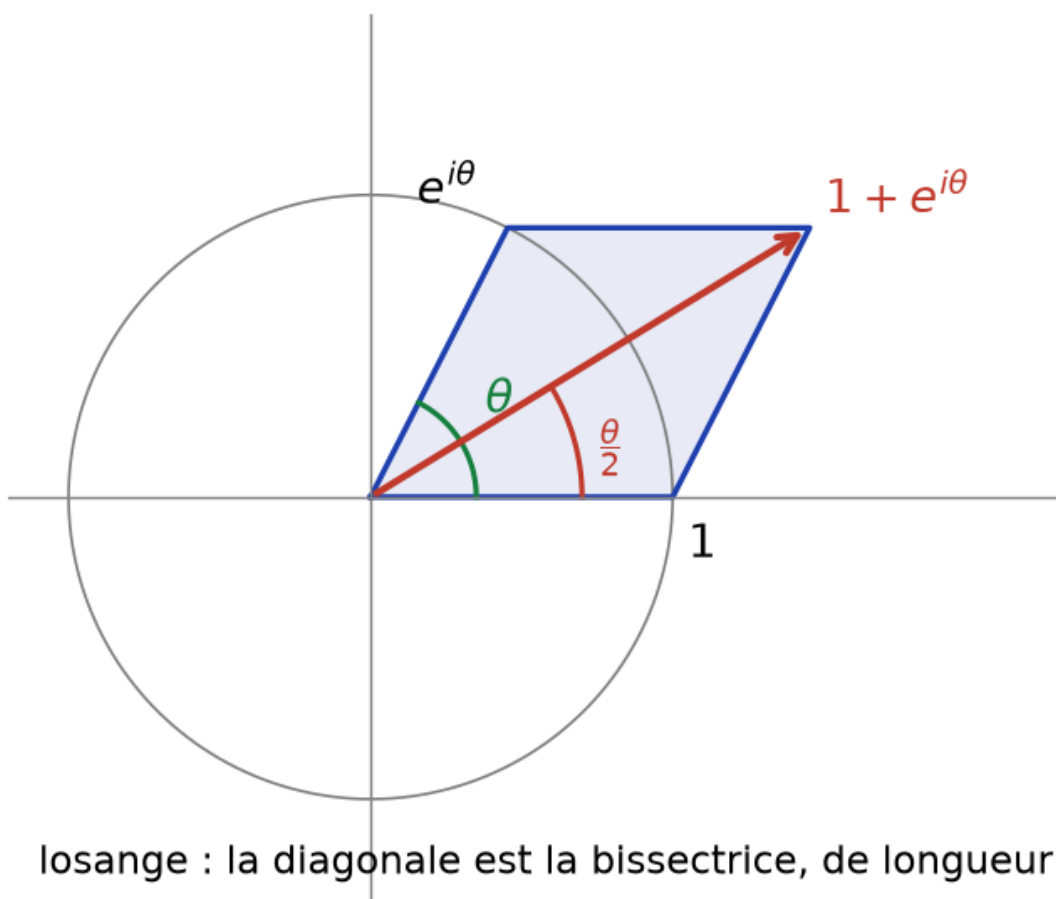
Corrigé de l'exercice 7 : Exponentielle complexe et argument

1. On factorise par l'angle moitié :

$$1 + e^{i\theta} = e^{i\theta/2} \left(e^{-i\theta/2} + e^{i\theta/2} \right) = 2\cos\frac{\theta}{2} e^{i\theta/2}.$$

Or $\theta \in]-\pi, \pi[$, donc $\frac{\theta}{2} \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et $\cos\frac{\theta}{2} > 0$. L'écriture obtenue est donc bien une forme trigonométrique. **Le module vaut $2\cos\frac{\theta}{2}$ et un argument est $\frac{\theta}{2}$.**

La figure ci-dessous illustre ce résultat. Les points 0 , 1 , $1+e^{i\theta}$ et $e^{i\theta}$ forment un losange de côté 1 . Sa diagonale issue de 0 est donc la bissectrice de l'angle θ .



2. On met en facteur l'exponentielle de l'angle moyen :

$$e^{i\alpha} + e^{i\beta} = e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}} \left(e^{i\frac{\alpha-\beta}{2}} + e^{-i\frac{\alpha-\beta}{2}} \right).$$

Par la formule d'Euler, $e^{i\alpha} + e^{i\beta} = 2\cos\frac{\alpha-\beta}{2} e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}$ et

$$e^{i\alpha} - e^{i\beta} = 2i\sin\frac{\alpha-\beta}{2} e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}.$$

3. Posons $z = x + iy$. Alors $e^z = e^x e^{iy}$, et $|e^{iy}| = \sqrt{\cos^2 y + \sin^2 y} = 1$. Par multiplicativité du module, $|e^z| = e^x |e^{iy}| = e^x$, car $e^x > 0$. **Donc** $|e^z| = e^{\operatorname{Re}(z)}$.

4. D'abord, $1 + i\sqrt{3} = 2e^{i\pi/3}$. Avec $z = x + iy$, l'équation s'écrit $e^x e^{iy} = 2e^{i\pi/3}$. Par unicité du module et de l'argument, $e^x = 2$ et $y \equiv \frac{\pi}{3}$ modulo 2π . **Les solutions sont les** $\ln 2 + i\left(\frac{\pi}{3} + 2k\pi\right)$, $k \in \mathbb{Z}$. Ensuite, $-1 = e^{i\pi}$, donc $e^x = 1$ et $y \equiv \pi$. **Les solutions de** $e^z = -1$ **sont les** $(2k+1)i\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Corrigé de l'exercice 8 : Formule de Moivre

1. Notons $c = \cos\theta$ et $s = \sin\theta$. Par la formule de Moivre puis le binôme :

$$\cos 3\theta + i\sin 3\theta = (c + is)^3 = c^3 - 3cs^2 + i(3c^2s - s^3).$$

On identifie les parties réelles, puis on remplace s^2 par $1 - c^2$: $\cos 3\theta = c^3 - 3c + 3c^3$.

De même, avec $c^2 = 1 - s^2$, la partie imaginaire vaut $3s - 3s^3 - s^3$. **Ainsi,**

$$\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta \text{ et } \sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta.$$

2. La partie réelle de $(c + is)^4$ vaut $c^4 - 6c^2s^2 + s^4$. En remplaçant s^2 par $1 - c^2$:

$$\cos 4\theta = c^4 - 6c^2 + 6c^4 + 1 - 2c^2 + c^4.$$

Donc $\cos 4\theta = 8\cos^4\theta - 8\cos^2\theta + 1$. On peut vérifier avec $\cos 4\theta = 2\cos^2 2\theta - 1$.

3. Posons $c = \cos\frac{\pi}{9}$. D'après la question 1, $4c^3 - 3c = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$. En multipliant par 2, on obtient $8c^3 - 6c = 1$. **Donc** $\cos\frac{\pi}{9}$ est solution de $8x^3 - 6x - 1 = 0$.

4. On divise numérateur et dénominateur par $\cos^3\theta \neq 0$:

$$\tan 3\theta = \frac{3\sin\theta - 4\sin^3\theta}{4\cos^3\theta - 3\cos\theta} = \frac{3t(1 + t^2) - 4t^3}{4 - 3(1 + t^2)},$$

$$\text{car } \frac{1}{\cos^2\theta} = 1 + t^2. \text{ Après simplification, } \tan 3\theta = \frac{3t - t^3}{1 - 3t^2}.$$

Corrigé de l'exercice 9 : Linéarisation

1. Par la formule d'Euler et le binôme :

$$\cos^3 x = \frac{e^{3ix} + 3e^{ix} + 3e^{-ix} + e^{-3ix}}{8} = \frac{2\cos 3x + 6\cos x}{8}.$$

Donc $\cos^3 x = \frac{1}{4}\cos 3x + \frac{3}{4}\cos x$, et une primitive est $\frac{1}{12}\sin 3x + \frac{3}{4}\sin x$.

2. On a $\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$ et $(2i)^4 = 16$. Le binôme donne alors

$$\sin^4 x = \frac{e^{4ix} - 4e^{2ix} + 6 - 4e^{-2ix} + e^{-4ix}}{16} = \frac{2\cos 4x - 8\cos 2x + 6}{16}.$$

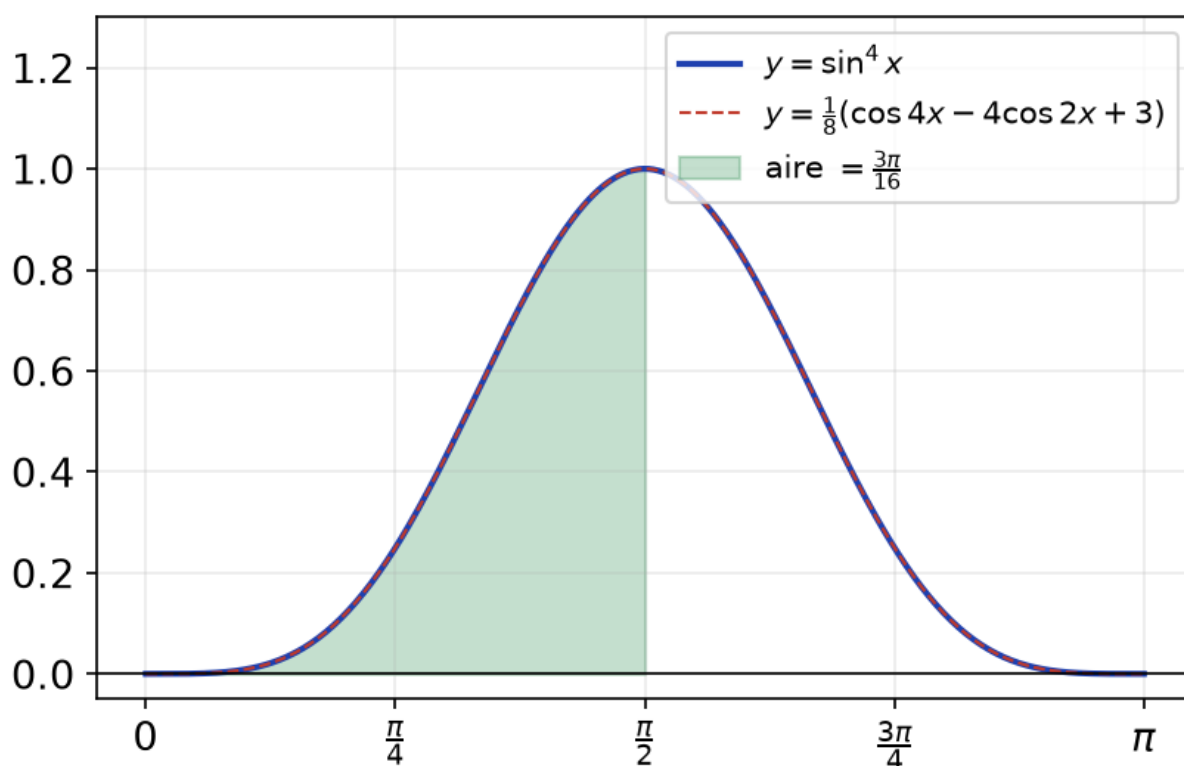
Ainsi, $\sin^4 x = \frac{1}{8}\cos 4x - \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{3}{8}.$

3. On intègre terme à terme la forme linéarisée :

$$I = \left[\frac{\sin 4x}{32} - \frac{\sin 2x}{4} + \frac{3x}{8} \right]_0^{\pi/2}.$$

Or $\sin 2\pi = 0$ et $\sin \pi = 0$. **Par conséquent,** $I = \frac{3\pi}{16}.$

La figure ci-dessous montre que la forme linéarisée coïncide avec $\sin^4 x$. L'aire colorée sous la courbe entre 0 et $\frac{\pi}{2}$ vaut $\frac{3\pi}{16} \approx 0,59$.



4. On utilise $\sin 2x = 2\sin x \cos x$, puis $\sin^2 u = \frac{1 - \cos 2u}{2}$:

$$\sin^2 x \cos^2 x = \frac{\sin^2 2x}{4} = \frac{1 - \cos 4x}{8}.$$

Donc $\sin^2 x \cos^2 x = \frac{1}{8} - \frac{1}{8} \cos 4x.$

Corrigé de l'exercice 10 : Factorisation et sommes trigonométriques

1. D'après l'exercice 7, $e^{ip} + e^{iq} = 2\cos\frac{p+q}{2} e^{i\frac{p+q}{2}}$. On prend la partie réelle des deux membres. **On obtient** $\cos p + \cos q = 2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}.$
2. Avec $p = 3x$ et $q = x$, l'équation devient $2\cos 2x \cos x = 0$. D'une part, $\cos 2x = 0$ équivaut à $2x = \frac{\pi}{2} + k\pi$. D'autre part, $\cos x = 0$ équivaut à $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$. **Les solutions sont les réels $\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2} + k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$.**
3. On a $C_n + iS_n = \sum_{k=0}^n (e^{ix})^k$. Comme $x \notin 2\pi\mathbb{Z}$, la raison e^{ix} est différente de 1. La somme géométrique et l'angle moitié donnent

$$C_n + iS_n = \frac{e^{i(n+1)x} - 1}{e^{ix} - 1} = \frac{e^{i\frac{(n+1)x}{2}} \sin\frac{(n+1)x}{2}}{e^{i\frac{x}{2}} \sin\frac{x}{2}} = e^{i\frac{nx}{2}} \frac{\sin\frac{(n+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}.$$

Le quotient des sinus est réel. On sépare donc parties réelle et imaginaire. **Ainsi,**

$$C_n = \frac{\cos\frac{nx}{2} \sin\frac{(n+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}} \text{ et } S_n = \frac{\sin\frac{nx}{2} \sin\frac{(n+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}.$$

4. Si $x \in 2\pi\mathbb{Z}$, alors $\cos(kx) = 1$ et $\sin(kx) = 0$ pour tout k . **Dans ce cas,**
 $C_n = n + 1$ **et** $S_n = 0$.

Point de méthode : pour une somme de cosinus en progression arithmétique, on passe par la somme géométrique des exponentielles, puis on factorise numérateur et dénominateur par l'angle moitié.

Corrigé de l'exercice 11 : Racines carrées d'un complexe

Dans chaque cas, on cherche $z = x + iy$ tel que $z^2 = w$, avec les trois équations $x^2 - y^2 = \operatorname{Re}(w)$, $x^2 + y^2 = |w|$ et $2xy = \operatorname{Im}(w)$.

1. Ici $|3 - 4i| = 5$. On obtient $x^2 - y^2 = 3$ et $x^2 + y^2 = 5$, donc $x^2 = 4$ et $y^2 = 1$. De plus, $xy = -2 < 0$, donc x et y sont de signes contraires. **Les racines carrées sont $2 - i$ et $-2 + i$.**
2. Ici $|8 + 6i| = 10$. On obtient $x^2 = 9$ et $y^2 = 1$, avec $xy = 3 > 0$. **Les racines carrées sont $3 + i$ et $-3 - i$.** En effet, $(3 + i)^2 = 9 + 6i - 1 = 8 + 6i$.
3. Ici $|-15 - 8i| = \sqrt{225 + 64} = 17$. On obtient $x^2 - y^2 = -15$ et $x^2 + y^2 = 17$, donc $x^2 = 1$ et $y^2 = 16$. Ensuite, $xy = -4 < 0$. **Les racines carrées sont $1 - 4i$ et $-1 + 4i$.** On vérifie : $(1 - 4i)^2 = 1 - 8i - 16 = -15 - 8i$.
4. Méthode algébrique : $x^2 - y^2 = 0$, $x^2 + y^2 = 2$ et $xy = 1$. Donc $x^2 = y^2 = 1$, avec x et y de même signe. Méthode exponentielle : $2i = 2e^{i\pi/2}$, dont les racines carrées sont $\pm\sqrt{2}e^{i\pi/4} = \pm(1 + i)$. **Les deux méthodes donnent $1 + i$ et $-1 - i$.**

Corrigé de l'exercice 12 : Équations du second degré

1. Le discriminant vaut $\Delta = (3 + i)^2 - 4(4 + 3i) = 8 + 6i - 16 - 12i = -8 - 6i$. Cherchons une racine carrée $\delta = x + iy$: $x^2 - y^2 = -8$, $x^2 + y^2 = 10$ et $xy = -3$. Donc $x^2 = 1$, $y^2 = 9$, et $\delta = 1 - 3i$ convient. Les solutions sont $\frac{3 + i + 1 - 3i}{2}$ et $\frac{3 + i - 1 + 3i}{2}$. **Ce sont $2 - i$ et $1 + 2i$.** On vérifie : leur somme vaut $3 + i$ et leur produit $2 - i + 4i + 2 = 4 + 3i$.
2. Ici $\Delta = 1 - 4 = -3 = (i\sqrt{3})^2$. **Les solutions sont $\frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} = j$ et $\frac{-1 - i\sqrt{3}}{2} = j^2$.**
3. On calcule $\Delta = 4\cos^2\theta - 4 = -4\sin^2\theta = (2i\sin\theta)^2$. Les solutions sont donc $\cos\theta \pm i\sin\theta$. **Ce sont $e^{i\theta}$ et $e^{-i\theta}$, confondues si et seulement si $\theta \in \pi\mathbb{Z}$.**

4. Posons $Z = z^2$. L'équation devient $Z^2 - 6Z + 25 = 0$, de discriminant $36 - 100 = -64 = (8i)^2$. Ainsi, $Z = 3 + 4i$ ou $Z = 3 - 4i$. Ensuite, les racines carrées de $3 + 4i$ sont $\pm(2 + i)$, car $(2 + i)^2 = 3 + 4i$. Par conjugaison, celles de $3 - 4i$ sont $\pm(2 - i)$. **Les quatre solutions sont $2 + i$, $-2 - i$, $2 - i$ et $-2 + i$.**
5. Deux complexes de somme s et de produit p sont les solutions de $z^2 - sz + p = 0$. Ici, on résout $z^2 - 2z + 5 = 0$, de discriminant $-16 = (4i)^2$. **Les deux nombres cherchés sont $1 + 2i$ et $1 - 2i$.**

Corrigé de l'exercice 13 : Racines n-ièmes de l'unité

1. Les racines sixièmes de l'unité sont les $e^{ik\pi/3}$, pour k de 0 à 5. **Ce sont 1 , $\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, -1 , $-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$.**
2. On a $\omega^{kp} = (\omega^p)^k$. Si n divise p , alors $\omega^p = e^{2i\pi p/n} = 1$, et la somme vaut n . Sinon, $\omega^p \neq 1$, et la somme géométrique donne $\frac{1 - \omega^{pn}}{1 - \omega^p} = 0$, car $\omega^{pn} = 1$. **La somme vaut n si $n \mid p$, et 0 sinon.**
3. Le produit vaut $\prod_{k=0}^{n-1} \omega^k = \omega^0 + 1 + \dots + (n-1) = \omega^{n(n-1)/2}$. Or $\omega^{n(n-1)/2} = e^{2i\pi \frac{n(n-1)}{2n}} = e^{i\pi(n-1)} = (-1)^{n-1}$. **Le produit des racines n-ièmes de l'unité vaut $(-1)^{n-1}$.**
4. On développe chaque terme par le binôme, puis on échange les sommes :

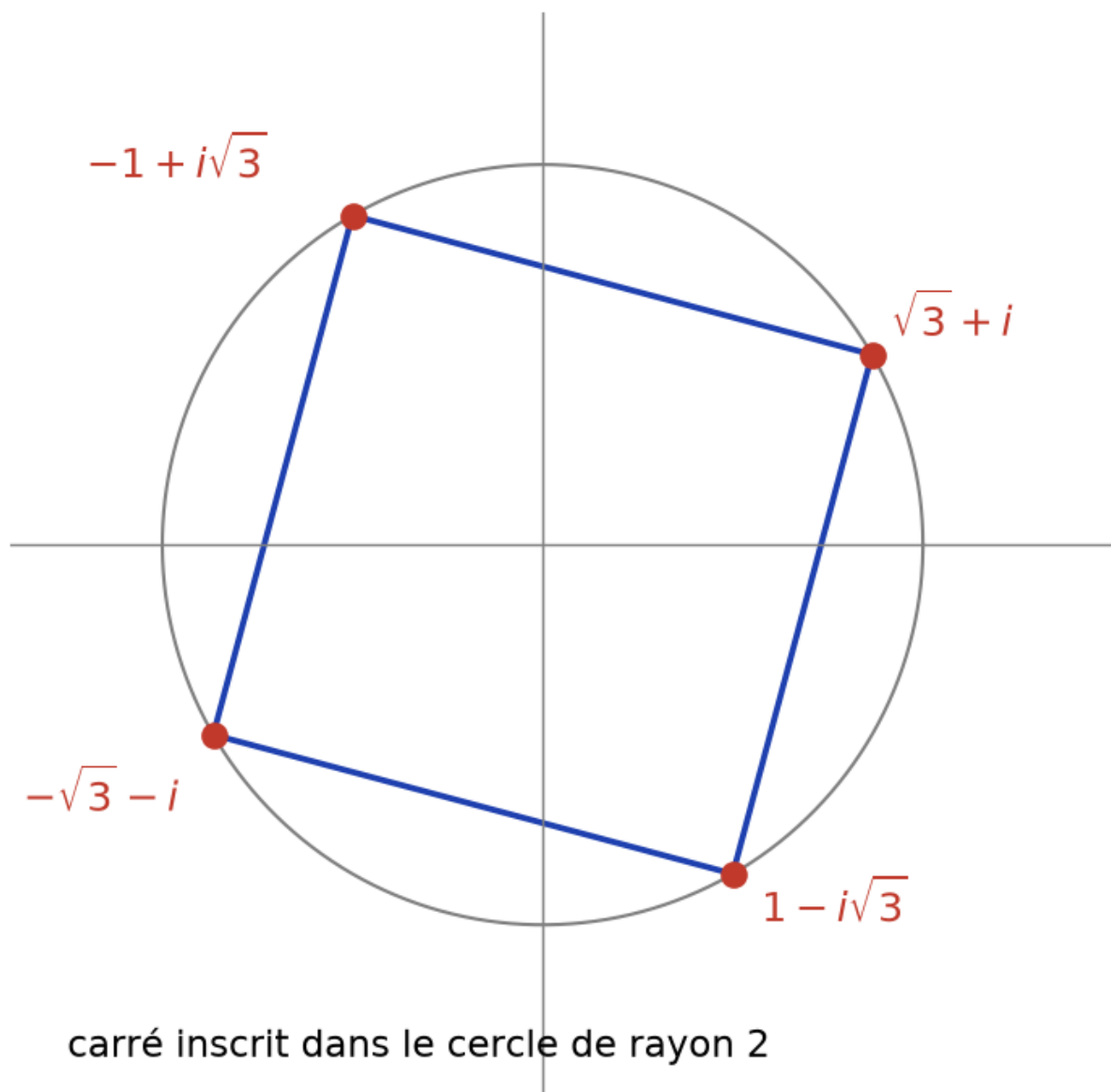
$$\sum_{k=0}^{n-1} (1 + \omega^k)^n = \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} \sum_{k=0}^{n-1} \omega^{kp}.$$

D'après la question 2, la somme intérieure vaut n si $n \mid p$, et 0 sinon. Or, pour $0 \leq p \leq n$, les seuls multiples de n sont 0 et n . Il reste donc $n \binom{n}{0} + n \binom{n}{n}$. **La somme vaut $2n$.** Par exemple, pour $n = 2$, on trouve $2^2 + 0^2 = 4$.

Corrigé de l'exercice 14 : Racines n-ièmes d'un complexe

1. On écrit $-8i = 8e^{-i\pi/2}$. Les solutions sont les $2e^{i\left(-\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}\right)}$, pour $k \in \{0, 1, 2\}$.
Leurs arguments sont $-\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{2}$ et $\frac{7\pi}{6}$. **Les solutions sont** $\sqrt{3} - i$, $2i$ **et** $-\sqrt{3} - i$. On vérifie par exemple $(2i)^3 = 8i^3 = -8i$.
2. D'abord, $|-8 + 8i\sqrt{3}| = 8\sqrt{1+3} = 16$, et $-8 + 8i\sqrt{3} = 16\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 16e^{2i\pi/3}$.
Les solutions sont donc les $2e^{i\left(\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}\right)}$, pour $k \in \{0, 1, 2, 3\}$. **Ce sont** $\sqrt{3} + i$,
 $-1 + i\sqrt{3}$, $-\sqrt{3} - i$ **et** $1 - i\sqrt{3}$. Vérifions la première : $(\sqrt{3} + i)^2 = 2 + 2i\sqrt{3}$, puis
 $(2 + 2i\sqrt{3})^2 = 4 + 8i\sqrt{3} - 12 = -8 + 8i\sqrt{3}$.

La figure ci-dessous place ces quatre solutions. Elles forment un carré inscrit dans le cercle de centre O et de rayon 2 , car on passe de l'une à la suivante par multiplication par i .



3. D'abord, $z = 0$ est solution. Soit maintenant $z \neq 0$ une solution. En prenant les modules, $|z|^5 = |z|$, donc $|z|^4 = 1$ et $|z| = 1$. Alors $\bar{z} = \frac{1}{z}$, et l'équation devient $z^6 = 1$. Réciproquement, si $z^6 = 1$, alors $|z| = 1$ et $z^5 = \frac{1}{z} = \bar{z}$. **Les solutions sont 0 et les six racines sixièmes de l'unité, soit sept solutions.**

Corrigé de l'exercice 15 : Transformations du plan complexe

1. On applique le théorème du cours sur les applications $z \rightarrow az + b$.

Pour f_1 , $a = 1$: c'est la **translation de vecteur d'affixe $2 - i$** .

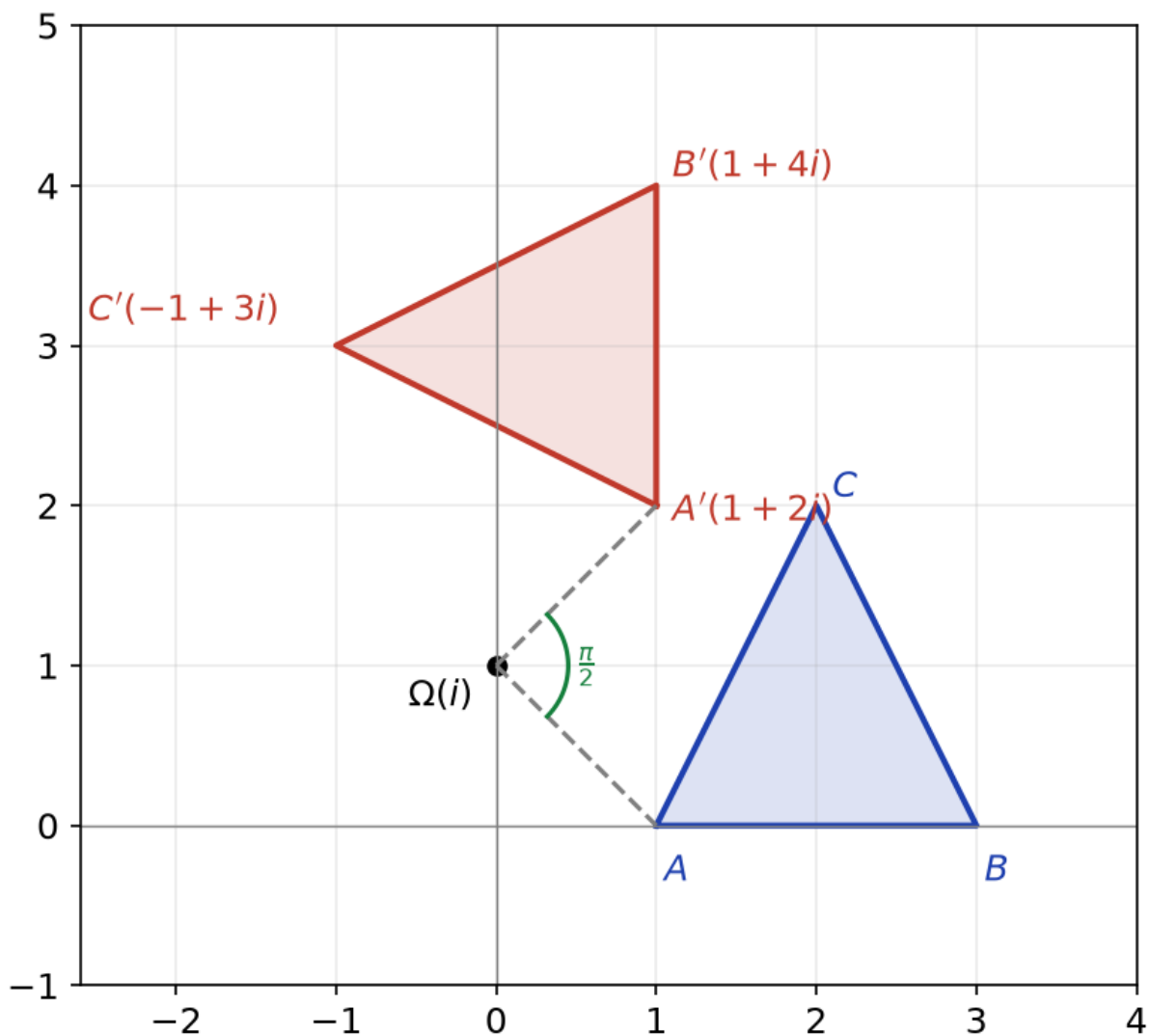
Pour f_2 , $a = i = e^{i\pi/2}$. Le point fixe vérifie $\omega = i\omega + 1 + i$, donc
$$\omega = \frac{1+i}{1-i} = \frac{(1+i)^2}{2} = i$$
. C'est la **rotation de centre $\Omega(i)$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$** .

Pour f_3 , $a = -2$ est réel. Le point fixe vérifie $\omega = -2\omega + 3$, donc $\omega = 1$. C'est l'**homothétie de centre 1 et de rapport -2** .

Pour f_4 , $a = 1 + i = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$ et le point fixe est 0 . C'est la **composée de la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{4}$ et de l'homothétie de centre O et de rapport $\sqrt{2}$** .

2. On calcule $f_2(1) = i + 1 + i = 1 + 2i$, puis $f_2(3) = 3i + 1 + i = 1 + 4i$. Enfin,
 $f_2(2 + 2i) = 2i - 2 + 1 + i = -1 + 3i$. **Ainsi, $A'(1 + 2i)$, $B'(1 + 4i)$ et $C'(-1 + 3i)$** . De plus, $\Omega A = |1 - i| = \sqrt{2}$ et $\Omega A' = |1 + 2i - i| = |1 + i| = \sqrt{2}$, ce qui confirme que la rotation conserve les distances au centre.

La figure ci-dessous montre le triangle ABC et son image $A'B'C'$. On voit le quart de tour autour de Ω qui envoie A sur A' .



3. On compose : $f_2(f_3(z)) = i(-2z + 3) + 1 + i = -2iz + 1 + 4i$. Ici $a = -2i = 2e^{-i\pi/2}$. Le point fixe vérifie $\omega(1 + 2i) = 1 + 4i$, donc

$$\omega = \frac{(1 + 4i)(1 - 2i)}{5} = \frac{1 - 2i + 4i + 8}{5} = \frac{9 + 2i}{5}.$$

$f_2 \circ f_3$ est la similitude de centre $\frac{9 + 2i}{5}$, d'angle $-\frac{\pi}{2}$ et de rapport 2.

4. Une rotation de centre ω et d'angle θ s'écrit $z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega)$. Ici,

$$1 - e^{i\pi/3} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ et } (2 + i)\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} + i\left(\frac{1}{2} - \sqrt{3}\right). \text{ La rotation s'écrit } z' = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z + 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} + i\left(\frac{1}{2} - \sqrt{3}\right).$$

Corrigé de l'exercice 16 : Triangle équilatéral

1. Le nombre j est une racine cubique de l'unité différente de 1. Donc

$$1 + j + j^2 = \frac{1 - j^3}{1 - j} = 0. \text{ Ensuite, } -j^2 = e^{i\pi} e^{4i\pi/3} = e^{7i\pi/3}. \text{ Comme } \frac{7\pi}{3} = \frac{\pi}{3} + 2\pi, \text{ on obtient } e^{i\pi/3} = -j^2.$$

2. Par définition, ABC est équilatéral direct si et seulement si

$$c - a = e^{i\pi/3}(b - a) = -j^2(b - a). \text{ Cette égalité s'écrit } c + j^2b - (1 + j^2)a = 0. \\ \text{Or } -(1 + j^2) = j, \text{ d'où la condition } ja + j^2b + c = 0. \text{ On multiplie enfin par } j^2, \text{ qui} \\ \text{est non nul. Comme } j^3 = 1 \text{ et } j^4 = j, \text{ on obtient une condition équivalente. Ainsi,} \\ ABC \text{ est équilatéral direct si et seulement si } a + bj + cj^2 = 0.$$

3. Avec $a = 1$, $b = j$ et $c = j^2$, on calcule

$$1 + j \cdot j + j^2 \cdot j^2 = 1 + j^2 + j^4 = 1 + j^2 + j = 0. \text{ Le triangle de sommets } 1, \\ j, j^2 \text{ est donc équilatéral direct.}$$

4. La condition s'écrit $0 + 2j + cj^2 = 0$, donc $c = -2j / j^2 = -2j^2$, car $1 / j = j^2$.

$$\text{Or } j^2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}. \text{ Donc } c = 1 + i\sqrt{3}. \text{ On retrouve bien } 2e^{i\pi/3}, \text{ image de } 2 \text{ par la} \\ \text{rotation de centre } 0 \text{ et d'angle } \frac{\pi}{3}.$$

Point de méthode : une configuration géométrique définie par une rotation se traduit par une égalité $c - a = e^{i\theta}(b - a)$; on la manipule ensuite algébriquement.

Corrigé de l'exercice 17 : L'équation $(z+1)^n = (z-1)^n$

1. Pour $z = 1$, le membre de gauche vaut 2^n et celui de droite vaut 0. Donc 1 n'est pas solution.

2. Soit $z \neq 1$. Comme $(z - 1)^n \neq 0$, l'équation (E) équivaut à $\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^n = 1$. De plus, $\frac{z+1}{z-1} = 1$ impliquerait $z + 1 = z - 1$, ce qui est impossible. Ainsi, z est solution si et seulement si $\frac{z+1}{z-1}$ est une racine n-ième de l'unité différente de 1.

3. Soit $u \neq 1$ dans $\mathbb{U}_n$. L'équation $\frac{z+1}{z-1} = u$ équivaut à $z+1 = uz - u$, soit $z(u-1) = u+1$, donc $z = \frac{u+1}{u-1}$. Prenons $u = e^{2ik\pi/n}$ avec $1 \leq k \leq n-1$. L'angle moitié donne $u+1 = 2\cos\frac{k\pi}{n} e^{ik\pi/n}$ et $u-1 = 2i\sin\frac{k\pi}{n} e^{ik\pi/n}$. Comme $\frac{k\pi}{n} \in]0, \pi[$, le sinus est non nul, et

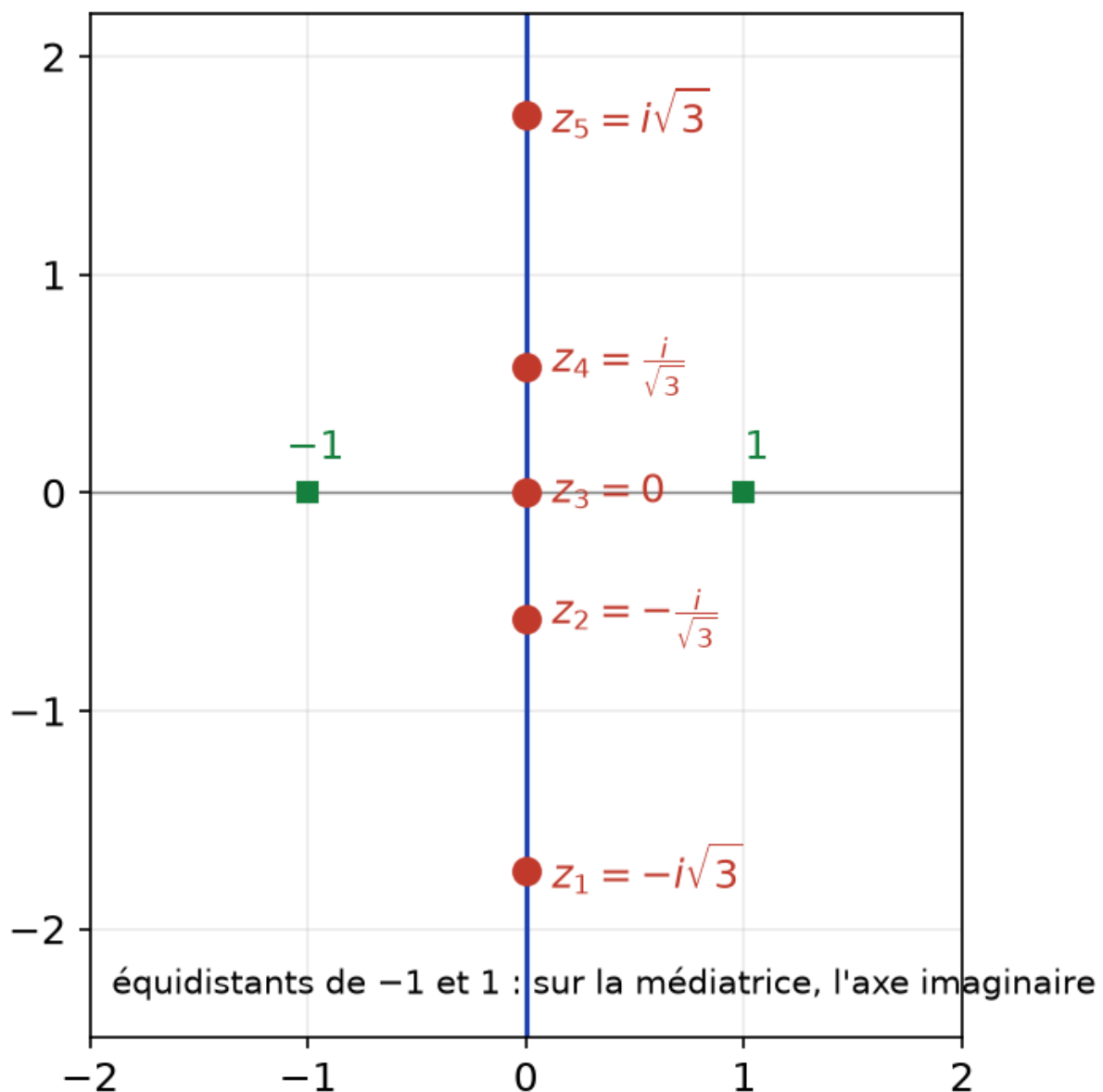
$$z_k = \frac{\cos(k\pi/n)}{i\sin(k\pi/n)} = -i \frac{\cos(k\pi/n)}{\sin(k\pi/n)}.$$

Enfin, la cotangente est strictement décroissante sur $]0, \pi[$, donc les z_k sont distincts.

L'équation a exactement $n-1$ solutions, les $z_k = -i\cot\frac{k\pi}{n}$, $1 \leq k \leq n-1$.

4. Si z est solution, on prend les modules : $|z+1|^n = |z-1|^n$, donc $|z+1| = |z-1|$. Le point d'affixe z est donc équidistant des points d'affixes -1 et 1 . Il est sur la médiatrice de ce segment, c'est-à-dire sur l'axe imaginaire. Pour $n=6$, on a $\cot\frac{\pi}{6} = \sqrt{3}$, $\cot\frac{\pi}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ et $\cot\frac{\pi}{2} = 0$. **Les solutions pour $n=6$ sont $-i\sqrt{3}$, $-\frac{i}{\sqrt{3}}$, 0 , $\frac{i}{\sqrt{3}}$ et $i\sqrt{3}$.**

La figure ci-dessous place les cinq solutions obtenues pour $n=6$. Elles sont toutes alignées sur l'axe imaginaire, médiatrice du segment joignant -1 et 1 .



Corrigé de l'exercice 18 : Une inégalité dans le disque unité

1. On développe les deux carrés avec $|u|^2 = u\bar{u}$. D'abord :

$$|1 - \bar{w}z|^2 = (1 - \bar{w}z)(1 - w\bar{z}) = 1 - \bar{w}z - w\bar{z} + |w|^2|z|^2.$$

Ensuite, $|z - w|^2 = |z|^2 - z\bar{w} - \bar{z}w + |w|^2$. Les termes croisés sont identiques et disparaissent dans la différence. Il reste $1 + |w|^2|z|^2 - |z|^2 - |w|^2$. **Donc la différence vaut**
 $(1 - |z|^2)(1 - |w|^2)$.

2. D'abord, $|\bar{w}z| = |w||z| < 1$, donc $\bar{w}z \neq 1$ et $1 - \bar{w}z \neq 0$. Ensuite, les deux facteurs $1 - |z|^2$ et $1 - |w|^2$ sont strictement positifs. D'après la question 1, $|z - w|^2 < |1 - \bar{w}z|^2$. On divise par $|1 - \bar{w}z|^2 > 0$, puis on prend la racine carrée. **Ainsi**, $\left| \frac{z - w}{1 - \bar{w}z} \right| < 1$.
3. Si $|z| = 1$ et $|w| < 1$, on a encore $|\bar{w}z| = |w| < 1$, donc le dénominateur est non nul. De plus, le produit de la question 1 est nul, car $1 - |z|^2 = 0$. Donc $|1 - \bar{w}z| = |z - w|$. **Le quotient est alors de module 1**.

Point de méthode : pour comparer deux modules, on compare leurs carrés, qu'on développe avec $|u|^2 = u\bar{u}$.

Corrigé de l'exercice 19 : Sommes binomiales trigonométriques

1. Par linéarité, $A_n + iB_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} e^{ikx}$. On reconnaît la formule du binôme appliquée à 1 et e^{ix} . **Donc** $A_n + iB_n = (1 + e^{ix})^n$.
2. L'angle moitié donne $1 + e^{ix} = 2\cos\frac{x}{2} e^{ix/2}$, pour tout réel x . Par conséquent, $(1 + e^{ix})^n = 2^n \cos^n\frac{x}{2} e^{inx/2}$. Le facteur $2^n \cos^n\frac{x}{2}$ est réel. On sépare donc parties réelle et imaginaire. **On obtient** $A_n = 2^n \cos^n\frac{x}{2} \cos\frac{nx}{2}$ et $B_n = 2^n \cos^n\frac{x}{2} \sin\frac{nx}{2}$.
3. Pour $x = \frac{\pi}{2}$, on a $\cos\frac{\pi}{4} = 2^{-1/2}$, donc $2^n \cos^n\frac{\pi}{4} = 2^{n/2}$. **Ainsi**, $A_n = 2^{n/2} \cos\frac{n\pi}{4}$ et $B_n = 2^{n/2} \sin\frac{n\pi}{4}$. Pour $n = 2$, la formule donne $A_2 = 2\cos\frac{\pi}{2} = 0$ et $B_2 = 2\sin\frac{\pi}{2} = 2$. Directement, $A_2 = 1 + 2\cos\frac{\pi}{2} + \cos\pi = 0$ et $B_2 = 0 + 2\sin\frac{\pi}{2} + \sin\pi = 2$. Les résultats concordent.

Corrigé de l'exercice 20 : Problème : le pentagone régulier

1. Le nombre ω vérifie $\omega^5 = 1$ et $\omega \neq 1$. Par la somme géométrique,

$1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 = \frac{1 - \omega^5}{1 - \omega}$. Cette somme est donc nulle.

2. Comme $|\omega| = 1$, on a $\omega^4 = \omega^{-1} = \bar{\omega}$ et $\omega^3 = \overline{\omega^2}$. Ainsi, $u = \omega + \bar{\omega} = 2\cos\frac{2\pi}{5}$ et $v = 2\cos\frac{4\pi}{5}$. Ensuite, d'après la question 1, $u + v = -1$. Enfin, on développe le produit en utilisant $\omega^5 = 1$:

$$uv = \omega^3 + \omega^4 + \omega^6 + \omega^7 = \omega^3 + \omega^4 + \omega + \omega^2 = -1.$$

Donc $u = 2\cos\frac{2\pi}{5}$, $v = 2\cos\frac{4\pi}{5}$, $u + v = -1$ **et** $uv = -1$.

3. Deux nombres de somme -1 et de produit -1 sont les solutions de $X^2 + X - 1 = 0$. Son discriminant vaut 5 , donc ses solutions sont $\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$ et $\frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$. Or $\frac{2\pi}{5} \in]0, \frac{\pi}{2}[$, donc $u > 0$. Par conséquent, $u = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$. **On en déduit** $\cos\frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}$.

4. On a $\cos\frac{\pi}{5} = -\cos\left(\pi - \frac{\pi}{5}\right) = -\cos\frac{4\pi}{5} = -\frac{v}{2}$. Or $v = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$. **Donc**
 $\cos\frac{\pi}{5} = \frac{1 + \sqrt{5}}{4}$.

5. On calcule le carré du module : $|1 - \omega|^2 = (1 - \omega)(1 - \bar{\omega}) = 2 - (\omega + \bar{\omega}) = 2 - 2\cos\frac{2\pi}{5}$.
 Ainsi, $\ell^2 = 2 - \frac{\sqrt{5} - 1}{2} = \frac{5 - \sqrt{5}}{2}$. **Le côté du pentagone vaut** $\ell = \sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{2}} \approx 1,176$.

Point de méthode : regrouper une racine de l'unité avec son conjuguée fait apparaître des cosinus ; les relations entre coefficients et racines donnent ensuite une équation du second degré.

Corrigé de l'exercice 21 : Problème : un produit de sinus

1. Dans la factorisation admise, le facteur d'indice $k = 0$ vaut $z - 1$. Ainsi,

$$z^n - 1 = (z - 1) \prod_{k=1}^{n-1} (z - \omega^k). \text{ Par ailleurs, la somme géométrique donne}$$

$$z^n - 1 = (z - 1) \sum_{k=0}^{n-1} z^k. \text{ Pour } z \neq 1, \text{ on simplifie par } z - 1 \neq 0, \text{ d'où l'égalité. Pour}$$

$z = 1$, les deux membres sont des fonctions polynomiales, donc continues. On prend

$$z = 1 + \frac{1}{m} \text{ et on fait tendre } m \text{ vers } +\infty. \text{ L'égalité } \prod_{k=1}^{n-1} (z - \omega^k) = \sum_{k=0}^{n-1} z^k \text{ vaut}$$

donc pour tout $z \in \mathbb{C}$.

2. On applique la question 1 en $z = 1$. Le membre de droite vaut $\sum_{k=0}^{n-1} 1 = n$. **Donc**

$$\prod_{k=1}^{n-1} (1 - \omega^k) = n.$$

3. On factorise par l'angle moitié :

$$1 - \omega^k = e^{ik\pi/n} (e^{-ik\pi/n} - e^{ik\pi/n}) = -2i \sin \frac{k\pi}{n} e^{ik\pi/n}.$$

Le module vaut donc $2 \left| \sin \frac{k\pi}{n} \right|$. Or $\frac{k\pi}{n} \in]0, \pi[$ pour $1 \leq k \leq n-1$, donc ce sinus est strictement positif. **Ainsi**, $|1 - \omega^k| = 2 \sin \frac{k\pi}{n}$.

4. On prend le module de l'égalité de la question 2. Par multiplicativité du module,

$\prod_{k=1}^{n-1} 2 \sin \frac{k\pi}{n} = n$, soit $2^{n-1} \prod_{k=1}^{n-1} \sin \frac{k\pi}{n} = n$. **Donc** $\prod_{k=1}^{n-1} \sin \frac{k\pi}{n} = \frac{n}{2^{n-1}}$. Pour $n = 3$, on a $\sin \frac{\pi}{3} \sin \frac{2\pi}{3} = \frac{3}{4}$, et la formule donne bien $\frac{3}{4}$. Pour $n = 4$, on a $\frac{\sqrt{2}}{2} \times 1 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2}$, et la formule donne $\frac{4}{8} = \frac{1}{2}$.

[Revenir aux énoncés des exercices](#)

Pour aller plus loin en L1

- Le cours : [nombres complexes, cours de maths en L1](#)
- Les énoncés : [exercices de maths en L1 sur nombres complexes](#)
- À maîtriser avant : [Logique, raisonnement et ensembles](#)
- Chapitre précédent : [Entiers naturels, récurrence et dénombrement](#)
- Chapitre suivant : [Nombres réels et borne supérieure](#)
- Le même thème en maths sup : [nombres complexes, exercices de maths sup](#)
- Tester vos connaissances : [QCM de maths en L1 par chapitre](#)

- Le sommaire : [tous les chapitres de maths de L1](#) et la [licence de maths de L1 à L3](#)