

Matrices et changement de base

Exercice 1 : Matrice d'une application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$

On considère l'application linéaire $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y, z) = (x + 2y - z, 3x - y + z)$.

1. Écrivez la matrice A de f dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et de $\mathbb{R}^2$.
2. Calculez $f(1, 1, 1)$ à l'aide d'un produit matriciel.
3. On pose $v_1 = (1, 0, 0)$, $v_2 = (1, 1, 0)$ et $v_3 = (1, 1, 1)$. Admettez que $\mathcal{B}' = (v_1, v_2, v_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Écrivez la matrice de f dans la base $\mathcal{B}'$ au départ et la base canonique à l'arrivée.
4. Déterminez le rang de A , puis une base du noyau de f .

Exercice 2 : Matrice de la dérivation

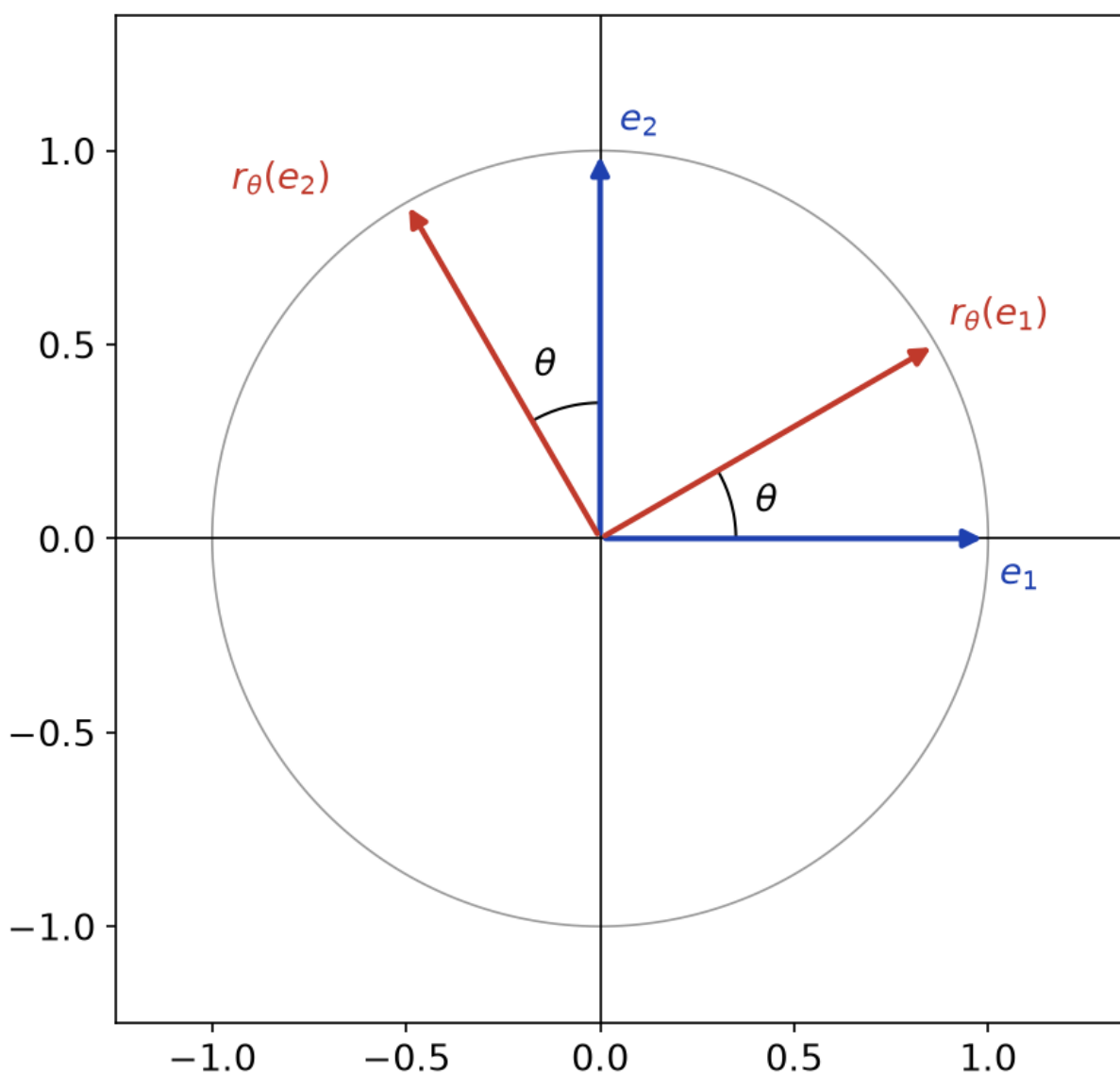
Soit D l'endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$ défini par $D(P) = P'$. On note $\mathcal{B} = (1, X, X^2, X^3)$ la base canonique.

1. Écrivez la matrice M de D dans la base $\mathcal{B}$.
2. Calculez M^2 , M^3 et M^4 . Interprétez le résultat en termes de dérivées successives.
3. Donnez le rang et la trace de M .
4. On considère maintenant $\Delta: \mathbb{R}_3[X] \rightarrow \mathbb{R}_2[X]$, $P \rightarrow P'$. Écrivez sa matrice dans les bases

canoniques. Quelle est sa taille ?

Exercice 3 : Rotations du plan et formules d'addition

Pour $\theta \in \mathbb{R}$, on note r_θ la rotation vectorielle d'angle θ du plan $\mathbb{R}^2$, et (e_1, e_2) la base canonique. La figure ci-dessous représente les images des deux vecteurs de base.

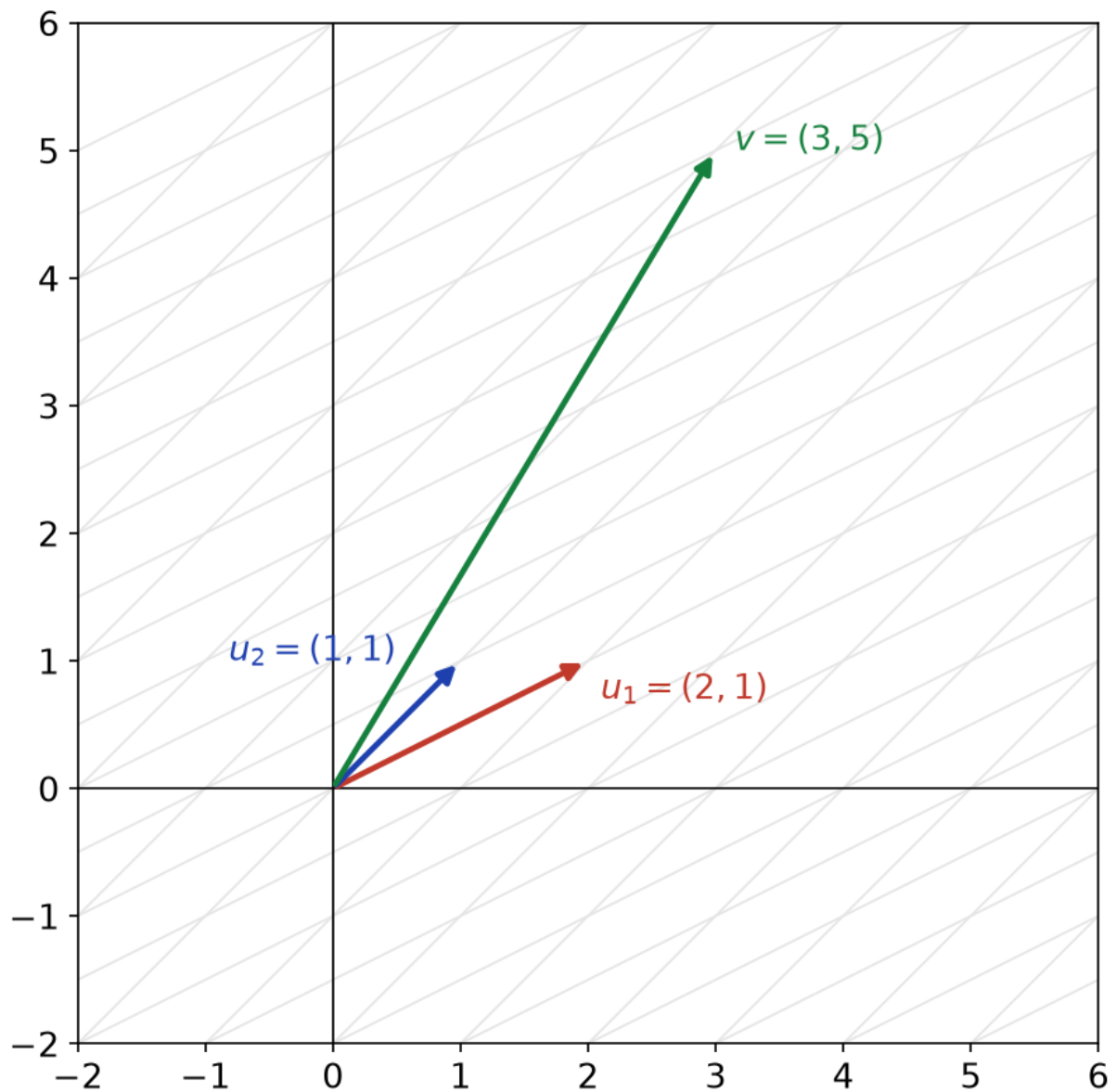


1. Donnez les coordonnées de $r_\theta(e_1)$ et de $r_\theta(e_2)$. Déduisez-en la matrice R_θ de r_θ .

2. Calculez le produit $R_\theta R_\varphi$. Sachant que $r_\theta \circ r_\varphi = r_{\theta+\varphi}$, retrouvez les formules donnant $\cos(\theta+\varphi)$ et $\sin(\theta+\varphi)$.
3. Justifiez que R_θ est inversible et donnez son inverse.
4. Calculez la trace de R_θ . Pour quelles valeurs de θ la rotation r_θ est-elle une symétrie ?

Exercice 4 : Coordonnées dans une nouvelle base du plan

Dans $\mathbb{R}^2$ muni de sa base canonique $\mathcal{B}$, on pose $u_1 = (2, 1)$ et $u_2 = (1, 1)$. La figure ci-dessous représente ces vecteurs et le vecteur $v = (3, 5)$.



1. Montrez que $\mathcal{B}' = (u_1, u_2)$ est une base de $\mathbb{R}^2$. Écrivez la matrice de passage P de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.
2. Calculez P^{-1} .
3. Déterminez les coordonnées de v dans $\mathcal{B}'$. Vérifiez le résultat.
4. Un vecteur w a pour coordonnées $(1, -1)$ dans $\mathcal{B}'$. Quelles sont ses coordonnées dans $\mathcal{B}$?

Exercice 5 : Calcul de rangs

Déterminez le rang de chacune des matrices suivantes par la méthode du pivot.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 7 & 5 & 8 \\ 8 & 9 & 9 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \\ 3 & 3 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}.$$

1. Calculez $\text{rg}(A)$, $\text{rg}(B)$, $\text{rg}(C)$ et $\text{rg}(E)$.
2. Sans calcul, donnez le rang de B^T et de E^T .
3. Parmi A et C , laquelle est inversible ?

Exercice 6 : Trace et produit de matrices

1. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Calculez AB , BA , puis leurs traces. Comparez aussi avec $\text{tr}(A)\text{tr}(B)$.
2. On note E_{11} , E_{12} , E_{21} les matrices élémentaires de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Calculez $\text{tr}(E_{11}E_{12}E_{21})$ et $\text{tr}(E_{11}E_{21}E_{12})$. Qu'en concluez-vous ?
3. Montrez qu'il n'existe pas de matrices $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $AB - BA = I_n$.

Exercice 7 : Changement de bases pour une application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$

On reprend $f(x, y, z) = (x + 2y - z, 3x - y + z)$, de matrice A dans les bases canoniques. On considère la base $\mathcal{B}' = (v_1, v_2, v_3)$ de $\mathbb{R}^3$, avec $v_1 = (1, 0, 0)$, $v_2 = (1, 1, 0)$, $v_3 = (1, 1, 1)$, et la base $\mathcal{C}' = (w_1, w_2)$ de $\mathbb{R}^2$, avec $w_1 = (1, 1)$ et $w_2 = (0, 1)$.

1. Écrivez les matrices de passage P (dans $\mathbb{R}^3$) et Q (dans $\mathbb{R}^2$).
2. Calculez Q^{-1} .
3. Déduisez-en la matrice A' de f dans les bases $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{C}'$.
4. Vérifiez la deuxième colonne de A' en calculant directement $f(v_2)$.

Exercice 8 : Endomorphisme du plan et puissances

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ de matrice $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ dans la base canonique. On pose $u_1 = (1, 1)$ et $u_2 = (2, 1)$.

1. Calculez $f(u_1)$ et $f(u_2)$. Montrez que $\mathcal{B}' = (u_1, u_2)$ est une base et donnez la matrice D de f dans $\mathcal{B}'$.
2. Écrivez la matrice de passage P et calculez P^{-1} . Vérifiez que $P^{-1}AP = D$.
3. Calculez A^n pour tout entier $n \geq 0$.
4. On définit deux suites par $x_0 = 1$, $y_0 = 0$ et, pour tout n , $x_{n+1} = 4x_n - 2y_n$, $y_{n+1} = x_n + y_n$. Exprimez x_n et y_n en fonction de n .

Exercice 9 : Composée de la multiplication par X et de la dérivation

On considère $f: \mathbb{R}_2[X] \rightarrow \mathbb{R}_3[X]$, $P \rightarrow XP$, et $g: \mathbb{R}_3[X] \rightarrow \mathbb{R}_2[X]$, $P \rightarrow P'$. Les espaces sont munis de leurs bases canoniques.

1. Écrivez les matrices F de f et G de g . Précisez leurs tailles.
2. Calculez GF et FG .
3. Retrouvez ces résultats en calculant directement $g \circ f$ et $f \circ g$.

4. Comparez $\text{tr}(GF)$ et $\text{tr}(FG)$. L'application $g \circ f$ est-elle bijective ? Et $f \circ g$?

Exercice 10 : Translation des polynômes et matrice inverse

Soit τ l'endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ défini par $\tau(P) = P(X+1)$. On note T sa matrice dans la base $(1, X, X^2)$.

1. Écrivez la matrice T .
2. Justifiez que τ est un automorphisme et donnez sa réciproque. Déduisez-en T^{-1} sans calcul d'inverse, puis vérifiez que $TT^{-1} = I_3$.
3. Pour $n \in \mathbb{N}$, identifiez l'endomorphisme τ^n et déduisez-en T^n .
4. Donnez la trace et le rang de T .

Exercice 11 : Interpolation et matrice de Vandermonde

Soit $\varphi: \mathbb{R}_2[X] \rightarrow \mathbb{R}^3$, $P \rightarrow (P(0), P(1), P(2))$.

1. Montrez que φ est linéaire et écrivez sa matrice V dans les bases canoniques.
2. Calculez V^{-1} . Déduisez-en que φ est un isomorphisme.
3. Déterminez l'unique $P \in \mathbb{R}_2[X]$ tel que $P(0) = 1$, $P(1) = 0$ et $P(2) = 3$.
4. Interprétez les colonnes de V^{-1} comme des polynômes L_0, L_1, L_2 . Que valent $L_i(j)$ pour $i, j \in \{0, 1, 2\}$?

Exercice 12 : Rang selon un paramètre

Pour $m \in \mathbb{R}$, on pose $A_m = \begin{pmatrix} 1 & 1 & m \\ m & m\mu & 1 \\ m & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Calculez le déterminant de A_m et factorisez-le.
2. Déduisez-en le rang de A_m selon les valeurs de m .
3. Pour $m = 1$ puis pour $m = -2$, déterminez le noyau de l'endomorphisme canoniquement associé à A_m , et vérifiez le théorème du rang.

Exercice 13 : Dimension d'espaces d'applications linéaires

Soit u un vecteur non nul de $\mathbb{R}^3$ et $D = \text{Vect}(u)$ une droite de $\mathbb{R}^3$.

1. Quelle est la dimension de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$? Décrivez une base de cet espace.
2. Soit $\mathcal{F} = \{f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3) ; f(u) = 0\}$. Montrez que $\mathcal{F}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ de dimension 6. On utilisera une base de $\mathbb{R}^3$ dont le premier vecteur est u .
3. Soit $\mathcal{G} = \{f \in \mathcal{L}(\mathbb{R} : \text{Im } f \subset D)\}$. Montrez que $\dim \mathcal{G} = 3$.
4. Déterminez $\dim(\mathcal{F} \cap \mathcal{G})$, puis $\dim(\mathcal{F} + \mathcal{G})$.

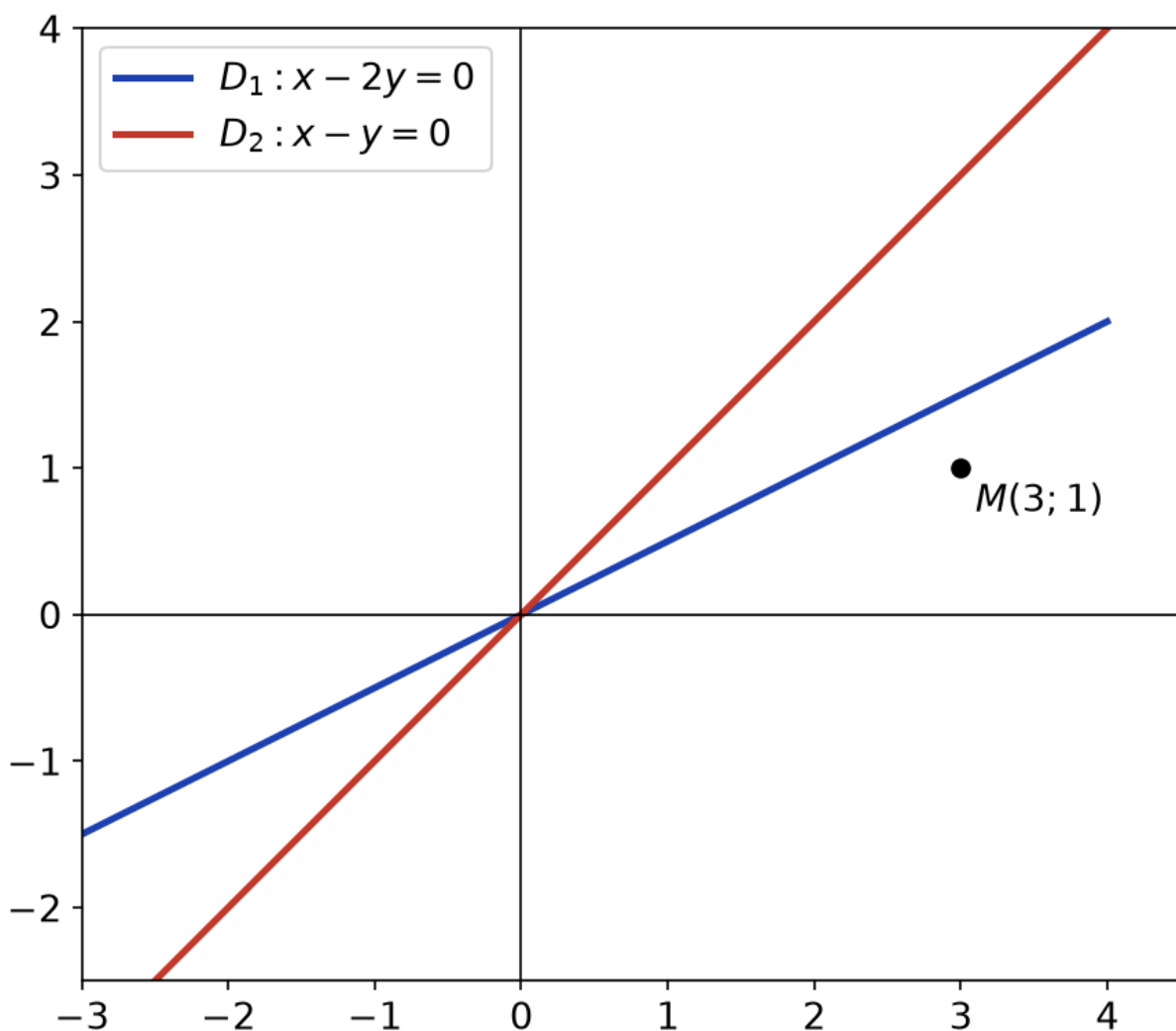
Exercice 14 : Inverse à gauche et inverse à droite

Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $AB = I_n$. On note a et b les endomorphismes de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associés à A et B .

1. Montrez que b est injectif.
2. Dédisez-en que b est un automorphisme, puis que $BA = I_n$.
3. On prend $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{1,2}(\mathbb{R})$ et $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$. Calculez AB et BA .
Pourquoi le raisonnement précédent ne s'applique-t-il pas ?

Exercice 15 : Reconnaître un projecteur et une symétrie du plan

Soit $\mathcal{P}$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ de matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ dans la base canonique. La figure ci-dessous représente les droites D_1 et D_2 ainsi que le point $M(3;1)$.



1. Calculez A^2 . Que peut-on en déduire pour p ?
2. Montrez que $\text{Im } p = D_1$ et $\ker p = D_2$.
3. Écrivez la matrice de p dans la base $((2, 1), (1, 1))$. Comparez sa trace et son rang.
4. Calculez $p(M)$ et décomposez M selon $D_1 \oplus D_2$.
5. Soit $S = 2A - I_2$. Vérifiez que $S^2 = I_2$, décrivez la symétrie s associée et calculez $s(M)$.

Exercice 16 : Projection sur un plan de $\mathbb{R}^3$

Dans $\mathbb{R}^3$, on considère le plan Π d'équation $x + y - z = 0$ et la droite $D = \text{Vect}(0, 0, 1)$.

1. Montrez que $\mathbb{R}^3 = \Pi \oplus D$.
2. Soit p la projection sur Π parallèlement à D . Calculez $p(x, y, z)$ et écrivez la matrice A de p dans la base canonique.
3. Vérifiez que $A^2 = A$, et calculez $\text{tr}(A)$.
4. Donnez une base $\mathcal{B}'$ adaptée à la décomposition $\Pi \oplus D$, la matrice de passage P , et la matrice de p dans $\mathcal{B}'$.
5. Écrivez la matrice S de la symétrie par rapport à Π parallèlement à D , et vérifiez que $S^2 = I_3$.

Exercice 17 : Matrice équivalente à J_1

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & -4 \end{pmatrix}$ et f l'application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ canoniquement associée.

1. Déterminez le rang de A et une base du noyau de f .
2. Construisez une base $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{R}^3$ et une base $\mathcal{C}'$ de $\mathbb{R}^2$ dans lesquelles la matrice de f est $J_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
3. Écrivez les matrices de passage P et Q , puis vérifiez que $Q^{-1}AP = J_1$.

Exercice 18 : Transposition dans les matrices carrées d'ordre 2

Soit t l'endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ défini par $t(M) = M^T$. On note $\mathcal{B} = (E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$ la base canonique.

1. Écrivez la matrice T de t dans $\mathcal{B}$, et calculez T^2 .
2. Déduisez-en que t est une symétrie. Par rapport à quel sous-espace, et parallèlement à quel sous-espace ?
3. Donnez une base adaptée et la matrice de t dans cette base.
4. Calculez la trace de t de deux façons.

Exercice 19 : Matrices semblables ou non

1. Montrez que la seule matrice semblable à I_n est I_n . Déduisez-en que $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ n'est pas semblable à I_2 , bien qu'elles aient même trace, même rang et même déterminant.
2. Montrez que $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ sont semblables, en interprétant un échange des vecteurs de base.
3. Montrez que $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ sont équivalentes mais pas semblables.
4. Montrez que $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ est semblable à $\text{diag}(1, 3)$, en donnant une matrice de passage.

5. Montrez que si A et B sont semblables, alors A^2 et B^2 le sont aussi. Soit $N \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ la matrice dont les seuls coefficients non nuls sont $n_{12} = n_{23} = 1$, et N' celle dont les seuls coefficients non nuls sont $n'_{12} = n'_{34} = 1$. Montrez que N et N' ont même rang et même trace, mais ne sont pas semblables.

Exercice 20 : Matrices de rang 1

Dans cet exercice, n et p sont des entiers non nuls.

1. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$. Montrez que $\text{rg}(AB) \leq \text{rg}(A)$ et $\text{rg}(AB) \leq \text{rg}(B)$.
2. Montrez que $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est de rang 1 si et seulement s'il existe des colonnes non nulles $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et $Y \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ telles que $A = XY^T$.
3. On suppose $n = p$ et $A = XY^T$ de rang 1. Montrez que $A^2 = \text{tr}(A) A$.
4. Dédisez-en que si $\text{tr}(A) \neq 0$, la matrice $\frac{1}{\text{tr}(A)} A$ est celle d'un projecteur, et que si $\text{tr}(A) = 0$, alors $A^2 = 0$.
5. Appliquez ces résultats à $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ et à $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Exercice 21 : Endomorphismes de carré nul en dimension 3

Soit E un espace vectoriel de dimension 3 et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f \neq 0$ et $f \circ f = 0$.

1. Montrez que $\text{Im } f \subset \ker f$, puis que $\text{rg}(f) = 1$.
2. Soit e_3 un vecteur tel que $f(e_3) \neq 0$, et $e_1 = f(e_3)$. Justifiez que l'on peut compléter e_1 en une base (e_1, e_2) de $\ker f$.
3. Montrez que (e_1, e_2, e_3) est une base de E et écrivez la matrice de f dans cette base.

4. Déduisez-en que toutes les matrices non nulles $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ vérifiant $A^2 = 0$ sont semblables entre elles.
5. Application : soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Vérifiez que $A^2 = 0$ et donnez explicitement une matrice P inversible telle que $P^{-1}AP = E_{13}$.

Exercice 22 : Matrices semblables seulement à elles-mêmes

Soit $n \geq 2$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $P^{-1}AP = A$ pour toute $P \in GL_n(\mathbb{K})$.

- Interprétez cette hypothèse en termes d'endomorphisme et de changement de base.
- Soit $i \neq j$. Montrez que $P = I_n + E_{ij}$ est inversible et que $AE_{ij} = E_{ij}A$.
- En calculant les coefficients de AE_{ij} et de $E_{ij}A$, montrez que $A = \lambda I_n$ pour un certain $\lambda \in \mathbb{K}$.
- Réciproquement, vérifiez que les matrices λI_n conviennent. Concluez : quels sont les endomorphismes qui ont la même matrice dans toutes les bases ?

Exercice 23 : Problème : puissances d'une matrice et suites couplées

On pose $J \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ la matrice dont tous les coefficients valent 1, et $A = J - I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A .

- Déterminez le rang de $A + I_3$ et celui de $A - 2I_3$.
- Déterminez $\ker(A + I_3)$ et $\ker(A - 2I_3)$. Montrez que $\mathbb{R}^3 = \ker(A + I_3) \oplus \ker(A - 2I_3)$.
- On pose $u_1 = (1, -1, 0)$, $u_2 = (0, 1, -1)$ et $u_3 = (1, 1, 1)$. Montrez que $\mathcal{B}' = (u_1, u_2, u_3)$

est une base, écrivez la matrice de passage P et calculez P^{-1} .

4. Calculez la matrice D de f dans $\mathcal{B}'$. Vérifiez la cohérence des traces de A et de D .

5. Soit q la projection sur $\ker(A-2I_3)$ parallèlement à $\ker(A+I_3)$. Montrez que sa matrice canonique est $\frac{1}{3}J$, puis que $A = 3 \cdot \frac{1}{3}J - I_3$. Déduisez-en A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

6. On définit trois suites par $a_0 = 1$, $b_0 = c_0 = 0$ et, pour tout n , $a_{n+1} = b_n + c_n$, $b_{n+1} = a_n + c_n$, $c_{n+1} = a_n + b_n$. Exprimez a_n , b_n et c_n en fonction de n .

Le corrigé des exercices

Chaque exercice est corrigé en détail, question par question, sur la page suivante.



Pour aller plus loin en L1

- Le cours : [matrices et changement de base, cours de maths en L1](#)
- Les solutions : [corrigé des exercices sur matrices et changement de base](#)
- À maîtriser avant : [Applications linéaires](#), [Systèmes linéaires et calcul matriciel](#)
- Chapitre précédent : [Applications linéaires](#)
- Chapitre suivant : [Déterminants](#)
- Le sommaire : [tous les chapitres de maths de L1](#) et la [licence de maths de L1 à L3](#)