

Matrices et changement de base

Corrigé de l'exercice 1 : Matrice d'une application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$

- On calcule les images des vecteurs de la base canonique : $f(e_1) = (1, 3)$, $f(e_2) = (2, -1)$ et $f(e_3) = (-1, 1)$. On les range en colonnes : $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, matrice à 2 lignes et 3 colonnes.
- La colonne des coordonnées de $(1, 1, 1)$ est $X = (1, 1, 1)^T$. Ainsi $AX = (1+2-1, 3-1+1)^T$. On obtient $f(1, 1, 1) = (2, 3)$.
- On calcule $f(v_1) = (1, 3)$, $f(v_2) = f(1, 1, 0) = (3, 2)$ et $f(v_3) = f(1, 1, 1) = (2, 3)$. Les coordonnées dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ sont les composantes elles-mêmes. **La matrice cherchée est** $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.
- Les deux lignes de A ne sont pas proportionnelles, donc $\text{rg}(A) = 2$. Par le théorème du rang, $\dim \ker f = 3 - 2 = 1$. On résout le système $x + 2y - z = 0$, $3x - y + z = 0$. En ajoutant les deux équations, on obtient $4x + y = 0$, donc $y = -4x$. Ensuite, $z = x + 2y = -7x$. On vérifie la deuxième équation : $3x + 4x - 7x = 0$. **Donc** $\ker f = \text{Vect}((1, -4, -7))$.

Point de méthode : les images des vecteurs de la base de départ se rangent toujours en colonnes ; le nombre de colonnes est la dimension de l'espace de départ.

Corrigé de l'exercice 2 : Matrice de la dérivation

- On a $D(1) = 0$, $D(X) = 1$, $D(X^2) = 2X$ et $D(X^3) = 3X^2$. En rangeant les

coordonnées en colonnes :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & , & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Les seuls coefficients non nuls sont 1, 2, 3 juste au-dessus de la diagonale.

2. D'après le théorème de composition, M^2 est la matrice de $D \circ D$, c'est-à-dire de la dérivée seconde. Or $D^2(X^2) = 2$ et $D^2(X^3) = 6X$, les autres images étant nulles. De même, $D^3(X^3) = 6$. Donc M^2 a pour seuls coefficients non nuls $m_{13} = 2$ et $m_{24} = 6$; ensuite M^3 a pour seul coefficient non nul le coefficient $(1, 4)$, égal à 6. Enfin, la dérivée quatrième d'un polynôme de degré au plus 3 est nulle. **Donc** $M^4 = 0$.
3. L'image de D est $\mathbb{R}_2[X]$, de dimension 3. Par conséquent, $\text{rg}(M) = 3$ et $\text{tr}(M) = 0$, car la diagonale est nulle.
4. L'espace de départ est de dimension 4 et l'espace d'arrivée de dimension 3. La matrice a donc 3 lignes et 4 colonnes. Avec les mêmes images, $\text{Mat}(\Delta) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & , & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Ainsi, une même formule donne des matrices différentes selon les espaces choisis.

Corrigé de l'exercice 3 : Rotations du plan et formules d'addition

1. Le vecteur e_1 est unitaire, d'angle polaire 0. Son image est donc le vecteur unitaire d'angle θ , soit $(\cos\theta, \sin\theta)$. De même, e_2 a pour angle $\frac{\pi}{2}$, donc $r_\theta(e_2) = (\cos(\theta + \frac{\pi}{2}), \sin(\theta + \frac{\pi}{2})) = (-\sin\theta, \cos\theta)$. **Ainsi** $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.
2. Le produit vaut :

$$R_\theta R_\varphi = \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\varphi - \sin\theta\sin\varphi & -\cos\theta\sin\varphi - \sin\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\cos\varphi + \cos\theta\sin\varphi & \cos\theta\cos\varphi - \sin\theta\sin\varphi \end{pmatrix}.$$

Par le théorème de composition, ce produit est la matrice de $r_\theta \circ r_\varphi = r_{\theta+\varphi}$, c'est-à-dire $R_{\theta+\varphi}$. En identifiant la première colonne, $\cos(\theta+\varphi) = \cos\theta\cos\varphi - \sin\theta\sin\varphi$ et $\sin(\theta+\varphi) = \sin\theta\cos\varphi + \cos\theta\sin\varphi$.

3. D'après la question précédente, $R_\theta R_{-\theta} = R_0 = I_2$, et de même $R_{-\theta} R_\theta = I_2$. **Donc R_θ est inversible et $R_\theta^{-1} = R_{-\theta}$.**
4. On lit $\text{tr}(R_\theta) = 2\cos\theta$. Ensuite, r_θ est une symétrie si et seulement si $r_\theta \circ r_\theta = \text{id}$, soit $R_{2\theta} = I_2$. Cela équivaut à $\cos 2\theta = 1$ et $\sin 2\theta = 0$, donc à $\theta \equiv 0 \pmod{\pi}$. **Les seules rotations qui sont des symétries sont id et $-\text{id}$ (symétrie centrale).** Leurs traces, 2 et -2 , sont bien de la forme $2r - n$ avec $r = 2$ et $r = 0$.

Corrigé de l'exercice 4 : Coordonnées dans une nouvelle base du plan

1. Le déterminant de la famille vaut $2 \times 1 - 1 \times 1 = 1 \neq 0$. La famille (u_1, u_2) est donc libre ; comme elle a deux vecteurs en dimension 2, c'est une base. Les colonnes de P sont les coordonnées de u_1 et de u_2 dans $\mathcal{B}$. **Ainsi $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.**
2. Pour une matrice 2×2 de déterminant 1, on échange les coefficients diagonaux et on change le signe des autres. **Donc $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.** On vérifie que $PP^{-1} = I_2$.
3. D'après la formule $X' = P^{-1}X$, on obtient $X' = (3-5, -3+10)^T = (-2, 7)^T$. Vérifions : $-2u_1 + 7u_2 = (-4+7, -2+7) = (3, 5)$. **Les coordonnées de v dans $\mathcal{B}'$ sont $(-2, 7)$.**
4. Cette fois, on applique $X = PX'$ avec $X' = (1, -1)^T$. On obtient $X = (2-1, 1-1)^T$. **Donc $w = (1, 0) = e_1$, ce qui se lit aussi sur $u_1 - u_2 = (1, 0)$.**

Point de méthode : P transforme les nouvelles coordonnées en anciennes ; pour aller dans l'autre sens, il faut P^{-1} .

Corrigé de l'exercice 5 : Calcul de rangs

1. Pour A , les opérations $L_2 \leftarrow L_2 - 4L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - 7L_1$ donnent $(0, -3, -6)$ et

$(0, -6, -12)$. Ensuite, $L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2$ annule la troisième ligne. Il reste deux pivots : $\text{rg}(A) = 2$. Pour B , on remarque que $L_3 = L_1 + L_2$, et que L_1, L_2 ne sont pas proportionnelles : $\text{rg}(B) = 2$. Pour C , les opérations $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$ donnent $(0, -3, -1)$ et $(0, -1, 1)$. Puis $L_3 \leftarrow 3L_3 - L_2$ donne $(0, 0, 4)$. Il y a trois pivots : $\text{rg}(C) = 3$. Enfin, la deuxième colonne de E est l'opposée de la première, qui est non nulle : $\text{rg}(E) = 1$. **Bilan :** $\text{rg}(A) = 2$, $\text{rg}(B) = 2$, $\text{rg}(C) = 3$, $\text{rg}(E) = 1$.

- Le rang est invariant par transposition. **Donc** $\text{rg}(B^T) = 2$ **et** $\text{rg}(E^T) = 1$.
- Une matrice carrée d'ordre 3 est inversible si et seulement si son rang vaut 3. **Ainsi** C **est inversible, alors que** A **ne l'est pas.**

Corrigé de l'exercice 6 : Trace et produit de matrices

- On calcule :

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}, \quad BA = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}.$$

Les deux produits sont différents, mais $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA) = 9$. En revanche, $\text{tr}(A) \text{tr}(B) = 5 \times 1 = 5 \neq 9$: la trace n'est pas multiplicative.

- D'abord, $E_{11}E_{12} = E_{12}$ puis $E_{12}E_{21} = E_{11}$, de trace 1. Ensuite, $E_{11}E_{21} = 0$, donc le second produit est nul. **On trouve 1 et 0.** Par conséquent, on ne peut pas permuter les facteurs d'un produit de trois matrices n'importe comment sous la trace ; seules les permutations circulaires sont permises.
- Supposons $AB - BA = I_n$. Par linéarité de la trace et par la propriété $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$, le membre de gauche a une trace nulle. Or $\text{tr}(I_n) = n \geq 1$. **C'est une contradiction : de telles matrices n'existent pas.**

Corrigé de l'exercice 7 : Changement de bases pour une application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$

1. On range en colonnes les nouveaux vecteurs exprimés dans les bases canoniques.

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. La matrice Q a pour déterminant 1. **Donc** $Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

3. D'après la formule de changement de base, $A' = Q^{-1}AP$. D'abord, les colonnes de AP sont $f(v_1)$, $f(v_2)$, $f(v_3)$, déjà calculées à l'exercice 1 :

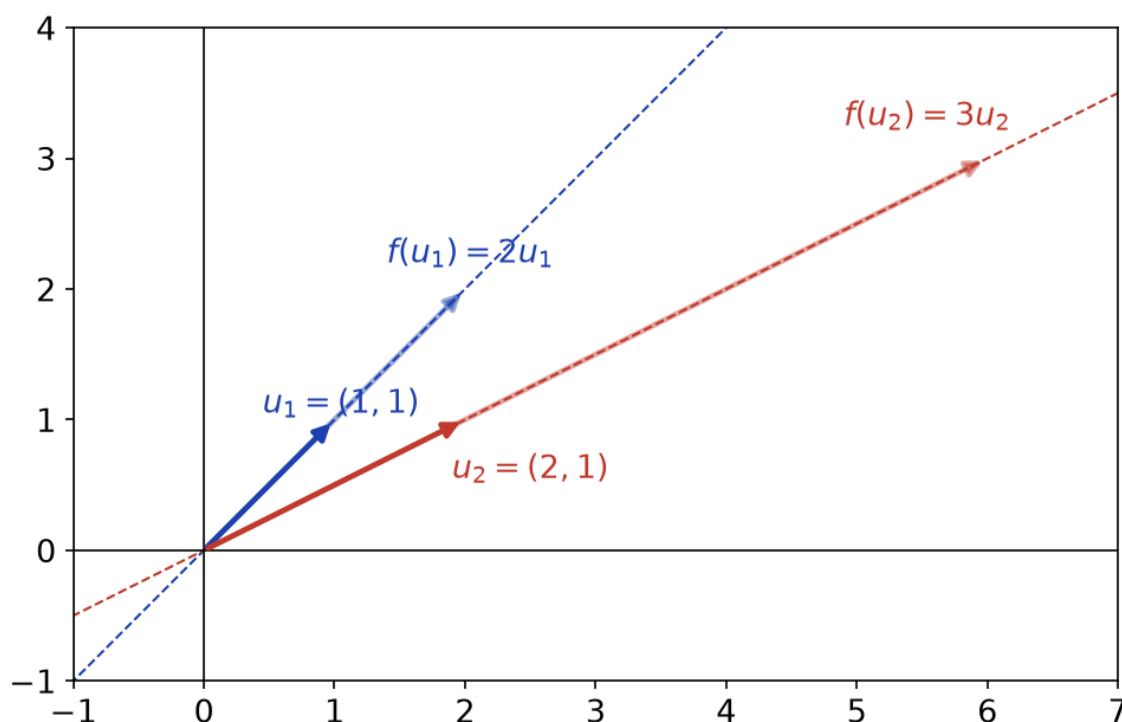
$$AP = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad Q^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

En effet, multiplier à gauche par Q^{-1} conserve la première ligne et remplace la seconde par $L_2 - L_1$. **Donc** $A' = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

4. On a $f(v_2) = (3, 2)$. Or $3w_1 - w_2 = (3, 3) - (0, 1) = (3, 2)$. **Les coordonnées de $f(v_2)$ dans $\mathcal{C}'$ sont bien $(3, -1)$** , ce qui est la deuxième colonne de A' .

Corrigé de l'exercice 8 : Endomorphisme du plan et puissances

1. On calcule $A(1, 1)^T = (4-2, 1+1)^T = (2, 2)^T$, donc $f(u_1) = 2u_1$. De même, $A(2, 1)^T = (8-2, 2+1)^T = (6, 3)^T$, donc $f(u_2) = 3u_2$. Le déterminant de (u_1, u_2) vaut $1 \times 1 - 2 \times 1 = -1 \neq 0$: c'est une base. **Dans cette base**, $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$. La figure ci-dessous montre que f dilate chacune des deux directions propres.



2. On a $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, de déterminant -1 . Donc $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Ensuite, $AP = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, et un dernier produit donne :

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -2+4 & -6+6 \\ 2-2 & 6-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

On retrouve bien $P^{-1}AP = D$.

3. De $A = PDP^{-1}$, on tire $A^n = PD^nP^{-1}$, car les facteurs intermédiaires $P^{-1}P$ se simplifient. Or $PD^n = \begin{pmatrix} 2 \cdot 3^n & 2 \cdot 3^n \\ 2 \cdot 3^n & 3^n \end{pmatrix}$. En multipliant à droite par P^{-1} :

$$A^n = \begin{pmatrix} 2 \cdot 3^n - 2^n & 2^{n+1} - 2 \cdot 3^n \\ 3^n - 2^n & 2^{n+1} - 3^n \end{pmatrix}.$$

Pour $n=1$, **on retrouve bien** A . Pour $n=2$, on obtient $\begin{pmatrix} 14 & -10 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$, ce qui coïncide avec le calcul direct de A^2 .

4. En posant $Z_n = (x_n, y_n)^T$, les relations s'écrivent $Z_{n+1} = AZ_n$. Par récurrence, $Z_n = A^n Z_0$, avec $Z_0 = (1, 0)^T$. C'est la première colonne de A^n . **Donc**
 $x_n = 2 \cdot 3^n - 2^n$ **et** $y_n = 3^n - 2^n$. Par exemple, $x_1 = 4$ et $y_1 = 1$, comme le donne la définition.

Corrigé de l'exercice 9 : Composée de la multiplication par X et de la dérivation

1. On a $f(1) = X$, $f(X) = X^2$, $f(X^2) = X^3$. De plus, $g(1) = 0$, $g(X) = 1$, $g(X^2) = 2X$, $g(X^3) = 3X^2$. Par conséquent :

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

F est de taille 4×3 et G de taille 3×4 .

2. Le produit GF est carré d'ordre 3, et FG est carré d'ordre 4. Les calculs donnent $GF = \text{diag}(1, 2, 3)$ et $FG = \text{diag}(0, 1, 2, 3)$.
3. Pour $P \in \mathbb{R}_2[X]$, on a $(g \circ f)(P) = (XP)' = P + XP'$. Ainsi $X^k \rightarrow (k+1)X^k$, d'où $\text{diag}(1, 2, 3)$. Pour $P \in \mathbb{R}_3[X]$, on a $(f \circ g)(P) = XP'$, donc $X^k \rightarrow kX^k$, d'où $\text{diag}(0, 1, 2, 3)$. **Les deux méthodes concordent**, comme le prévoit le théorème de composition.
4. On trouve $\text{tr}(GF) = 6 = \text{tr}(FG)$, conformément à la propriété $\text{tr}(GF) = \text{tr}(FG)$, valable même pour des matrices rectangulaires. Ensuite, GF est diagonale à coefficients non nuls, donc inversible. **Ainsi $g \circ f$ est bijective, alors que $f \circ g$ ne l'est pas**, puisque FG a un zéro sur la diagonale et est de rang 3 (les constantes sont dans son noyau).

Corrigé de l'exercice 10 : Translation des polynômes et matrice inverse

1. On a $\tau(1) = 1$, $\tau(X) = 1 + X$ et $\tau(X^2) = (X+1)^2 = 1 + 2X + X^2$. Donc
- $$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Soit $\sigma(P) = P(X-1)$. Alors $\sigma(\tau(P)) = P(X-1+1) = P$, et de même $\tau(\sigma(P)) = P$.

Ainsi τ est bijective, de réciproque σ . La matrice de σ s'obtient comme celle de τ :

$\sigma(X) = X-1$ et $\sigma(X^2) = 1-2X+X^2$. Par le théorème sur les isomorphismes,

$T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. On vérifie par exemple la troisième colonne de TT^{-1} :

$$(1-2+1, -2+2, 1) = (0, 0, 1).$$

3. Par une récurrence immédiate, $\tau^n(P) = P(X+n)$. Or $(X+n)^2 = n^2 + 2nX + X^2$. **Donc**

$$T^n = \begin{pmatrix} 1 & n & n^2 \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. On lit $\text{tr}(T) = 3$. Comme T est inversible, $\text{rg}(T) = 3$.

Point de méthode : quand la réciproque d'un isomorphisme est connue explicitement, sa matrice donne l'inverse sans aucun pivot.

Corrigé de l'exercice 11 : Interpolation et matrice de Vandermonde

1. L'évaluation en un point est linéaire : $(\lambda P + Q)(a) = \lambda P(a) + Q(a)$. Donc φ est linéaire. On

calcule $\varphi(1) = (1, 1, 1)$, $\varphi(X) = (0, 1, 2)$, $\varphi(X^2) = (0, 1, 4)$. **Ainsi** $V = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.

2. On résout $VX = Y$ pour $Y = (y_0, y_1, y_2)^T$. La première équation donne $a = y_0$. Les deux autres donnent $b+c = y_1 - y_0$ et $2b+4c = y_2 - y_0$. On en tire $2c = y_2 - 2y_1 + y_0$, puis $b = y_1 - y_0 - c$. Finalement :

$$V^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{2} & 2 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

On vérifie que $VV^{-1} = I_3$. Par exemple, la ligne $(1, 2, 4)$ de V fois la première colonne donne $1-3+2=0$. **La matrice V est inversible, donc φ est un isomorphisme.**

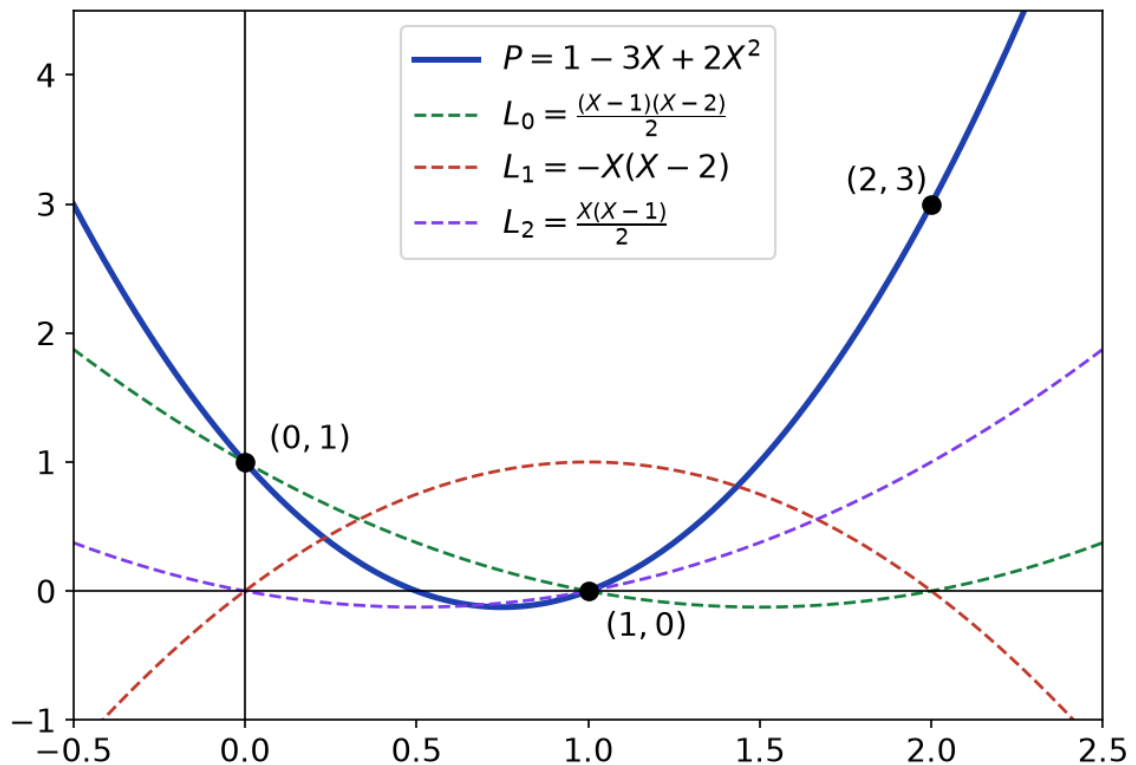
3. Les coefficients de P sont $V^{-1}(1, 0, 3)^T$. On obtient $a=1$, $b=-\frac{3}{2}-\frac{3}{2}=-3$ et

$c = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 2$. **Donc** $P = 1 - 3X + 2X^2$. On vérifie : $P(1) = 0$ et $P(2) = 1 - 6 + 8 = 3$.

4. La colonne i de V^{-1} donne les coefficients de $L_i = \varphi^{-1}(e_{i+1})$. Ainsi

$$L_0 = 1 - \frac{3}{2}X + \frac{1}{2}X^2 = \frac{(X-1)(X-2)}{2}, \quad L_1 = 2X - X^2 = -X(X-2) \text{ et } L_2 = \frac{X(X-1)}{2}.$$

Comme $\varphi(L_i)$ est un vecteur de la base canonique, $L_i(j)$ vaut 1 si $i = j$ et 0 sinon. Ce sont les polynômes d'interpolation de Lagrange, et $P = L_0 + 3L_2$. La figure ci-dessous représente P et les trois polynômes L_i .



Corrigé de l'exercice 12 : Rang selon un paramètre

1. On développe selon la première ligne :

$$\det A_m = (m-1) - (1-m) + m(1-m^2) = (m-1)(2-m-m^2).$$

Or $2-m-m^2 = -(m-1)(m+2)$. **Donc** $\det A_m = -(m-1)^2(m+2)$.

2. Si $m \notin \{1, -2\}$, le déterminant est non nul, donc $\text{rg}(A_m) = 3$. Si $m = 1$, toutes les lignes

valent $(1, 1, 1)$, donc le rang vaut 1. Si $m = -2$, le déterminant est nul, mais les lignes $(1, 1, -2)$ et $(1, -2, 1)$ ne sont pas proportionnelles, donc le rang vaut 2. **Bilan : rang 3 si $m \neq 1$ et $m \neq -2$, rang 1 si $m = 1$, rang 2 si $m = -2$.**

3. Pour $m = 1$, le noyau est le plan d'équation $x + y + z = 0$, de dimension 2, et $1 + 2 = 3$. Pour $m = -2$, on résout $x + y - 2z = 0$ et $x - 2y + z = 0$. La différence donne $3y - 3z = 0$, donc $y = z$, puis $x = z$. **Le noyau est** $\text{Vect}((1, 1, 1))$, de dimension 1, et $2 + 1 = 3$: le théorème du rang est vérifié.

Corrigé de l'exercice 13 : Dimension d'espaces d'applications linéaires

1. Par l'isomorphisme $\mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2) \simeq \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$, **la dimension vaut** $3 \times 2 = 6$. Une base est formée des applications φ_{ij} , pour $1 \leq i \leq 2$ et $1 \leq j \leq 3$, de matrice E_{ij} : φ_{ij} envoie e_j sur f_i et les deux autres vecteurs de base sur 0.
2. L'application $f \rightarrow f(u)$ est linéaire de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ dans $\mathbb{R}^3$, et $\mathcal{F}$ est son noyau : c'est donc un sous-espace vectoriel. Comme $u \neq 0$, on le complète en une base $\mathcal{B} = (u, b_2, b_3)$. On fixe aussi une base $\mathcal{C}$ de l'espace d'arrivée. L'application $\Phi: f \rightarrow \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(f)$ est un isomorphisme. De plus, $f(u) = 0$ équivaut à : la première colonne de la matrice est nulle. Les matrices de première colonne nulle forment un sous-espace de dimension $9 - 3 = 6$. Un isomorphisme conserve la dimension. **Donc** $\dim \mathcal{F} = 6$.
3. On choisit maintenant $\mathcal{C} = (d, c_2, c_3)$, base de l'arrivée dont le premier vecteur dirige D . La condition $\text{Im } f \subset D$ équivaut à : chaque $f(b_j)$ est dans D . Autrement dit, les lignes 2 et 3 de la matrice sont nulles. Cet ensemble de matrices est de dimension 3. **Donc** $\dim \mathcal{G} = 3$.
4. Avec les mêmes bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$, $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$ correspond aux matrices dont la première colonne et les lignes 2 et 3 sont nulles. Il reste les coefficients $(1, 2)$ et $(1, 3)$. Ainsi $\dim(\mathcal{F} \cap \mathcal{G}) = 2$. Par la formule de Grassmann, $\dim(\mathcal{F} + \mathcal{G}) = 6 + 3 - 2 = 7$.

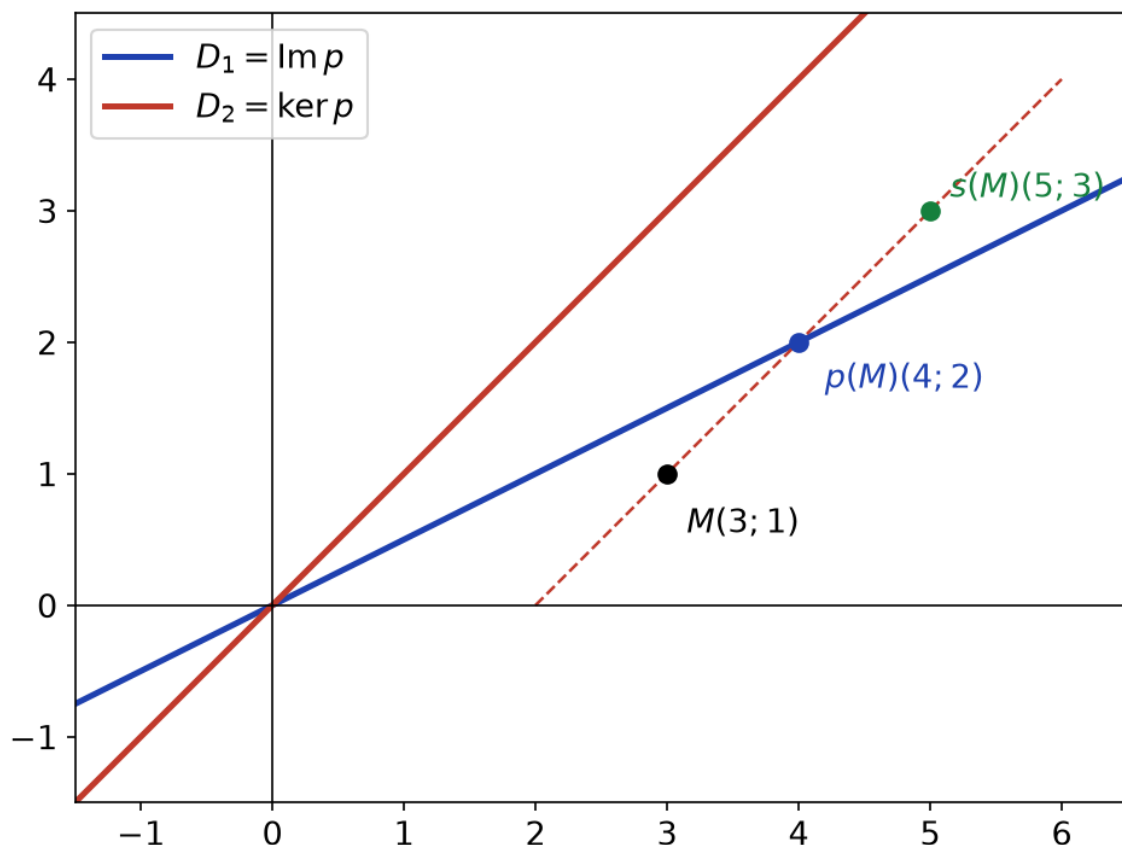
Point de méthode : pour calculer la dimension d'un espace d'applications linéaires, choisissez des bases adaptées aux conditions, puis comptez les coefficients libres de la matrice.

Corrigé de l'exercice 14 : Inverse à gauche et inverse à droite

1. La relation $AB = I_n$ signifie $a \circ b = \text{id}$. Soit x tel que $b(x) = 0$. Alors $x = a(b(x)) = a(0) = 0$. **Donc** $\ker b = \{0\}$ **et** b **est injectif**.
2. Par le théorème du rang, $\text{rg}(b) = n - \dim \ker b = n$. Ainsi b est surjectif, donc bijectif. En composant $a \circ b = \text{id}$ à droite par b^{-1} , on obtient $a = b^{-1}$. Par conséquent, $b \circ a = \text{id}$. **Matriciellement**, $BA = I_n$.
3. On calcule $AB = (1) = I_1$ et $BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq I_2$. **L'égalité** $AB = I$ **n'entraîne donc pas** $BA = I$ **pour des matrices rectangulaires**. En effet, $b: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ est injective, mais les espaces n'ont pas la même dimension : elle ne peut pas être surjective.

Corrigé de l'exercice 15 : Reconnaître un projecteur et une symétrie du plan

1. On calcule $A^2 = \begin{pmatrix} 4-2 & -4+2 \\ 2-1 & -,-2+1 \end{pmatrix} = A$. **Donc** $p \circ p = p$: p **est un projecteur**.
2. Les deux colonnes de A sont $(2, 1)$ et $(-2, -1)$, donc $\text{Im } p = \text{Vect}((2, 1))$, qui est la droite $x - 2y = 0$. Ensuite, $p(x, y) = 0$ équivaut à $2x - 2y = 0$ et $x - y = 0$, soit $x = y$. **Ainsi** $\text{Im } p = D_1$ **et** $\ker p = D_2$: p est la projection sur D_1 parallèlement à D_2 .
3. On a $p(2, 1) = (2, 1)$ et $p(1, 1) = (0, 0)$. **Dans cette base, la matrice de** p **est** $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. On retrouve $\text{tr}(A) = 2 - 1 = 1 = \text{rg}(p)$.
4. On calcule $p(M) = (6 - 2, 3 - 1) = (4, 2)$. Ensuite, $M - p(M) = (-1, -1)$, qui appartient bien à D_2 . **Donc** $M = (4, 2) + (-1, -1)$, **avec** $(4, 2) \in D_1$ **et** $(-1, -1) \in D_2$.
5. On a $S = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$, et $S^2 = \begin{pmatrix} 8 & -12+12 \\ 6-6 & -8+9 \end{pmatrix} = I_2$. Ainsi s est la symétrie par rapport à D_1 parallèlement à D_2 . Enfin, $s(M) = (9 - 4, 6 - 3)$. **On obtient** $s(M) = (5, 3) = 2p(M) - M$. La figure ci-dessous montre les trois points alignés sur une parallèle à D_2 .



Corrigé de l'exercice 16 : Projection sur un plan de $\mathbb{R}^3$

- Un vecteur $(0, 0, t)$ de D est dans Π si et seulement si $-t = 0$. Donc $\Pi \cap D = \{0\}$.
De plus, $\dim \Pi + \dim D = 2 + 1 = 3$. **Par conséquent**, $\mathbb{R}^3 = \Pi \oplus D$.
- On cherche λ tel que $(x, y, z) - \lambda(0, 0, 1) \in \Pi$, soit $x + y - (z - \lambda) = 0$. On obtient
 $\lambda = z - x - y$, donc $p(x, y, z) = (x, y, x + y)$. **Ainsi** $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
- Les deux premières lignes de A^2 sont celles de A . La troisième vaut $(1, 1, 0)A = (1, 1, 0)$.
Donc $A^2 = A$, et $\text{tr}(A) = 2$, qui est bien la dimension de l'image Π .
- Les vecteurs $(1, 0, 1)$ et $(0, 1, 1)$ vérifient l'équation de Π et sont libres : ils forment une base de Π . On y ajoute $(0, 0, 1)$. Ainsi $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, de déterminant 1. **Dans** $\mathcal{B}'$, la matrice de p est $\text{diag}(1, 1, 0)$.

5. La symétrie vaut $s = 2p - \text{id}$, donc $s(x, y, z) = (x, y, 2x + 2y - z)$. $S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$. La troisième ligne de S^2 vaut $(2+0-2, 0+2-2, 1) = (0, 0, 1)$, donc $S^2 = I_3$.

Corrigé de l'exercice 17 : Matrice équivalente à J_1

- La seconde ligne vaut -2 fois la première, qui est non nulle. **Donc** $\text{rg}(A) = 1$. Le noyau est le plan d'équation $x - y + 2z = 0$. **Une base en est** $((1, 1, 0), (-2, 0, 1))$.
- On suit la démonstration du cours. D'abord, on choisit $e'_1 = (1, 0, 0)$, qui n'est pas dans le noyau. Ensuite, on pose $e'_2 = (1, 1, 0)$ et $e'_3 = (-2, 0, 1)$. Enfin, $f'_1 = f(e'_1) = (1, -2)$, que l'on complète par $f'_2 = (0, 1)$. Alors $f(e'_1) = f'_1$ et $f(e'_2) = f(e'_3) = 0$. **La matrice de f dans $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ et $\mathcal{C}' = (f'_1, f'_2)$ est J_1 .**
- On a $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, triangulaire de déterminant 1, et $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, d'inverse $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Les colonnes de AP sont $(1, -2)$, $(0, 0)$ et $(0, 0)$. Puis $Q^{-1}(1, -2)^T = (1, 2-2)^T = (1, 0)^T$. **Donc** $Q^{-1}AP = J_1$.

Corrigé de l'exercice 18 : Transposition dans les matrices carrées d'ordre 2

- On a $t(E_{11}) = E_{11}$, $t(E_{12}) = E_{21}$, $t(E_{21}) = E_{12}$ et $t(E_{22}) = E_{22}$. Par conséquent :

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Échanger deux fois les colonnes 2 et 3 revient à ne rien faire, donc $T^2 = I_4$.

2. Comme $t \circ t = \text{id}$, t est une symétrie. Elle se fait par rapport à $\ker(t - \text{id})$, l'espace $\mathcal{S}_2$ des matrices symétriques. Elle se fait parallèlement à $\ker(t + \text{id})$, l'espace $\mathcal{A}_2$ des matrices antisymétriques. On a $\dim \mathcal{S}_2 = 3$ et $\dim \mathcal{A}_2 = 1$.
3. La famille $(E_{11}, E_{22}, E_{12} + E_{21})$ est une base de $\mathcal{S}_2$, et $(E_{12} - E_{21})$ est une base de $\mathcal{A}_2$. Dans cette base adaptée, la matrice de t est $\text{diag}(1, 1, 1, -1)$.
4. Sur T , la trace vaut $1 + 0 + 0 + 1 = 2$. Sur la matrice diagonale, elle vaut $3 - 1 = 2$. Donc $\text{tr}(t) = 2$, ce qui illustre l'invariance de la trace par changement de base et la formule $2r - n = 6 - 4$.

Corrigé de l'exercice 19 : Matrices semblables ou non

1. Pour toute P inversible, $P^{-1}I_n P = P^{-1}P = I_n$. Donc la seule matrice semblable à I_n est I_n . Or $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \neq I_2$. Elle n'est donc pas semblable à I_2 , bien que les deux matrices aient pour trace 2, pour rang 2 et pour déterminant 1.
2. Soit f l'endomorphisme de matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ dans (e_1, e_2) : $f(e_1) = e_1$ et $f(e_2) = e_1 + e_2$. Dans la base (e_2, e_1) , on a $f(e_2) = 1 \cdot e_2 + 1 \cdot e_1$ et $f(e_1) = 0 \cdot e_2 + 1 \cdot e_1$. La matrice devient $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; les deux matrices sont donc semblables, avec $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
3. Les deux matrices sont de rang 1 et de même taille : elles sont équivalentes. Cependant, leurs traces valent 1 et 0. Comme deux matrices semblables ont même trace, elles ne sont pas semblables.
4. On cherche une base (u_1, u_2) avec $f(u_1) = u_1$ et $f(u_2) = 3u_2$. Le vecteur $u_1 = (1, 0)$ convient. Ensuite, $A - 3I_2 = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ a pour noyau la droite $x = y$; on prend $u_2 = (1, 1)$. Avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, on calcule $AP = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$. Puis $P^{-1}AP = \text{diag}(1, 3)$.
5. Si $B = P^{-1}AP$, alors $B^2 = P^{-1}APP^{-1}AP = P^{-1}A^2P$. Donc A^2 et B^2 sont semblables. Ensuite, $N = E_{12} + E_{23}$ et $N' = E_{12} + E_{34}$. Leurs colonnes non nulles sont (e_1, e_2) et (e_1, e_3) , donc les deux rangs valent 2 ; les deux traces sont nulles. Or $N^2 = E_{12}^2 + E_{12}E_{23} + E_{23}E_{12} + E_{23}^2 = E_{13} \neq 0$, alors que $N'^2 = E_{12}^2 + E_{12}E_{34} + E_{34}E_{12} + E_{34}^2 = 0$, car $E_{ij}E_{kl}$ est nul dès que $j \neq k$. Si N et N' étaient semblables, N^2 serait semblable à la matrice nulle, donc nulle. Par

conséquent, N et N' ne sont pas semblables.

Point de méthode : pour prouver que deux matrices ne sont pas semblables, cherchez un invariant qui les distingue : trace, rang, déterminant, ou rang d'une puissance.

Corrigé de l'exercice 20 : Matrices de rang 1

1. Pour toute colonne Z , on a $ABZ = A(BZ)$, donc l'image de AB est contenue dans celle de A . Ainsi $\text{rg}(AB) \leq \text{rg}(A)$. Ensuite, par invariance du rang par transposition, $\text{rg}(AB) = \text{rg}(B^T A^T) \leq \text{rg}(B^T) = \text{rg}(B)$. **Donc** $\text{rg}(AB) \leq \min(\text{rg}(A), \text{rg}(B))$.
2. Si $A = XY^T$, la colonne j de A vaut $y_j X$. Toutes les colonnes sont donc colinéaires à X , et l'une d'elles est non nulle car $Y \neq 0$: le rang vaut 1. Réciproquement, si $\text{rg}(A) = 1$, l'espace engendré par les colonnes est une droite $\text{Vect}(X)$, avec $X \neq 0$. Chaque colonne s'écrit $C_j = y_j X$. La colonne $Y = (y_j)$ est non nulle, sinon A serait nulle. **Alors** $A = XY^T$.
3. Par associativité, $A^2 = X(Y^T X)Y^T$. Or $Y^T X = \sum_i x_i y_i$ est un scalaire, qui est aussi la somme des coefficients diagonaux $x_i y_i$ de XY^T . **Donc** $A^2 = \text{tr}(A) A$.
4. Posons $t = \text{tr}(A)$. Si $t \neq 0$ et $B = \frac{1}{t} A$, alors $B^2 = \frac{1}{t^2} t A = B$: **B est la matrice d'un projecteur**. Si $t = 0$, la relation donne directement $A^2 = 0$.
5. La première matrice s'écrit XX^T avec $X = (1, 2)^T$, et sa trace vaut 5. On vérifie $A^2 = \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 10 & 20 \end{pmatrix} = 5A$. **Donc** $\frac{1}{5}A$ est la projection sur $\text{Vect}(1, 2)$ parallèlement à la droite $x + 2y = 0$. La seconde s'écrit XY^T avec $X = (1, 1)^T$ et $Y = (1, -1)^T$; sa trace est nulle. **Son carré est donc nul**, ce que confirme le calcul direct.

Corrigé de l'exercice 21 : Endomorphismes de carré nul en dimension 3

1. Soit $y = f(x) \in \text{Im } f$. Alors $f(y) = f \circ f(x) = 0$, donc $y \in \ker f$. Ainsi $\text{Im } f \subset \ker f$ et $\text{rg}(f) \leq \dim \ker f$. Par le théorème du rang, $\text{rg}(f) + \dim \ker f = 3$, donc $2 \text{rg}(f) \leq 3$. Comme $f \neq 0$, on obtient $\text{rg}(f) = 1$ et $\dim \ker f = 2$.
2. Le vecteur $e_1 = f(e_3)$ est non nul et appartient à $\text{Im } f \subset \ker f$. D'après le théorème de la base incomplète, la famille libre (e_1) se complète en une base (e_1, e_2) de $\ker f$.
3. Supposons $ae_1 + be_2 + ce_3 = 0$. En appliquant f , on obtient $ce_1 = 0$, donc $c = 0$. Il reste $ae_1 + be_2 = 0$, donc $a = b = 0$, car (e_1, e_2) est libre. La famille est libre et a trois vecteurs : c'est une base. Puisque $f(e_1) = f(e_2) = 0$ et $f(e_3) = e_1$, la matrice de f est E_{13} , dont le seul coefficient non nul est un 1 en position $(1, 3)$.
4. Soit $A \neq 0$ avec $A^2 = 0$. L'endomorphisme canoniquement associé vérifie les hypothèses. Il existe donc une base où sa matrice est E_{13} : A est semblable à E_{13} . **Par transitivité de la similitude, deux telles matrices sont semblables.**
5. La première et la deuxième ligne de A^2 valent $(1-1, -1+1, 0) = (0, 0, 0)$, donc $A^2 = 0$. On prend $e_3 = (1, 0, 0)$, d'où $e_1 = f(e_3) = (1, 1, 0)$. Le noyau est le plan $x = y$, qui contient e_1 ; on le complète par $e_2 = (0, 0, 1)$. Ainsi $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, de déterminant 1, convient. En effet, les colonnes de AP sont 0 , 0 et $(1, 1, 0)$, qui sont celles de PE_{13} .

Corrigé de l'exercice 22 : Matrices semblables seulement à elles-mêmes

1. Soit f l'endomorphisme canoniquement associé à A . Toute matrice P inversible est la matrice de passage de la base canonique vers une base $\mathcal{B}'$. L'hypothèse signifie donc : **la matrice de f est la même dans toutes les bases.**
2. Comme $i \neq j$, on a $E_{ij}^2 = 0$. Donc $(I_n + E_{ij})(I_n - E_{ij}) = I_n - E_{ij}^2 = I_n$. Ainsi P est inversible, d'inverse $I_n - E_{ij}$. L'égalité $P^{-1}AP = A$ équivaut à $AP = PA$, soit $A + AE_{ij} = A + E_{ij}A$. D'où $AE_{ij} = E_{ij}A$.
3. Le coefficient (k, l) de AE_{ij} vaut a_{ki} si $l = j$, et 0 sinon. Celui de $E_{ij}A$ vaut a_{jl} si $k = i$, et 0 sinon. En prenant $l = j$ et $k \neq i$, on obtient $a_{ki} = 0$. En prenant $k = i$ et $l = j$, on obtient $a_{ii} = a_{jj}$. Comme $n \geq 2$, pour tout i il existe $j \neq i$. Tous les coefficients hors diagonale sont donc nuls, et les coefficients diagonaux sont égaux. **Donc**

$$A = \lambda I_n, \text{ avec } \lambda = a_{11}.$$

4. Réciproquement, $P^{-1}(\lambda I_n)P = \lambda P^{-1}P = \lambda I_n$. Les endomorphismes qui ont la même matrice dans toutes les bases sont exactement les homothéties λid_E .

Corrigé de l'exercice 23 : Problème : puissances d'une matrice et suites couplées

1. On a $A + I_3 = J$, dont toutes les colonnes sont égales et non nulles : $\text{rg}(A + I_3) = 1$.

Ensuite, les lignes de $A - 2I_3 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ ont une somme nulle, donc le rang est au plus

2. Les deux premières lignes ne sont pas proportionnelles. **Donc** $\text{rg}(A + I_3) = 1$ et $\text{rg}(A - 2I_3) = 2$.

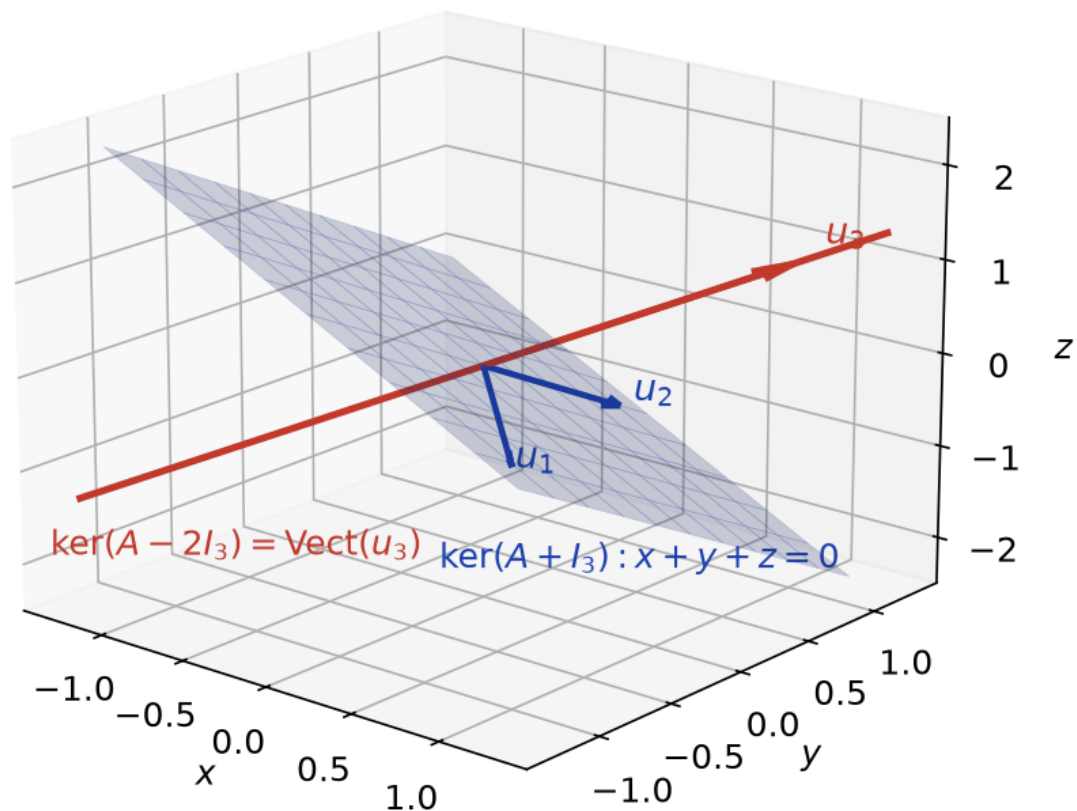
2. D'abord, $\ker(A + I_3) = \ker J$ est le plan d'équation $x + y + z = 0$. Ensuite, par le théorème du rang, $\ker(A - 2I_3)$ est de dimension 1. Or $(A - 2I_3)(1, 1, 1)^T = 0$. Donc $\ker(A - 2I_3) = \text{Vect}((1, 1, 1))$. Ce vecteur n'est pas dans le plan, car $1 + 1 + 1 \neq 0$. L'intersection est donc nulle, et les dimensions totalisent 3. **Ainsi** $\mathbb{R}^3 = \ker(A + I_3) \oplus \ker(A - 2I_3)$.

3. Les vecteurs u_1, u_2 sont dans le plan et non colinéaires ; ils forment une base du plan. Avec u_3 , on obtient une base de $\mathbb{R}^3$ adaptée à la somme directe. On a $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Pour l'inverser, on résout $au_1 + bu_2 + cu_3 = (x, y, z)$. La somme des trois équations donne $3c = x + y + z$. Ensuite, $a = x - c$ et $b = c - z$. Finalement :

$$P^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

On vérifie que $PP^{-1} = I_3$ **ligne par ligne.**

4. On a $Au_1 = (-1, 1, 0) = -u_1$, $Au_2 = (0, -1, 1) = -u_2$ et $Au_3 = (2, 2, 2) = 2u_3$. **Donc** $D = \text{diag}(-1, -1, 2)$. Les traces concordent : $\text{tr}(A) = 0$ et $\text{tr}(D) = -1 - 1 + 2 = 0$. La figure ci-dessous représente le plan $\ker(A + I_3)$, où f agit comme $-\text{id}$, et la droite $\ker(A - 2I_3)$, où f agit comme 2id .



5. Tout vecteur $v = (x, y, z)$ s'écrit $v = \frac{x+y+z}{3}u_3 + w$, avec w dans le plan : en effet, la somme des coordonnées de w est $(x+y+z) - (x+y+z) = 0$. Donc $q(v) = \frac{x+y+z}{3}(1, 1, 1)$, et **la matrice de q est $\frac{1}{3}J$** . Ainsi $A = J - I_3 = 3 \cdot \frac{1}{3}J - I_3$. On pose $Q = \frac{1}{3}J$, qui vérifie $Q^2 = Q$ et commute avec I_3 . La formule du binôme donne alors :

$$A^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 3^k Q^k (-1)^{n-k} = (-1)^n I_3 + (2^n - (-1)^n) Q.$$

En effet, $Q^k = Q$ pour $k \geq 1$, et $\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} 3^k (-1)^{n-k} = (3-1)^n - (-1)^n$. **Donc**

$$A^n = (-1)^n I_3 + \frac{2^n - (-1)^n}{3} J. \text{ Pour } n = 2, \text{ on obtient } I_3 + J, \text{ qui est bien } (J - I_3)^2 = 3J - 2J + I_3.$$

6. En posant $Z_n = (a_n, b_n, c_n)^T$, on a $Z_{n+1} = AZ_n$, donc $Z_n = A^n Z_0$, qui est la première colonne de A^n . **Ainsi** $a_n = \frac{2^n + 2(-1)^n}{3}$ **et** $b_n = c_n = \frac{2^n - (-1)^n}{3}$. Par exemple,

$a_1 = 0$, $b_1 = c_1 = 1$, puis $a_2 = 2$ et $b_2 = 1$, conformément à la définition.

Point de méthode : décomposer une matrice à l'aide de projecteurs associés à une somme directe permet de calculer ses puissances sans inverser la matrice de passage.

[Revenir aux énoncés des exercices](#)

Pour aller plus loin en L1

- Le cours : [matrices et changement de base, cours de maths en L1](#)
- Les énoncés : [exercices de maths en L1 sur matrices et changement de base](#)
- À maîtriser avant : [Applications linéaires](#), [Systèmes linéaires et calcul matriciel](#)
- Chapitre précédent : [Applications linéaires](#)
- Chapitre suivant : [Déterminants](#)
- Tester vos connaissances : [QCM de maths en L1 par chapitre](#)
- Le sommaire : [tous les chapitres de maths de L1](#) et la [licence de maths de L1 à L3](#)