

Matrices et applications linéaires

Exercice 1 : Matrice d'une application linéaire et d'une famille

On considère l'application $u : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $u(x, y, z) = (x + 2y - z, 3x - y + 2z)$.

1. Justifiez que u est linéaire, puis écrivez sa matrice A dans les bases canoniques.
2. Calculez $u(1, 1, 1)$ à l'aide d'un produit matriciel.
3. Écrivez la matrice, dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$, de la famille $v_1 = (1, 0, 2)$, $v_2 = (-1, 1, 0)$.
4. Calculez $u(v_1)$ et $u(v_2)$. En déduisez la matrice de la famille $(u(v_1), u(v_2))$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Est-ce une base de $\mathbb{R}^2$?

Exercice 2 : Matrice de la dérivation

On note D l'endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$ défini par $D(P) = P'$, et $\mathcal{B} = (1, X, X^2, X^3)$.

1. Écrivez la matrice N de D dans la base $\mathcal{B}$.
2. Écrivez la matrice de D vue comme application de $\mathbb{R}_3[X]$ dans $\mathbb{R}_2[X]$, dans les bases canoniques. Quelle est sa taille ?
3. Déterminez le rang, le noyau et la trace de $D \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_3[X])$.

4. Calculez N^2 , N^3 et N^4 . Interprétez le résultat en termes de dérivées successives.

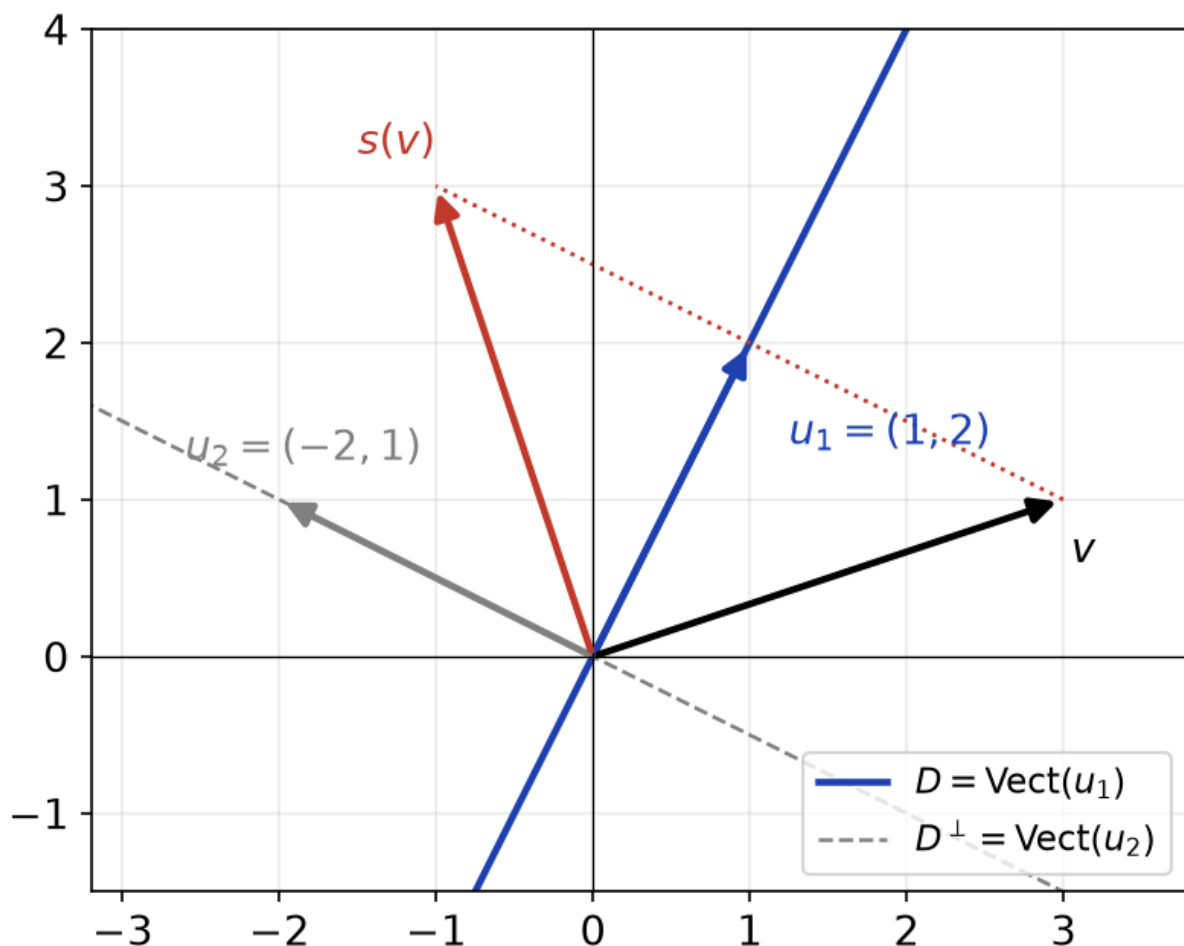
Exercice 3 : Translation de la variable dans les polynômes

Soit τ l'application de $\mathbb{R}_2[X]$ dans lui-même définie par $\tau(P) = P(X+1)$.

1. Montrez que τ est un endomorphisme, puis écrivez sa matrice T dans la base canonique $(1, X, X^2)$.
2. Justifiez que τ est un automorphisme et donnez l'expression de $\tau^{-1}(P)$.
3. En déduisez T^{-1} sans calcul d'inverse, puis vérifiez que $T T^{-1} = I_3$.
4. Écrivez la matrice de τ^k pour $k \in \mathbb{N}$.

Exercice 4 : Réflexion et rotation du plan

Dans $\mathbb{R}^2$, on note D la droite dirigée par $u_1 = (1, 2)$ et s la réflexion d'axe D : c'est la symétrie par rapport à D parallèlement à la droite orthogonale $D^\perp$, dirigée par $u_2 = (-2, 1)$. La figure ci-dessous représente la situation.



1. Justifiez que $\mathcal{B}' = (u_1, u_2)$ est une base de $\mathbb{R}^2$ et écrivez la matrice D' de s dans cette base.
2. Écrivez la matrice de passage P de la base canonique à $\mathcal{B}'$, puis calculez P^{-1} .
3. En déduisez la matrice S de s dans la base canonique. Calculez $s(3, 1)$.
4. Soit r la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$. Calculez la matrice M de $r \circ s$ dans la base canonique et vérifiez que $M^2 = I_2$.

Exercice 5 : Isomorphisme entre applications linéaires et matrices

Soit $E = \mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique (e_1, e_2, e_3) .

1. Quelle est la dimension de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}_2[X])$? Et celle de $\mathcal{L}(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))$?
2. Montrez que $\mathcal{F} = \{u \in \mathcal{L}(E) : u(e_1) \in \text{Vect}(e_1)\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$ et calculez sa dimension.
3. Même question pour $\mathcal{G} = \{u \in \mathcal{L}(E) : u(\text{Vect}(e_1, e_2)) \subseteq \text{Vect}(e_1, e_2)\}$.
4. Déterminez la dimension de $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$.

Exercice 6 : Rang par opérations élémentaires

Calculez le rang des matrices suivantes par la méthode du pivot.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & 3 & 7 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminez $\text{rg } A$, puis la dimension du noyau de A .
2. Déterminez $\text{rg } B$. La matrice B est-elle inversible ?
3. Donnez une base du noyau de A .

Exercice 7 : Coordonnées et matrice de passage

Dans $\mathbb{R}^3$, on pose $e'_1 = (1, 1, 0)$, $e'_2 = (0, 1, 1)$ et $e'_3 = (1, 0, 1)$.

1. Écrivez la matrice P de la famille $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ dans la base canonique $\mathcal{B}$.
2. Montrez que P est inversible et calculez P^{-1} . Que peut-on en déduire pour $\mathcal{B}'$?

- Déterminez les coordonnées de $v = (2, 3, 5)$ dans $\mathcal{B}'$, puis vérifiez le résultat.
- Quel vecteur a pour coordonnées $(1, -1, 2)$ dans $\mathcal{B}'$?

Exercice 8 : Noyau, image et rang d'une matrice

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & \\ 1 & 2 & -1-1 \end{pmatrix}$ et u_A l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé.

- Calculez le rang de A .
- Déterminez une base du noyau de A .
- Déterminez une base et une équation cartésienne de l'image de A .
- Montrez que $\ker A$ et $\operatorname{Im} A$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.
- Pour quels vecteurs $B = (\alpha, \beta, \gamma)$ le système $AX = B$ est-il compatible ?

Exercice 9 : Rang selon un paramètre

Pour $a \in \mathbb{R}$, on pose $M_a = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

- Par des opérations élémentaires sur les lignes, mettez M_a sous forme échelonnée.
- Déterminez le rang de M_a selon la valeur de a .
- Pour quelles valeurs de a la matrice M_a est-elle inversible ?
- Pour $a = -2$, déterminez le noyau de M_a .

Exercice 10 : Systèmes de Cramer et système à paramètre

1. Montrez que le système suivant est un système de Cramer, puis résolvez-le.

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ x + 2y + 3z = 14 \\ x + 4y + 9z = 36 \end{cases}$$

2. Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, résolvez le système $M_\alpha X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, où M_α est la matrice de l'exercice 9. Distinguez les cas $\alpha \notin \{1, -2\}$, $\alpha = 1$ et $\alpha = -2$.
3. Interprétez chaque cas à l'aide de l'image et du noyau de M_α .

Exercice 11 : Changement de base et puissances d'une matrice

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ et u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé. On pose $f_1 = (1, 1, 1)$, $f_2 = (1, -1, 0)$ et $f_3 = (0, 1, -1)$.

- Montrez que $\mathcal{B}' = (f_1, f_2, f_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
- Calculez $u(f_1)$, $u(f_2)$, $u(f_3)$ et écrivez la matrice D de u dans $\mathcal{B}'$. Vérifiez que $\text{tr } D = \text{tr } A$.
- On note J la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients valent 1. Vérifiez que $A = I_3 + J$ et calculez J^2 .
- En déduisez A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$, puis contrôlez la cohérence avec la matrice D^n (trace de A^n).

Exercice 12 : Matrices équivalentes et matrice J_r

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$ et $\mathcal{u}$ l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$ canoniquement associée.

1. Déterminez le rang et le noyau de A .
2. Construisez une base (g_1, g_2) de $\mathbb{R}^2$ et une base (h_1, h_2, h_3) de $\mathbb{R}^3$ dans lesquelles la matrice de $\mathcal{u}$ est $J_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
3. En déduisez des matrices inversibles $Q \in GL_3(\mathbb{R})$ et $P \in GL_2(\mathbb{R})$ telles que $A = Q J_1 P^{-1}$. Vérifiez l'égalité.
4. Les matrices A et $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ sont-elles équivalentes ? Et A et $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$?

Exercice 13 : Matrices extraites et rang

1. Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$. Montrez que $\text{rg } M \leq 2$ en trouvant une relation entre les lignes, puis que $\text{rg } M = 2$ à l'aide d'une matrice extraite.
2. Soit a, b, c trois réels et $N = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \end{pmatrix}$. À l'aide des matrices extraites d'ordre 2, montrez que $\text{rg } N = 2$ si et seulement si a, b, c ne sont pas tous égaux.
3. Déduisez de la question 2 le rang de ${}^t N$ et donnez une interprétation en termes de colonnes de N .

Exercice 14 : Propriétés de la trace

Pour $1 \leq i, j \leq n$, on note E_{ij} la matrice élémentaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont le seul coefficient non

nul vaut 1, en position (i, j) . On rappelle que $E_{ij} E_{kl} = E_{il}$ si $j = k$, et 0 sinon.

1. Montrez qu'il n'existe pas de matrices $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $AB - BA = I_n$.
2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Calculez $\text{tr}(A E_{ij})$. En déduisez que si $\text{tr}(AM) = 0$ pour toute matrice M , alors $A = 0$.
3. Avec $n = 2$, trouvez trois matrices A, B, C telles que $\text{tr}(ABC) \neq \text{tr}(BAC)$.
4. Montrez que pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\text{tr}({}^t A A) = \sum_{i,j} a_{ij}^2$. En déduisez que ${}^t A A = 0$ implique $A = 0$.

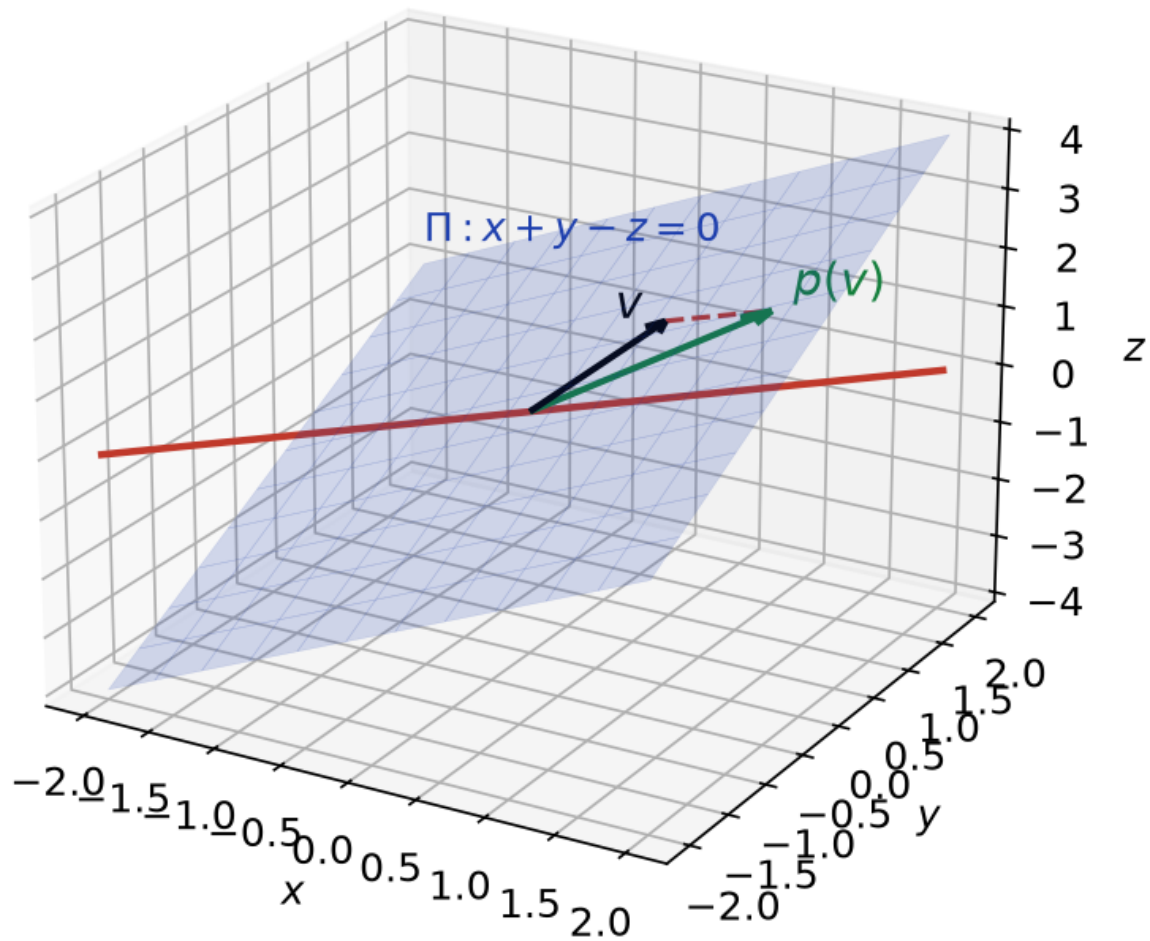
Exercice 15 : Trace et similitude

1. Les matrices $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et I_2 ont la même trace. Sont-elles semblables ?
2. Les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ sont-elles semblables ?
3. Soit $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$. Trouvez un vecteur v tel que $Cv = 3v$, puis une matrice inversible P telle que $P^{-1} C P = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.
4. La matrice $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ est-elle semblable à C ? Justifiez.

Exercice 16 : Trace d'un projecteur

Dans $\mathbb{R}^3$, on considère le plan $\Pi : x + y - z = 0$ et la droite $\Delta = \text{Vect}((1, 1, 0))$. La figure ci-dessous représente Π , Δ , un vecteur v et son projeté sur Π parallèlement à Δ .

— $\Delta = \text{Vect}(1, 1, 0)$



1. Montrez que Π et Δ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.
2. Soit p la projection sur Π parallèlement à Δ . Calculez $p(x, y, z)$ et écrivez sa matrice M dans la base canonique.
3. Vérifiez que $M^2 = M$ et que $\text{tr } M = \text{rg } M$.
4. Donnez une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de p est diagonale.
5. Soit $Q \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $Q^2 = Q$ et $\text{tr } Q = 0$. Montrez que $Q = 0$.

Exercice 17 : Endomorphisme nilpotent d'indice 3

Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ tel que $u^3 = 0$ et $u^2 \neq 0$.

1. Justifiez l'existence d'un vecteur x tel que $u^2(x) \neq 0$.
2. Montrez que $(x, u(x), u^2(x))$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
3. Écrivez la matrice de u dans cette base. En déduisez le rang et la trace de u .
4. Application : soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Vérifiez que $A^2 \neq 0$ et $A^3 = 0$, puis construisez explicitement une base de ce type.

Exercice 18 : Endomorphismes de rang 1

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de rang 1. En utilisant la matrice J_1 , montrez qu'il existe deux colonnes non nulles $X, Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ telles que $A = X {}^t Y$.
2. Montrez que ${}^t Y X = \text{tr } A$, puis que $A^2 = (\text{tr } A) A$.
3. Application : soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$. Calculez A^n pour $n \geq 1$.
4. Soit u un endomorphisme de rang 1. Montrez que si $\text{tr } u \neq 0$, alors $\frac{1}{\text{tr } u} u$ est un projecteur, et que si $\text{tr } u = 0$, alors $u^2 = 0$.

Exercice 19 : Centre de l'algèbre des matrices

On reprend les matrices élémentaires E_{ij} de l'exercice 14. On cherche les matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui commutent avec toutes les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1. Soit $A = (a_{kl})$. Décrivez les matrices AE_{ij} et $E_{ij}A$: quelles lignes ou colonnes sont non nulles ?
2. En déduisez que si $AE_{ij} = E_{ij}A$ pour tous i, j , alors A est de la forme λI_n .
3. Traduisez le résultat : quels sont les endomorphismes u de E qui commutent avec tous les endomorphismes de E ?

Exercice 20 : Formes linéaires qui vérifient $\varphi(AB) = \varphi(BA)$

Soit φ une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $\varphi(AB) = \varphi(BA)$ pour toutes matrices A et B .

1. Montrez que $\varphi(E_{ij}) = 0$ pour $i \neq j$. On pourra écrire $E_{ij} = E_{ii}E_{ij}$.
2. Montrez que $\varphi(E_{ii}) = \varphi(E_{jj})$ pour tous i, j .
3. En déduisez qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $\varphi = \lambda \text{tr}$.
4. Application : existe-t-il une forme linéaire φ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, telle que $\varphi(AB) = \varphi(BA)$ pour toutes A, B , et $\varphi(I_n) = 1$? Est-elle unique ?

Exercice 21 : Matrices de trace nulle en taille 2

Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ de trace nulle, et u l'endomorphisme de $\mathbb{K}^2$ canoniquement associé.

1. On suppose que u est une homothétie λid . Montrez que $A = 0$.
2. On suppose désormais que u n'est pas une homothétie. On admet qu'il existe alors un vecteur x tel que $(x, u(x))$ soit libre. Justifiez que c'est une base et montrez que la matrice de u dans cette base est de la forme $\begin{pmatrix} 0 & c \\ 1 & d \end{pmatrix}$, avec $d = 0$.

3. En déduisez que toute matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ de trace nulle est semblable à une matrice de diagonale nulle.
4. Application : pour $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, calculez A^2 et donnez une matrice P inversible telle que $P^{-1} A P$ soit de diagonale nulle.

Exercice 22 : Problème : l'opérateur de différence sur les polynômes

On note $E = \mathbb{R}_3[X]$, $\mathcal{B} = (1, X, X^2, X^3)$ sa base canonique, et Δ l'application définie sur E par $\Delta(P) = P(X+1) - P(X)$.

1. Montrez que Δ est un endomorphisme de E et écrivez sa matrice A dans $\mathcal{B}$.
2. Déterminez le rang, le noyau, l'image et la trace de Δ .
3. On pose $H_0 = 1$, $H_1 = X$, $H_2 = \frac{X(X-1)}{2}$ et $H_3 = \frac{X(X-1)(X-2)}{6}$. Montrez que $\mathcal{H} = (H_0, H_1, H_2, H_3)$ est une base de E et écrivez la matrice de passage P de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{H}$.
4. Calculez $\Delta(H_k)$ pour $k = 0, 1, 2, 3$. En déduisez la matrice N de Δ dans $\mathcal{H}$, et la relation entre A , N et P .
5. Écrivez X^2 dans la base $\mathcal{H}$. Trouvez un polynôme Q tel que $\Delta(Q) = X^2$.
6. En déduisez, pour tout entier $m \geq 1$, la valeur de $\sum_{k=0}^{m-1} k^2$.

Le corrigé des exercices

Chaque exercice est corrigé en détail, question par question, sur la page suivante.



Pour aller plus loin en maths sup

- Le cours : [matrices et applications linéaires, cours de maths sup](#)
- À maîtriser avant : [Applications linéaires et théorème du rang](#), [Calcul matriciel et systèmes linéaires](#)
- Chapitre précédent : [Formes linéaires, hyperplans et sous-espaces affines](#)
- Chapitre suivant : [Groupe symétrique et déterminants](#)
- Tester vos connaissances : [QCM de maths sup par chapitre](#)
- Le sommaire : [tous les chapitres de maths sup](#) et les [chapitres de maths spé](#)