

Matrices et applications linéaires

Corrigé de l'exercice 1 : Matrice d'une application linéaire et d'une famille

1. Chaque coordonnée de $u(x, y, z)$ est une combinaison linéaire de x, y, z , sans terme constant. Par conséquent, u est linéaire. Ensuite, on calcule les images des vecteurs de la base canonique : $u(e_1) = (1, 3)$, $u(e_2) = (2, -1)$ et $u(e_3) = (-1, 2)$. Ces images forment les colonnes, donc $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

2. La colonne de $(1, 1, 1)$ est $X = {}^t(1, 1, 1)$. Ainsi, $AX = \begin{pmatrix} 1+2-1 \\ 3-1+2 \end{pmatrix}$, d'où $u(1, 1, 1) = (2, 4)$.

3. On range les coordonnées de v_1 et de v_2 en colonnes : $V = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$.

4. Le produit AV donne d'un coup les deux images :

$$AV = \begin{pmatrix} 1+0-2 & -1+2+0 \\ 3+0+4 & -3-1+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 7 & -4 \end{pmatrix}.$$

Donc $u(v_1) = (-1, 7)$ et $u(v_2) = (1, -4)$, et la matrice de la famille est AV . Pour une matrice carrée d'ordre 2, on sait que $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est inversible si et seulement si $ad - bc \neq 0$. Ici, $ad - bc = 4 - 7 = -3$. Par conséquent, $(u(v_1), u(v_2))$ est une base de $\mathbb{R}^2$.

Point de méthode : la matrice d'une famille d'images s'obtient par un seul produit, $\text{Mat}(u) \times \text{Mat}(\text{famille})$.

Corrigé de l'exercice 2 : Matrice de la dérivation

1. On a $D(1) = 0$, $D(X) = 1$, $D(X^2) = 2X$ et $D(X^3) = 3X^2$. En plaçant ces coordonnées en colonnes, on obtient

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. L'espace de départ est de dimension 4 et l'espace d'arrivée de dimension 3. La matrice a donc 3 lignes et 4 colonnes : $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,4}(\mathbb{R})$. On a simplement supprimé la dernière ligne, qui était nulle.

3. Les colonnes 2, 3 et 4 de N sont proportionnelles à e_1 , e_2 , e_3 , donc libres, et la première est nulle. Ainsi, $\text{rg } D = 3$. D'après le théorème du rang, $\dim \ker D = 4 - 3 = 1$. Or les constantes ont une dérivée nulle, donc $\ker D = \mathbb{R}_0[X]$, l'ensemble des polynômes constants. Enfin, la diagonale de N est nulle, donc $\text{tr } D = 0$.

4. Le calcul direct, ou la lecture de D^2 et D^3 sur la base, donne

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & , & 0 \end{pmatrix}, \quad N^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & , & 0 \end{pmatrix}, \quad N^4 = 0.$$

En effet, $D^2(X^2) = 2$, $D^2(X^3) = 6X$ et $D^3(X^3) = 6$. Finalement, $N^4 = 0$ traduit le fait que la dérivée quatrième d'un polynôme de degré au plus 3 est nulle.

Corrigé de l'exercice 3 : Translation de la variable dans les polynômes

1. Pour $P, Q \in \mathbb{R}_2[X]$ et λ, μ réels,
 $(\lambda P + \mu Q)(X+1) = \lambda P(X+1) + \mu Q(X+1)$. De plus, $P(X+1)$ a le même degré que P . Donc τ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$. Ensuite, $\tau(1) = 1$,

$$\tau(X) = 1 + X \text{ et } \tau(X^2) = 1 + 2X + X^2. \text{ D'où } T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Posons $\sigma(P) = P(X-1)$. Alors $\tau(\sigma(P)) = P(X-1+1) = P$, et de même $\sigma(\tau(P)) = P$. Ainsi, τ est bijective, et $\tau^{-1}(P) = P(X-1)$.

3. La matrice de τ^{-1} est l'inverse de T . Or $\sigma(1) = 1$, $\sigma(X) = X-1$ et

$$\sigma(X^2) = 1 - 2X + X^2. \text{ Donc } T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \text{ Vérifions : la première ligne de}$$

$$T T^{-1} \text{ vaut } (1, -1 + 1, 1 - 2 + 1) = (1, 0, 0); \text{ la deuxième vaut } (0, 1, -2 + 2) = (0, 1, 0); \text{ la troisième vaut } (0, 0, 1). \text{ On a bien } T T^{-1} = I_3.$$

4. Par récurrence, $\tau^k(P) = P(X+k)$. Or $(X+k)^2 = k^2 + 2kX + X^2$. Par

$$\text{conséquent, } T^k = \begin{pmatrix} 1 & k & k^2 \\ 0 & 2k & 2k \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \text{ Pour } k = -1, \text{ on retrouve bien } T^{-1}.$$

Point de méthode : pour inverser la matrice d'un automorphisme, cherchez d'abord la réciproque géométrique ; le calcul matriciel sert ensuite de vérification.

Corrigé de l'exercice 4 : Réflexion et rotation du plan

1. La matrice de (u_1, u_2) est $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, et $ad - bc = 1 + 4 = 5 \neq 0$. Donc $\mathcal{B}'$ est une base. Ensuite, $s(u_1) = u_1$ car $u_1 \in D$, et $s(u_2) = -u_2$ car u_2 dirige la direction de symétrie. Ainsi, $D' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

2. La matrice de passage contient u_1 et u_2 en colonnes : $P = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Pour une matrice d'ordre 2 inversible, l'inverse vaut $\frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$. D'où $P^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.

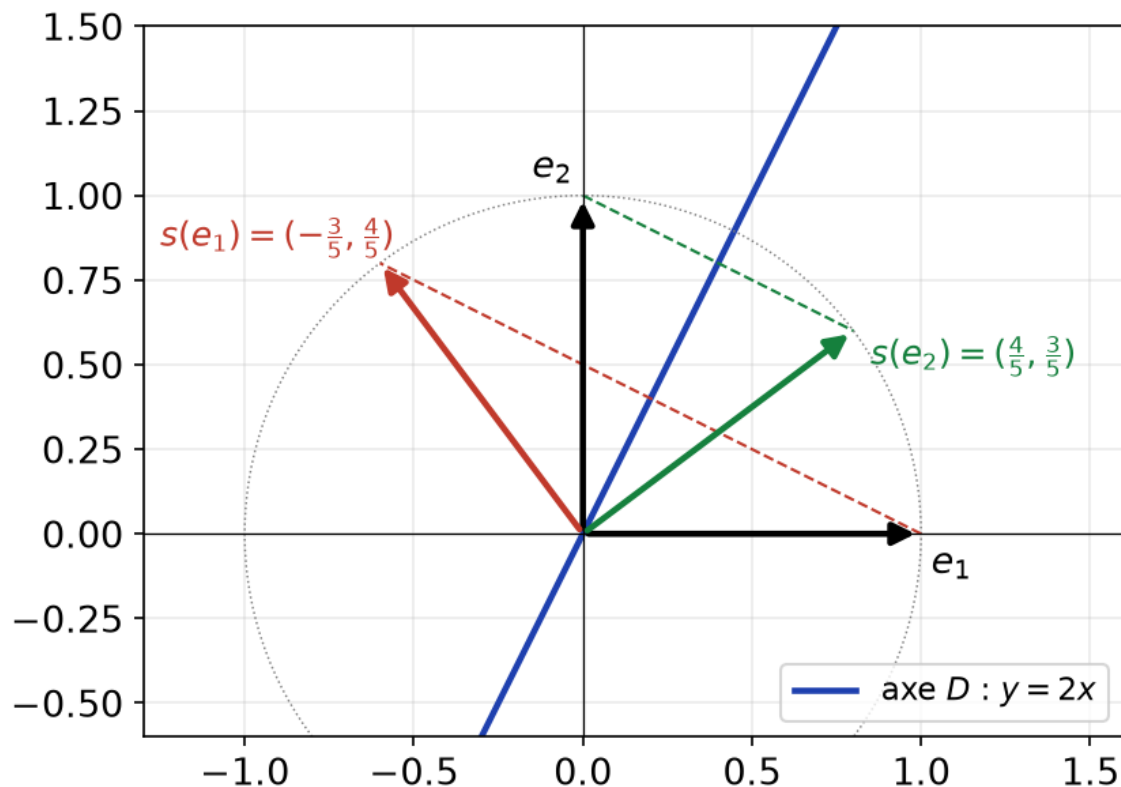
3. La formule de changement de base donne $S = P D' P^{-1}$. D'abord,

$$P D' = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}. \text{ Ensuite,}$$

$$S = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \\ 4 & -1 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

On contrôle que $S u_1 = \frac{1}{5}(-3 + 8, 4 + 6) = (1, 2) = u_1$. Enfin,

$s(3, 1) = \frac{1}{5}(-9 + 4, 12 + 3) = (-1, 3)$. La figure ci-dessous montre les images de e_1 et e_2 , c'est-à-dire les colonnes de S , symétriques de e_1 et e_2 par rapport à D .



4. La rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ a pour matrice $R = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. La matrice d'une composée étant le produit, on obtient

$$M = RS = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -4 & -3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Puis $M^2 = \frac{1}{25} \begin{pmatrix} 16 + 9 & 12 - 12 \\ 12 - 12 & 9 + 16 \end{pmatrix}$, donc $M^2 = I_2$. Autrement dit, $r \circ s$ est une symétrie : c'est d'ailleurs une autre réflexion.

Corrigé de l'exercice 5 : Isomorphisme entre applications linéaires et matrices

- On sait que $\dim \mathcal{L}(E, F) = \dim E \times \dim F$. Ainsi, $\dim \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}_2[X]) = 3 \times 3 = 9$. De même, $\dim \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) = 4$, donc $\dim \mathcal{L}(\mathcal{M}_2(\mathbb{R})) = 16$.
- Notons $\Phi: u \rightarrow \text{Mat}(u)$ l'isomorphisme de $\mathcal{L}(E)$ sur $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. La condition $u(e_1) \in \text{Vect}(e_1)$ signifie que la première colonne de la matrice est de la forme $(a, 0, 0)$, c'est-à-dire $a_{21} = a_{31} = 0$. Donc $\Phi(\mathcal{F})$ est l'ensemble des matrices vérifiant ces deux équations linéaires. C'est un sous-espace vectoriel, engendré par les sept matrices élémentaires E_{ij} autres que E_{21} et E_{31} . Par conséquent, $\mathcal{F} = \Phi^{-1}(\Phi(\mathcal{F}))$ est un sous-espace, et $\dim \mathcal{F} = 7$.
- La condition porte sur $u(e_1)$ et $u(e_2)$, qui doivent avoir une troisième coordonnée nulle. Ainsi, $\Phi(\mathcal{G})$ est défini par $a_{31} = a_{32} = 0$. Pour la même raison, $\dim \mathcal{G} = 7$.
- L'intersection est définie par les trois conditions $a_{21} = a_{31} = a_{32} = 0$. Ce sont les matrices triangulaires supérieures d'ordre 3, donc $\dim(\mathcal{F} \cap \mathcal{G}) = 6$.

Corrigé de l'exercice 6 : Rang par opérations élémentaires

- On prend le pivot 1 en haut à gauche. Les opérations $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$ donnent

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \text{ puis } L_3 \leftarrow L_3 - L_2 : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Il reste deux pivots, donc $\text{rg } A = 2$. D'après le théorème du rang, $\dim \ker A = 4 - 2 = 2$.

- Pour B , les opérations $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$ donnent les lignes $(0, 1, 2)$ et $(0, 2, 5)$. Ensuite, $L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2$ donne $(0, 0, 1)$. On obtient trois pivots, donc $\text{rg } B = 3$ et B est inversible.
- Les opérations sur les lignes ne changent pas le noyau. Ainsi, $\ker A$ est défini par $x + 2y + z + 3t = 0$ et $y + z + t = 0$. On tire $y = -z - t$, puis

$$x = -2y - z - 3t = z - t. \text{ Donc}$$

$$(x, y, z, t) = z(1, -1, 1, 0) + t(-1, -1, 0, 1).$$

Ces deux vecteurs sont libres, car leurs deux dernières coordonnées le montrent. Par conséquent,

$((1, -1, 1, 0), (-1, -1, 0, 1))$ est une base de $\ker A$. On vérifie par exemple

$$A \cdot {}^t(1, -1, 1, 0) = {}^t(1 - 2 + 1, 2 - 3, 1 - 3 + 2) = 00.$$

Corrigé de l'exercice 7 : Coordonnées et matrice de passage

1. On range les vecteurs en colonnes : $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$

2. Résolvons $PX = Y$, soit $x + z = a$, $x + y = b$, $y + z = c$. En additionnant, $x + y + z = \frac{a+b+c}{2}$. Par soustraction, $y = \frac{-a+b+c}{2}$, puis $x = \frac{a+b-c}{2}$ et $z = \frac{a-b+c}{2}$. Le système a une unique solution pour tout Y , donc P est inversible et

$$P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Comme P est inversible, $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^3$, et P est la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.

3. La formule $X = PX'$ donne $X' = P^{-1}X$. Avec $X = {}^t(2, 3, 5)$,

$$X' = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2+3-5 \\ -2+3+5 \\ 2-3+5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Vérification : $3(0, 1, 1) + 2(1, 0, 1) = (2, 3, 5)$. Donc v a pour coordonnées $(0, 3, 2)$ dans $\mathcal{B}'$.

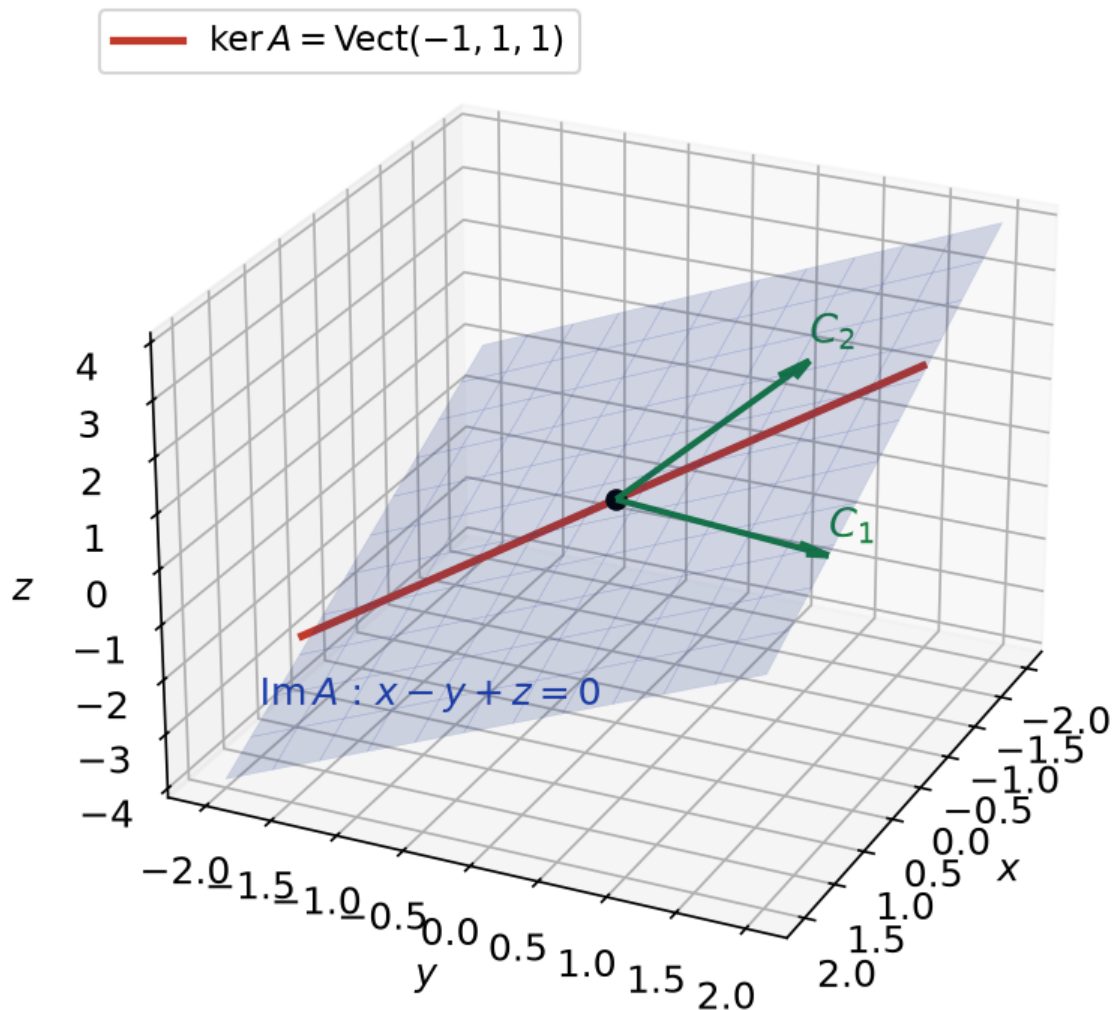
4. Cette fois, on connaît X' et on applique directement $X = PX'$:

$$X = (1+2, 1-1, -1+2) = (3, 0, 1). \text{ Le vecteur cherché est } (3, 0, 1).$$

Point de méthode : P transforme les nouvelles coordonnées en anciennes. Dans le sens inverse, il faut P^{-1} .

Corrigé de l'exercice 8 : Noyau, image et rang d'une matrice

1. Les opérations $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$ donnent les lignes $(0, 3, -3)$ et $(0, 3, -3)$. Puis $L_3 \leftarrow L_3 - L_2$ annule la troisième ligne. Il y a deux pivots, donc $\text{rg } A = 2$.
2. Le noyau est défini par $x - y + 2z = 0$ et $3y - 3z = 0$. Ainsi, $y = z$ et $x = y - 2z = -z$. Le théorème du rang donne $\dim \ker A = 1$, et $\ker A = \text{Vect}((-1, 1, 1))$. On vérifie : $-1 - 1 + 2 = 0$, $-2 + 1 + 1 = 0$ et $-1 + 2 - 1 = 0$.
3. L'image est engendrée par les colonnes $C_1 = (1, 2, 1)$, $C_2 = (-1, 1, 2)$ et $C_3 = (2, 1, -1)$. Or C_1 et C_2 ne sont pas colinéaires, et $\text{rg } A = 2$. Donc (C_1, C_2) est une base de l'image. Cherchons une équation $\alpha x + \beta y + \gamma z = 0$ satisfaite par C_1 et C_2 : $\alpha + 2\beta + \gamma = 0$ et $-\alpha + \beta + 2\gamma = 0$. En additionnant, $3\beta + 3\gamma = 0$; on prend $\beta = -1$, $\gamma = 1$, puis $\alpha = 1$. Ainsi, **$\text{Im } A$ est le plan d'équation $x - y + z = 0$** . De plus, C_3 vérifie bien $2 - 1 - 1 = 0$.
4. Le vecteur $(-1, 1, 1)$ donne $-1 - 1 + 1 = -1 \neq 0$. Il n'est donc pas dans l'image, et $\ker A \cap \text{Im } A = \{0\}$. Comme $\dim \ker A + \dim \text{Im } A = 1 + 2 = 3$, **$\ker A$ et $\text{Im } A$ sont supplémentaires**. La figure ci-dessous montre cette situation : la droite du noyau perce le plan de l'image en l'origine seulement.



5. Le système $AX = B$ est compatible si et seulement si $B \in \text{Im } A$. Par conséquent, il est compatible si et seulement si $\alpha - \beta + \gamma = 0$. Dans ce cas, ses solutions forment une droite affine dirigée par $(-1, 1, 1)$.

Corrigé de l'exercice 9 : Rang selon un paramètre

1. On garde le pivot 1 de la première ligne. Les opérations $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - aL_1$ donnent les lignes $(0, a - 1, 1 - a)$ et $(0, 1 - a, 1 - a^2)$. Ensuite, $L_3 \leftarrow L_3 + L_2$ donne $(0, 0, 2 - a - a^2)$. Or $2 - a - a^2 = (1 - a)(2 + a)$. On obtient donc

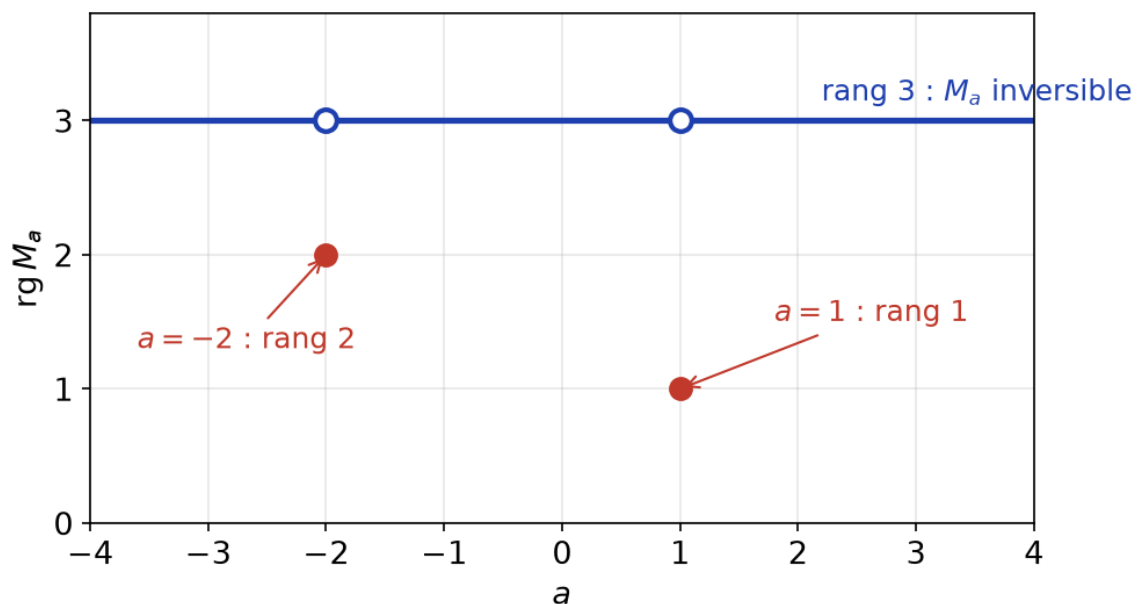
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & a-1 & 1-a \\ 0 & (1-a)(2+a) & 0 \end{pmatrix}.$$

Remarquez qu'aucune division n'a été faite : les opérations sont valables pour tout a .

2. On distingue trois cas.

- Si $a \notin \{1, -2\}$, les trois coefficients diagonaux 1 , $a-1$ et $(1-a)(2+a)$ sont non nuls : $\text{rg } M_a = 3$.
- Si $a = 1$, les trois lignes de M_1 sont égales à $(1, 1, 1)$: $\text{rg } M_1 = 1$.
- Si $a = -2$, la forme échelonnée a pour lignes $(1, 1, -2)$, $(0, -3, 3)$ et $(0, 0, 0)$: $\text{rg } M_{-2} = 2$.

La figure ci-dessous résume ce résultat : le rang vaut 3 partout, sauf en deux valeurs isolées.



3. Une matrice carrée d'ordre 3 est inversible si et seulement si son rang vaut 3. Donc M_a est **inversible si et seulement si** $a \notin \{1, -2\}$.
4. Pour $a = -2$, le noyau est défini par $x + y - 2z = 0$ et $-3y + 3z = 0$. Ainsi, $y = z$ et $x = z$. Donc $\ker M_{-2} = \text{Vect}((1, 1, 1))$. C'est cohérent, car chaque ligne de M_{-2} a une somme nulle.

Corrigé de l'exercice 10 : Systèmes de Cramer et système à paramètre

1. La matrice du système est $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix}$. Les opérations $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$, $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$ puis $L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2$ donnent les pivots 1, 1, 2. La matrice est de rang 3, donc inversible : c'est un système de Cramer. Sur le système, les mêmes opérations donnent $y + 2z = 8$ et $3y + 8z = 30$, puis $2z = 6$. D'où $z = 3$, $y = 8 - 6 = 2$ et $x = 6 - 2 - 3 = 1$. L'unique solution est $(x, y, z) = (1, 2, 3)$.

2.

- Si $a \notin \{1, -2\}$, M_a est inversible et le système est de Cramer. Cherchons une solution de la forme $x = y = z = t$. Chaque équation devient $(a + 2)t = 1$, donc $t = \frac{1}{a+2}$. Par unicité, **la solution est** $x = y = z = \frac{1}{a+2}$.
- Si $a = 1$, les trois équations se réduisent à $x + y + z = 1$. L'ensemble des solutions est **le plan affine** $\{(1 - y - z, y, z) : y, z \in \mathbb{R}\}$.
- Si $a = -2$, la somme des trois équations donne $0 = 3$, car chaque colonne de M_{-2} est de somme nulle. Le système est **incompatible**.

3. Dans le premier cas, $\text{Im } M_a = \mathbb{R}^3$ et $\ker M_a = \{0\}$: existence et unicité. Pour $a = 1$, le second membre ${}^t(1, 1, 1)$ appartient à l'image $\text{Vect}({}^t(1, 1, 1))$. Les solutions forment donc $X_0 + \ker M_1$, avec $X_0 = {}^t(1, 0, 0)$ et $\ker M_1$ de dimension 2. Pour $a = -2$, l'image est de dimension 2 et contenue dans le plan $\alpha + \beta + \gamma = 0$, car $L_1 + L_2 + L_3 = 0$. Elle est donc égale à ce plan. Or $1 + 1 + 1 \neq 0$: le second membre n'est pas dans l'image.

Corrigé de l'exercice 11 : Changement de base et puissances d'une matrice

1. La matrice de (f_1, f_2, f_3) est $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$. Les opérations $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$ donnent $(0, -2, 1)$ et $(0, -1, -1)$. Puis $L_3 \leftarrow 2L_3 - L_2$ donne $(0, 0, -3)$. Il y a trois pivots, donc **$\mathcal{B}'$ est une base**.
2. On calcule $A f_1 = (4, 4, 4) = 4 f_1$, $A f_2 = (2 - 1, 1 - 2, 1 - 1) = f_2$ et $A f_3 = (1 - 1, 2 - 1, 1 - 2) = f_3$. Ainsi, $D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. De plus, $\text{tr } D = 6 = 2 + 2 + 2 = \text{tr } A$, comme prévu pour deux matrices semblables.
3. Les coefficients diagonaux de A valent $2 = 1 + 1$ et les autres valent 1 , donc $A = I_3 + J$. Ensuite, chaque coefficient de J^2 vaut $1 + 1 + 1 = 3$. Donc $J^2 = 3J$.
4. Montrons par récurrence que $A^n = I_3 + c_n J$, avec $c_n = \frac{4^n - 1}{3}$. Pour $n = 0$, $c_0 = 0$ convient. Supposons le résultat vrai au rang n . Alors

$$A^{n+1} = (I_3 + c_n J)(I_3 + J) = I_3 + (1 + c_n + 3c_n) J = I_3 + (1 + 4c_n) J.$$
 Or $1 + 4c_n = 1 + \frac{4^{n+1} - 4}{3} = \frac{4^{n+1} - 1}{3} = c_{n+1}$. D'où $A^n = I_3 + \frac{4^n - 1}{3} J$ pour tout n . Contrôle : $\text{tr}(A^n) = 3 + (4^n - 1) = 4^n + 2$. Par ailleurs, A^n et D^n sont semblables et $\text{tr}(D^n) = 4^n + 1 + 1$. Les deux traces coïncident.

Point de méthode : une base de vecteurs vérifiant $u(f) = \lambda f$ rend la matrice diagonale. Le calcul des puissances devient alors immédiat, et la trace permet de contrôler le résultat.

Corrigé de l'exercice 12 : Matrices équivalentes et matrice J_r

1. La deuxième colonne vaut deux fois la première, et celle-ci est non nulle. Donc $\text{rg } A = 1$. Le noyau est défini par $x + 2y = 0$, d'où $\ker A = \text{Vect}((2, -1))$.
2. On suit la démonstration du cours. D'abord, on choisit $g_1 = (1, 0)$, qui n'est pas dans le noyau, et $g_2 = (2, -1)$, base du noyau. Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires, donc forment une base de $\mathbb{R}^2$. Ensuite, on pose $h_1 = u(g_1) = (1, 2, 3)$, que l'on complète par $h_2 = (0, 1, 0)$ et $h_3 = (0, 0, 1)$. La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est triangulaire à diagonale non nulle, donc inversible : c'est une base. Enfin, $u(g_1) = h_1$ et $u(g_2) = 0$, si bien que **la matrice de u dans ces bases est J_1** .

3. Notons Q la matrice de passage vers (h_1, h_2, h_3) et P celle vers (g_1, g_2) . La formule de changement de base donne $J_1 = Q^{-1} A P$, donc $A = Q J_1 P^{-1}$, avec

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

On remarque que $P^2 = I_2$, donc $P^{-1} = P$. Vérifions : $Q J_1 = \begin{pmatrix} 1 & \\ 2 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$, puis

$$Q J_1 P = \begin{pmatrix} 1 & \\ 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} = A. \text{ L'égalité est vérifiée.}$$

4. Deux matrices de même taille sont équivalentes si et seulement si elles ont le même rang. Or $\text{rg } C = 1$, donc **A et C sont équivalentes**. En revanche, la dernière matrice est de rang 2 : **elle n'est pas équivalente à A** .

Corrigé de l'exercice 13 : Matrices extraites et rang

- On observe que $L_1 + L_3 = (8, 10, 12) = 2L_2$. Les lignes sont donc liées, et le rang des lignes est au plus 2. Comme $\text{rg}({}^t M) = \text{rg } M$, on a $\text{rg } M \leq 2$. Ensuite, la matrice extraite $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ vérifie $1 \times 5 - 2 \times 4 = -3 \neq 0$: elle est inversible. D'après le théorème des matrices extraites, $\text{rg } M \geq 2$. Finalement, $\text{rg } M = 2$.
- Les matrices extraites d'ordre 2 de N s'obtiennent en choisissant deux colonnes. Leurs déterminants valent $b - a$, $c - a$ et $c - b$.
 - Si a, b, c ne sont pas tous égaux, l'une de ces différences est non nulle. Une matrice extraite d'ordre 2 est alors inversible, et $\text{rg } N \geq 2$. Comme N n'a que deux lignes, $\text{rg } N = 2$.
 - Si $a = b = c$, la seconde ligne vaut a fois la première. Le rang vaut alors 1, puisque la première ligne est non nulle.

Donc $\text{rg } N = 2$ **si et seulement si a, b, c ne sont pas tous égaux**.

- D'après l'invariance du rang par transposition, $\text{rg}({}^t N) = \text{rg } N$. Ainsi, **${}^t N$ est de rang 2 si les trois réels ne sont pas tous égaux, et de rang 1 sinon**. Autrement dit, les trois vecteurs

$(1, a), (1, b), (1, c)$ engendrent $\mathbb{R}^2$ si et seulement si deux d'entre eux ont des secondes coordonnées différentes.

Corrigé de l'exercice 14 : Propriétés de la trace

1. Par linéarité de la trace et d'après $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$, on a $\text{tr}(AB - BA) = 0$. Or $\text{tr}(I_n) = n \neq 0$. Par conséquent, l'égalité $AB - BA = I_n$ est impossible.
2. Le produit $A E_{ij}$ a pour j -ième colonne la i -ième colonne de A , et des colonnes nulles ailleurs. Son seul coefficient diagonal éventuellement non nul est donc en position (j, j) , égal à a_{ji} . Ainsi, $\text{tr}(A E_{ij}) = a_{ji}$. Si $\text{tr}(AM) = 0$ pour toute M , on prend $M = E_{ij}$: tous les coefficients a_{ji} sont nuls, et $A = 0$.
3. Prenons $A = E_{12}$, $B = E_{21}$ et $C = E_{11}$. D'une part, $AB = E_{11}$, donc $ABC = E_{11}$, de trace 1. D'autre part, $BA = E_{22}$, donc $BAC = E_{22} E_{11} = 0$, de trace 0. Ainsi, $\text{tr}(ABC) = 1 \neq 0 = \text{tr}(BAC)$.
4. Le coefficient (j, j) de ${}^t A A$ vaut $\sum_i ({}^t A)_j a_{ij} = \sum_i a_{ij}^2$. En sommant sur j , $\text{tr}({}^t A A) = \sum_{i,j} a_{ij}^2$. Si ${}^t A A = 0$, cette somme de carrés de réels est nulle. Donc chaque a_{ij} est nul, et $A = 0$.

Corrigé de l'exercice 15 : Trace et similitude

1. Si $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = P^{-1} I_2 P$, alors cette matrice serait égale à I_2 , ce qui est faux. Donc **elles ne sont pas semblables**, bien qu'elles aient la même trace et le même rang.
2. Pour A , on a $ad - bc = 4 - 6 = -2 \neq 0$, donc $\text{rg } A = 2$. En revanche, $\text{rg } B = 1$. Or deux matrices semblables sont équivalentes, donc de même rang. Par conséquent, **A et B ne sont pas semblables**, malgré l'égalité des traces.
3. On cherche $v = (x, y)$ tel que $(C - 3I_2)v = 0$, soit $-x + y = 0$. On prend

$v = (1, 1)$: en effet, $Cv = (2 + 1, 3) = (3, 3)$. De plus, $Ce_1 = 2e_1$. Dans la base (e_1, v) , la matrice de l'endomorphisme associé est donc $\text{diag}(2, 3)$. La matrice de passage est $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Vérification : $CP = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $P \text{diag}(2, 3) = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

4. La trace de $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ vaut 6, alors que $\text{tr } C = 5$. La trace étant un invariant de similitude, **ces matrices ne sont pas semblables**.

Corrigé de l'exercice 16 : Trace d'un projecteur

1. Un vecteur de Δ s'écrit $(t, t, 0)$. Il appartient à Π si et seulement si $t + t - 0 = 0$, soit $t = 0$. Donc $\Pi \cap \Delta = \{0\}$. De plus, $\dim \Pi + \dim \Delta = 2 + 1 = 3$. Par conséquent, $\Pi \oplus \Delta = \mathbb{R}^3$.

2. Soit $v = (x, y, z)$. On cherche λ tel que $v - \lambda(1, 1, 0) \in \Pi$, c'est-à-dire $(x - \lambda) + (y - \lambda) - z = 0$. D'où $\lambda = \frac{x + y - z}{2}$, puis

$$\begin{pmatrix} \frac{x - y + z}{2}, \\ \frac{-x + y + z}{2}, \\ z \end{pmatrix}, \quad M = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

3. Calculons $4M^2$, carré de la matrice entière. Sa première ligne vaut $(1 + 1, -1 - 1, 1 - 1 + 2) = (2, -2, 2)$. Sa deuxième vaut $(-1 - 1, 1 + 1, -1 + 1 + 2) = (-2, 2, 2)$. Sa troisième vaut $(0, 0, 4)$. En divisant par 4, on retrouve M : $M^2 = M$. Ensuite, $\text{tr } M = \frac{1 + 1 + 2}{2} = 2$. Or $\text{Im } p = \Pi$ est de dimension 2. Donc $\text{tr } M = \text{rg } M = 2$.

4. Les vecteurs $(1, -1, 0)$ et $(0, 1, 1)$ vérifient l'équation de Π et ne sont pas colinéaires : ils forment une base de Π . On les complète par $(1, 1, 0)$, base de Δ . Comme la somme est directe, on obtient une base de $\mathbb{R}^3$, dans laquelle **la matrice de p est $\text{diag}(1, 1, 0)$** .

5. La matrice Q est celle d'un projecteur, puisque $Q^2 = Q$. D'après le cours,

$\text{rg } Q = \text{tr } Q = 0$. Une matrice de rang nul est nulle, donc $Q = 0$.

Corrigé de l'exercice 17 : Endomorphisme nilpotent d'indice 3

1. Si l'on avait $u^2(x) = 0$ pour tout x , alors u^2 serait nul. Or $u^2 \neq 0$, donc **il existe x tel que $u^2(x) \neq 0$** .
2. Supposons $ax + bu(x) + cu^2(x) = 0$. Appliquons u^2 : comme $u^3 = 0$ et $u^4 = 0$, il reste $au^2(x) = 0$, donc $a = 0$. Appliquons ensuite u : il reste $bu^2(x) = 0$, donc $b = 0$. Enfin, $cu^2(x) = 0$ donne $c = 0$. La famille est libre, et elle a trois vecteurs dans un espace de dimension 3. **C'est donc une base.**
3. Dans cette base, $u(x) = u(x)$, $u(u(x)) = u^2(x)$ et $u(u^2(x)) = 0$. D'où la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ses deux premières colonnes sont libres et la troisième est nulle. Donc $\text{rg } u = 2$ et $\text{tr } u = 0$.

4. Le calcul donne $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0$. Puis $A^3 = A^2 A$ a pour première ligne la troisième ligne de A , qui est nulle, donc $A^3 = 0$. On choisit $x = e_3$, puisque $A^2 e_3 = e_1 \neq 0$. Alors $A e_3 = (1, 1, 0)$ et $A^2 e_3 = (1, 0, 0)$. **La famille $(e_3, (1, 1, 0), (1, 0, 0))$ est une base du type cherché.**

Corrigé de l'exercice 18 : Endomorphismes de rang 1

1. La matrice A est de rang 1, donc équivalente à J_1 : il existe Q, P inversibles telles que $A = Q J_1 P^{-1}$. Or $J_1 = E_1 {}^t E_1$, où E_1 est la première colonne de I_n . Posons $X = Q E_1$, première colonne de Q , et ${}^t Y = {}^t E_1 P^{-1}$, première ligne de P^{-1} . Ces vecteurs sont non nuls, car Q et P^{-1} sont inversibles. Ainsi, $A = X {}^t Y$.

2. Le coefficient (i, j) de A vaut $x_i y_j$. Donc $\text{tr } A = \sum_i x_i y_i = {}^t Y X$. Ensuite, par associativité,

$$A^2 = X ({}^t Y X) {}^t Y = (\text{tr } A) X {}^t Y = (\text{tr } A) A.$$

3. Ici, $A = X {}^t X$ avec $X = {}^t(1, 2, 3)$, et $\text{tr } A = 1 + 4 + 9 = 14$. Ainsi, $A^2 = 14 A$. Par récurrence, si $A^n = 14^{n-1} A$, alors $A^{n+1} = 14^{n-1} A^2 = 14^n A$. Donc $A^n = 14^{n-1} A$ **pour tout** $n \geq 1$.

4. La matrice de u dans une base est de rang 1, donc $u^2 = (\text{tr } u) u$. Notons $t = \text{tr } u$. Si $t \neq 0$ et $q = \frac{1}{t} u$, alors $q^2 = \frac{1}{t^2} u^2 = \frac{1}{t} u = q$: **q est un projecteur**. Si $t = 0$, la même relation donne directement $u^2 = 0$.

Point de méthode : une matrice de rang 1 s'écrit toujours « colonne fois ligne ». Cette écriture ramène de nombreux calculs au produit scalaire ${}^t Y X$.

Corrigé de l'exercice 19 : Centre de l'algèbre des matrices

- Le coefficient (k, l) de $A E_{ij}$ vaut $\sum_m a_{km} (E_{ij})_{ml} = a_{ki}$ si $l = j$, et 0 sinon. Ainsi, **$A E_{ij}$ a pour j -ième colonne la i -ième colonne de A** , les autres colonnes étant nulles. De même, le coefficient (k, l) de $E_{ij} A$ vaut a_{jl} si $k = i$, et 0 sinon. Donc **$E_{ij} A$ a pour i -ième ligne la j -ième ligne de A** , les autres lignes étant nulles.
- Supposons $A E_{ij} = E_{ij} A$. Regardons le coefficient (k, j) avec $k \neq i$. À gauche, il vaut a_{ki} . À droite, il est nul, car seule la ligne i est non nulle. Donc $a_{ki} = 0$ pour tout $k \neq i$: **A est diagonale**. Regardons ensuite le coefficient (i, j) : à gauche a_{ii} , à droite a_{jj} . Tous les coefficients diagonaux sont donc égaux. Par conséquent, **$A = \lambda I_n$** . Réciproquement, **λI_n commute avec toute matrice**.
- Par l'isomorphisme entre $\mathcal{L}(E)$ et $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, qui transforme la composée en produit, on obtient : **les endomorphismes qui commutent avec tous les autres sont les homothéties λid_E** .

Corrigé de l'exercice 20 : Formes linéaires qui vérifient $\varphi(AB) = \varphi(BA)$

1. Soit $i \neq j$. D'une part, $E_{ii} E_{ij} = E_{ij}$. D'autre part, $E_{ij} E_{ii} = 0$, car $j \neq i$. L'hypothèse donne alors $\varphi(E_{ij}) = \varphi(E_{ii} E_{ij}) = \varphi(E_{ij} E_{ii}) = \varphi(0)$. Or φ est linéaire, donc $\varphi(E_{ij}) = 0$.
2. Pour tous i, j , on a $E_{ij} E_{ji} = E_{ii}$ et $E_{ji} E_{ij} = E_{jj}$. Par conséquent, $\varphi(E_{ii}) = \varphi(E_{jj})$.
3. Notons $\lambda = \varphi(E_{11})$. Toute matrice s'écrit $A = \sum_{i,j} a_{ij} E_{ij}$. Par linéarité et d'après les deux questions précédentes,

$$\varphi(A) = \sum_i a_{ii} \varphi(E_{ii}) = \lambda \sum_i a_{ii} = \lambda \operatorname{tr} A.$$

Donc $\varphi = \lambda \operatorname{tr}$.

4. Une telle forme s'écrit $\lambda \operatorname{tr}$. La condition $\varphi(I_n) = 1$ impose $\lambda n = 1$, soit $\lambda = \frac{1}{n}$. Réciproquement, $\frac{1}{n} \operatorname{tr}$ convient. **Il existe donc une unique telle forme : $\varphi = \frac{1}{n} \operatorname{tr}$.**

Corrigé de l'exercice 21 : Matrices de trace nulle en taille 2

1. Si $u = \lambda \operatorname{id}$, alors $A = \lambda I_2$ et $\operatorname{tr} A = 2\lambda = 0$. Donc $\lambda = 0$ et $A = 0$.
2. La famille $(x, u(x))$ est libre et compte deux vecteurs dans $\mathbb{K}^2$: c'est une base. Dans cette base, $u(x) = 0 \cdot x + 1 \cdot u(x)$, d'où la première colonne ${}^t(0, 1)$. Ensuite, $u(u(x))$ se décompose en $c x + d u(x)$, d'où la seconde colonne ${}^t(c, d)$. La trace est invariante par changement de base, donc $0 + d = \operatorname{tr} A = 0$. Ainsi, **la matrice est** $\begin{pmatrix} 0 & c \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
3. Si u est une homothétie, $A = 0$ est déjà de diagonale nulle. Sinon, la question 2 fournit une base où la matrice de u est de diagonale nulle ; elle est semblable à A . Dans les deux cas, **A est semblable à une matrice de diagonale nulle.**

4. On calcule $A^2 = \begin{pmatrix} 1+6 & 2-2 \\ 3-3 & 6+1 \end{pmatrix} = 7I_2$. Prenons $x = e_1$: $A e_1 = (1, 3)$, non colinéaire à e_1 . De plus, $A(Ae_1) = A^2 e_1 = 7 e_1$. Avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, on obtient donc $P^{-1} A P = \begin{pmatrix} 0 & 7 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Vérification : $AP = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ et $P \begin{pmatrix} 0 & 7 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$.

Point de méthode : pour obtenir une base où la matrice est simple, partez d'un vecteur x et de son image $u(x)$. La trace, invariante, fixe ensuite un coefficient sans calcul.

Corrigé de l'exercice 22 : Problème : l'opérateur de différence sur les polynômes

1. Pour $P, Q \in E$ et λ, μ réels, $\Delta(\lambda P + \mu Q) = \lambda \Delta(P) + \mu \Delta(Q)$, par linéarité de $P \rightarrow P(X+1)$. De plus, $P(X+1)$ et P ont même degré et même coefficient dominant. Donc $\deg \Delta(P) \leq \deg P - 1$ si P n'est pas constant, et $\Delta(P) \in E$. Ensuite, $\Delta(1) = 0$, $\Delta(X) = 1$, $\Delta(X^2) = 2X + 1$ et $\Delta(X^3) = 3X^2 + 3X + 1$. D'où

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & , & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Les colonnes 2, 3 et 4 sont échelonnées, avec les pivots 1, 2, 3 : elles sont libres. La première est nulle. Donc $\text{rg } \Delta = 3$. Le théorème du rang donne $\dim \ker \Delta = 1$. Or les constantes sont dans le noyau, donc $\ker \Delta = \mathbb{R}_0[X]$. De plus, $\text{Im } \Delta \subset \mathbb{R}_2[X]$, car le degré baisse. Les deux espaces ont la dimension 3, donc $\text{Im } \Delta = \mathbb{R}_2[X]$. Enfin, la diagonale de A est nulle : $\text{tr } \Delta = 0$.
3. Les polynômes H_k sont de degrés respectifs 0, 1, 2, 3. Une famille de polynômes non nuls de degrés distincts est libre. Avec 4 vecteurs en dimension 4, $\mathcal{H}$ est une base. On développe $H_2 = \frac{1}{2}X^2 - \frac{1}{2}X$ et $H_3 = \frac{1}{6}X^3 - \frac{1}{2}X^2 + \frac{1}{3}X$. Donc

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} & 0 \end{pmatrix}, \} , \}$$

4. D'abord, $\Delta(H_0) = 0$ et $\Delta(H_1) = 1 = H_0$. Ensuite,

$$\Delta(H_2) = \frac{(X+1)X - X(X-1)}{2} = \frac{2X}{2} = H_1. \text{ De même, en factorisant } X(X-1),$$

$$\Delta(H_3) = \frac{X(X-1)((X+1) - (X-2))}{6} = \frac{3X(X-1)}{6} = H_2.$$

Ainsi, $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, et la formule de changement de base donne $N = P^{-1} A P$

. On contrôle que $\text{tr } N = 0 = \text{tr } A$. Autrement dit, Δ décale la base :

$$H_3 \rightarrow H_2 \rightarrow H_1 \rightarrow H_0 \rightarrow 0.$$

5. On cherche $X^2 = \alpha H_2 + \beta H_1 + \gamma H_0$. Le coefficient de X^2 impose $\alpha = 2$. Alors

$$2H_2 = X^2 - X, \text{ donc } X^2 = 2H_2 + H_1. \text{ Ainsi, } X^2 = 2H_2 + H_1. \text{ Posons}$$

$$Q = 2H_3 + H_2. \text{ Par linéarité, } \Delta(Q) = 2H_2 + H_1 = X^2. \text{ Donc}$$

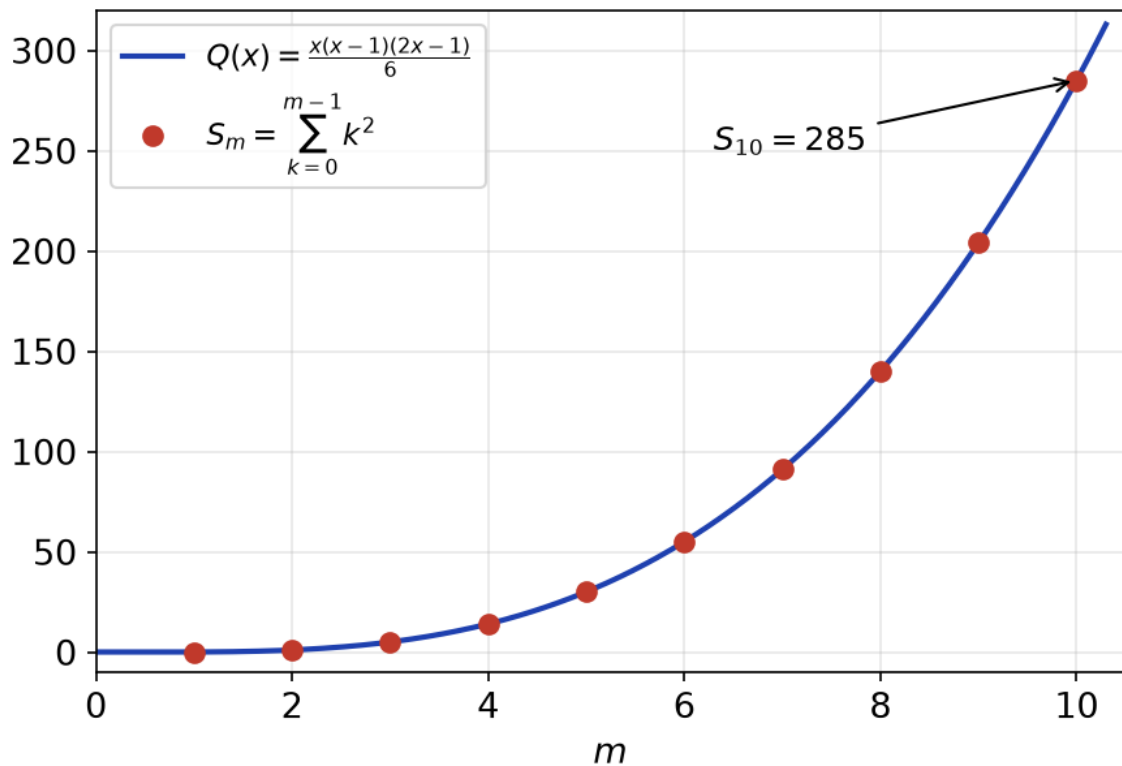
$$Q = 2H_3 + H_2 \text{ convient.}$$

6. Pour tout entier k , $Q(k+1) - Q(k) = k^2$. En sommant de $k = 0$ à $m-1$, la somme est télescopique :

$$\sum_{k=0}^{m-1} k^2 = Q(m) - Q(0) = \frac{m(m-1)(m-2)}{3} + \frac{m(m-1)}{2}.$$

Or $\frac{m-2}{3} + \frac{1}{2} = \frac{2m-1}{6}$. Donc $\sum_{k=0}^{m-1} k^2 = \frac{m(m-1)(2m-1)}{6}$. Par exemple, pour

$m = 3$, on trouve $0 + 1 + 4 = 5$ et $\frac{3 \times 2 \times 5}{6} = 5$. Comme le montre la figure ci-dessous, les sommes partielles se placent exactement sur la courbe de Q .



[Revenir aux énoncés des exercices](#)

Pour aller plus loin en maths sup

- Le cours : [matrices et applications linéaires, cours de maths sup](#)
- Les énoncés : [exercices de maths sup sur matrices et applications linéaires](#)
- À maîtriser avant : [Applications linéaires et théorème du rang](#), [Calcul matriciel et systèmes linéaires](#)
- Chapitre précédent : [Formes linéaires, hyperplans et sous-espaces affines](#)
- Chapitre suivant : [Groupe symétrique et déterminants](#)
- Tester vos connaissances : [QCM de maths sup par chapitre](#)

- Le sommaire : [tous les chapitres de maths sup](#) et les [chapitres de maths spé](#)