

Loi des grands nombres et TCL

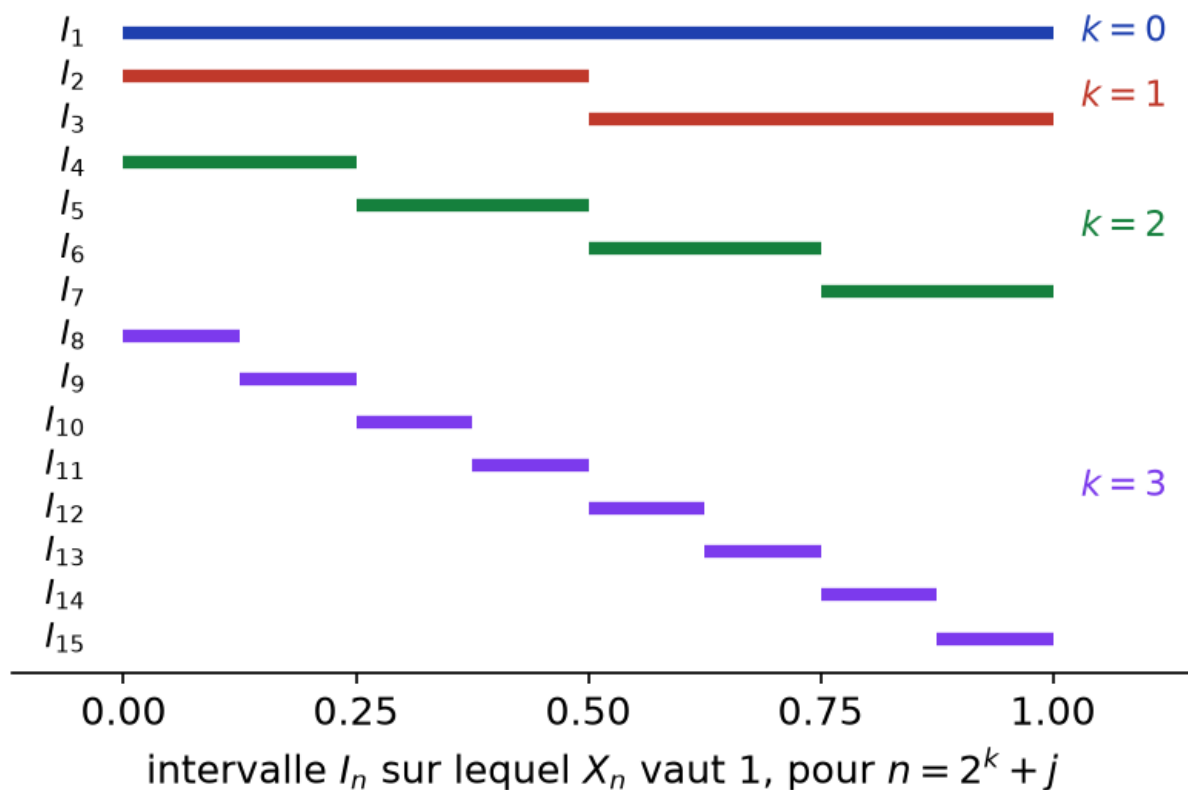
Exercice 1 : Convergence presque sûre sans convergence L^1

On se place sur $\Omega = [0,1]$ muni de la tribu borélienne et de la mesure de Lebesgue. Pour $n \geq 1$, on pose $X_n = n \cdot 1_{[0, 1/n]}$ et $Y_n = \sqrt{n} \cdot 1_{[0, 1/n]}$.

1. Montrer que $X_n \rightarrow 0$ presque sûrement. Préciser, pour $\omega = 0,3$, à partir de quel rang $X_n(\omega) = 0$.
2. En déduire que $X_n \rightarrow 0$ en probabilité.
3. Calculer $E(X_n)$. La suite (X_n) converge-t-elle dans L^1 ?
4. Montrer que $Y_n \rightarrow 0$ dans L^1 mais pas dans L^2 .

Exercice 2 : La bosse glissante

On reste sur $\Omega = [0,1]$ muni de la mesure de Lebesgue. Tout entier $n \geq 1$ s'écrit de façon unique $n = 2^k + j$ avec $k \in \mathbb{N}$ et $0 \leq j < 2^k$. On pose $I_n = [j \cdot 2^{-k}, (j+1) \cdot 2^{-k}]$ et $X_n = 1_{I_n}$. La figure ci-dessous représente les intervalles I_1 à I_{15} .



1. Soit $p \geq 1$. Calculer $E(X_n^p)$ et montrer que $X_n \rightarrow 0$ dans L^p et en probabilité.
2. Montrer que, pour tout $\omega \in [0,1]$, la suite $(X_n(\omega))$ prend une infinité de fois la valeur 1 et une infinité de fois la valeur 0.
3. En déduire que (X_n) ne converge presque sûrement vers aucune variable aléatoire.
4. Exhiber une sous-suite de (X_n) qui converge presque sûrement vers 0.

Exercice 3 : Convergence en loi sans convergence en probabilité

Soit X une variable de loi $\mathcal{N}(0,1)$. On pose $X_n = -X$ pour tout n , puis $Z_n = (-1)^n X$.

1. Montrer que X_n converge en loi vers X .
2. Calculer $P(|X_n - X| > 1)$ à l'aide de Φ , la fonction de répartition de $\mathcal{N}(0,1)$. Conclure.

3. La suite (Z_n) converge-t-elle en loi ? En probabilité ?
4. Soit Y une variable de loi $\mathcal{N}(0,1)$ indépendante de X . Montrer que X_n converge aussi en loi vers Y . Pourquoi cela ne contredit-il pas l'unicité de la limite ?

Exercice 4 : Convergence en loi vers une constante

Soit $c \in \mathbb{R}$ et (X_n) une suite de variables aléatoires réelles.

1. Montrer que si $X_n \mathcal{L} c$, alors $X_n \xrightarrow{P} c$.
2. Application : soit X_n de loi uniforme sur $[c - 1/n, c + 1/n]$. Montrer directement, par les fonctions de répartition, que $X_n \mathcal{L} c$, et calculer $P(|X_n - c| > \epsilon)$.
3. Soit $Y_n = X_n + T_n$, où T_n suit une loi exponentielle de paramètre n . Montrer que $Y_n \xrightarrow{P} c$.

Exercice 5 : Bernoulli indépendantes et Borel-Cantelli

Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables indépendantes, X_n suivant une loi de Bernoulli de paramètre $p_n \in [0,1]$.

1. Montrer que $X_n \rightarrow 0$ en probabilité si et seulement si $p_n \rightarrow 0$.
2. Pour $q \geq 1$, montrer que $X_n \rightarrow 0$ dans L^q si et seulement si $p_n \rightarrow 0$.
3. Montrer que $X_n \rightarrow 0$ presque sûrement si et seulement si $\sum p_n < \infty$.
4. Conclure dans les cas $p_n = 1/n$ et $p_n = 1/n^2$.

Exercice 6 : Record de variables exponentielles

Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables indépendantes de loi exponentielle de paramètre 1.

1. Pour $c > 0$ et $n \geq 2$, calculer $P(X_n > c \ln n)$.
2. Montrer que, pour $c > 1$, presque sûrement $X_n \leq c \ln n$ à partir d'un certain rang.
3. Montrer que presque sûrement $X_n > \ln n$ pour une infinité d'indices n .
4. En déduire que $\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{X_n}{\ln n} = 1$ presque sûrement.

Exercice 7 : Convergence rapide en probabilité

Soit (X_n) une suite de variables aléatoires et X une variable aléatoire.

1. On suppose que, pour tout $\varepsilon > 0$, $\sum_n P(|X_n - X| > \varepsilon) < \infty$. Montrer que $X_n \rightarrow X$ presque sûrement.
2. On suppose seulement que $X_n \rightarrow X$ en probabilité. Construire une sous-suite (X_{n_k}) qui converge presque sûrement vers X .
3. Application : on suppose que $\sum_n E(|X_n - X|^2) < \infty$. Montrer que $X_n \rightarrow X$ presque sûrement.
4. Montrer qu'une suite (X_n) converge en probabilité vers X si et seulement si toute sous-suite admet une sous-suite qui converge presque sûrement vers X .

Exercice 8 : Loi faible pour des variables non corrélées

Soit (X_n) une suite de variables de carré intégrable, deux à deux non corrélées, avec $E(X_n) = m_n$ et $\text{Var}(X_n) \leq C$ pour tout n . On note $S_n = X_1 + \dots + X_n$.

1. Montrer que $\frac{S_n - E(S_n)}{n} \rightarrow 0$ dans L^2 .
2. En déduire une majoration de $P\left(\left|\frac{S_n - E(S_n)}{n}\right| \geq \varepsilon\right)$.
3. Application : les X_n sont indépendantes de Bernoulli de paramètres p_n , et $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n p_k \rightarrow p$. Montrer que $S_n / n \rightarrow p$ en probabilité.
4. Traiter le cas $p_k = \frac{1}{2} + \frac{(-1)^k}{4}$.

Exercice 9 : Taille d'un échantillon, Tchebychev contre TCL

On veut estimer la probabilité p inconnue qu'une pièce tombe sur pile. On note F_n la fréquence de piles en n lancers indépendants. On cherche n tel que $P(|F_n - p| \geq 0,01) \leq 0,05$.

1. Calculer $E(F_n)$ et $\text{Var}(F_n)$, puis montrer que $\text{Var}(F_n) \leq \frac{1}{4n}$.
2. À l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, donner une valeur de n qui convient quel que soit p .
3. À l'aide du théorème central limite, donner la taille approximative suffisante. On utilisera $\Phi(1,96) \approx 0,975$.
4. Comparer les deux résultats et commenter la nature de chacun.

Exercice 10 : Loi forte des grands nombres avec un moment d'ordre 4

Soit (X_n) une suite de variables indépendantes et de même loi, centrées, avec

$\mu_4 = E(X_1^4) < \infty$. On note $\sigma^2 = E(X_1^2)$ et $S_n = X_1 + \dots + X_n$.

1. Montrer que $\sigma^4 \leq \mu_4$.
2. Montrer que $E(S_n^4) = n \mu_4 + 3n(n-1)\sigma^4$.
3. En déduire que $E(S_n^4) \leq 3n^2 \mu_4$.
4. Montrer que $E\left(\sum_{n \geq 1} (S_n/n)^4\right) < \infty$, puis que $S_n/n \rightarrow 0$ presque sûrement.
5. Retrouver ce résultat par le lemme de Borel-Cantelli.
6. En déduire la loi forte pour des variables indépendantes et de même loi, bornées, d'espérance m quelconque.

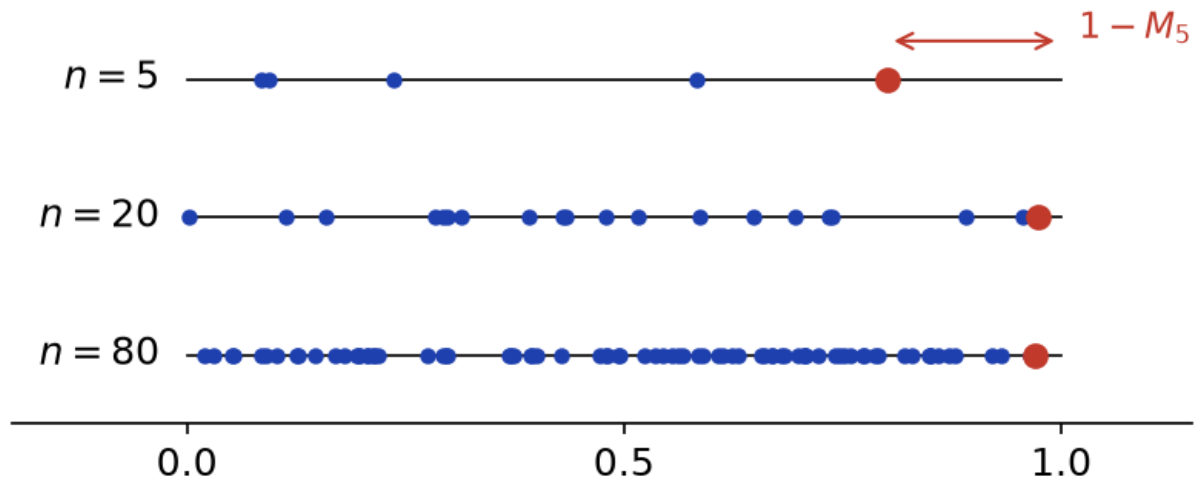
Exercice 11 : Monte-Carlo et moyenne géométrique

Soit $(U_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables indépendantes de loi uniforme sur $[0,1]$.

1. Soit $f(x) = \frac{4}{1+x^2}$. Montrer que $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(U_k) \rightarrow \pi$ presque sûrement.
2. Calculer la variance de $f(U_1)$, sachant que $\int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2)^2} = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}$.
3. On pose $G_n = (U_1 U_2 \dots U_n)^{1/n}$. Montrer que G_n converge presque sûrement et déterminer sa limite.
4. Comparer avec la limite de la moyenne arithmétique $\bar{U}_n$, et relier le résultat à l'inégalité arithmético-géométrique.

Exercice 12 : Le maximum de variables uniformes

Soit (U_n) une suite de variables indépendantes de loi uniforme sur $[0,1]$, et $M_n = \max(U_1, \dots, U_n)$. La figure ci-dessous montre des tirages pour trois valeurs de n ; le maximum est marqué en rouge.



1. Déterminer la fonction de répartition de M_n .
2. Montrer que $M_n \rightarrow 1$ en probabilité, puis presque sûrement.
3. Pour $x \geq 0$, calculer $P(n(1 - M_n) > x)$ et sa limite quand $n \rightarrow \infty$.
4. En déduire que $n(1 - M_n)$ converge en loi vers une loi que l'on identifiera.

Exercice 13 : De la loi binomiale à la loi de Poisson

Soit $\lambda > 0$ et, pour $n > \lambda$, une variable X_n de loi $\mathcal{B}(n, \lambda/n)$.

1. Calculer la fonction caractéristique de X_n .

2. Montrer que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $(1 + z/n)^n \rightarrow e^z$.
3. En déduire, par le théorème de Lévy, que X_n converge en loi vers $\mathcal{P}(\lambda)$.
4. Retrouver ce résultat en calculant la limite de $P(X_n = k)$ pour $k \in \mathbb{N}$ fixé.
5. Application numérique : une page de 1 000 caractères contient chaque coquille avec probabilité 0,002, indépendamment. Donner une valeur approchée de la probabilité qu'elle ne contienne aucune coquille.

Exercice 14 : Loi de Poisson de grand paramètre

Pour $\lambda > 0$, soit N_λ une variable de loi $\mathcal{P}(\lambda)$. On pose $Y_\lambda = \frac{N_\lambda - \lambda}{\sqrt{\lambda}}$.

1. Calculer la fonction caractéristique de Y_λ .
2. Montrer que, pour tout réel u , $\left| e^{iu} - 1 - iu + \frac{u^2}{2} \right| \leq \frac{|u|^3}{6}$.
3. En déduire que Y_λ converge en loi vers $\mathcal{N}(0,1)$ quand $\lambda \rightarrow \infty$.
4. Donner une valeur approchée de $P(N_{100} \leq 120)$, avec $\Phi(2) \approx 0,977$.

Exercice 15 : Approximation normale d'un jeu de pile ou face

On lance 10 000 fois une pièce équilibrée. On note S le nombre de piles obtenus.

1. Donner la loi de S , son espérance et son écart type.
2. À l'aide du théorème central limite, donner une valeur approchée de $P(4\,900 \leq S \leq 5\,100)$.
On utilisera $\Phi(2) \approx 0,9772$.
3. Déterminer a tel que $P(|S - 5\,000| \leq a) \approx 0,95$.

4. Comparer avec la majoration de $P(|S - 5\,000| \geq 100)$ donnée par l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

Exercice 16 : Sondage et intervalle de confiance

Avant un second tour, on interroge $n = 1\,600$ électeurs tirés au hasard avec remise. Parmi eux, 848 déclarent voter pour le candidat A. On note p la proportion inconnue d'électeurs favorables à A.

1. Modéliser la situation et donner la fréquence observée f .
2. À l'aide du théorème central limite, montrer que, pour tout $p \in]0,1[$,
$$\liminf_{n \rightarrow \infty} P\left(|F_n - p| \leq \frac{0,98}{\sqrt{n}}\right) \geq 0,95.$$
3. En déduire un intervalle de confiance asymptotique de niveau $0,95$ pour p .
4. Peut-on raisonnablement annoncer la victoire de A ? Combien de personnes faudrait-il interroger pour un intervalle de demi-largeur $0,01$?

Exercice 17 : Le TCL n'est pas une convergence en probabilité

Soit (X_n) une suite de variables indépendantes et de même loi, de carré intégrable, centrées, de variance $\sigma^2 > 0$. On pose $S_n = X_1 + \dots + X_n$ et $Z_n = S_n / \sqrt{n}$.

1. Rappeler la limite en loi de (Z_n) .
2. Montrer que $Z_{2n} = \frac{1}{\sqrt{2}}(Z_n + Z'_n)$, où $Z'_n = \frac{S_{2n} - S_n}{\sqrt{n}}$ est indépendante de Z_n et de même loi.
3. Calculer la fonction caractéristique de $Z_{2n} - Z_n$ et montrer que $Z_{2n} - Z_n$ converge en loi vers $\mathcal{N}(0, (2 - \sqrt{2})\sigma^2)$.
4. En déduire que (Z_n) ne converge pas en probabilité.

5. Montrer en revanche que $S_n / n^\alpha \rightarrow 0$ en probabilité pour tout $\alpha > 1/2$.

Exercice 18 : Une limite par le théorème central limite

Le but est de déterminer la limite de $u_n = e^{-n} \sum_{k=0}^n \frac{n^k}{k!}$.

1. Soit (X_k) une suite de variables indépendantes de loi $\mathcal{P}(1)$. Déterminer la loi de $S_n = X_1 + \dots + X_n$.
2. Exprimer u_n comme une probabilité portant sur S_n .
3. En déduire, à l'aide du théorème central limite, que $u_n \rightarrow \frac{1}{2}$.
4. Par la même méthode, déterminer la limite de $e^{-n} \sum_{k=0}^{n + \lfloor \sqrt{n} \rfloor} \frac{n^k}{k!}$ en fonction de Φ .

Exercice 19 : La loi de Cauchy échappe aux grands nombres

Soit (X_n) une suite de variables indépendantes de loi de Cauchy, de densité $\frac{1}{\pi(1+x^2)}$ sur $\mathbb{R}$. On admet que sa fonction caractéristique est $\varphi(t) = e^{-|t|}$.

1. Montrer que X_1 n'est pas intégrable.
2. Déterminer la loi de $\bar{X}_n = \frac{1}{n}(X_1 + \dots + X_n)$.
3. Calculer $P(|\bar{X}_n| > 1)$.
4. Montrer que $\bar{X}_n$ ne converge en probabilité vers aucune constante.
5. Montrer que $\frac{1}{n^2}(X_1 + \dots + X_n) \rightarrow 0$ en probabilité.

Exercice 20 : Problème, polynômes de Bernstein et théorème de Weierstrass

Soit $f : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ continue. Pour $n \geq 1$ et $x \in [0,1]$, on pose

$$B_n f(x) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}.$$

Pour x fixé, on considère S_n de loi $\mathcal{B}(n, x)$.

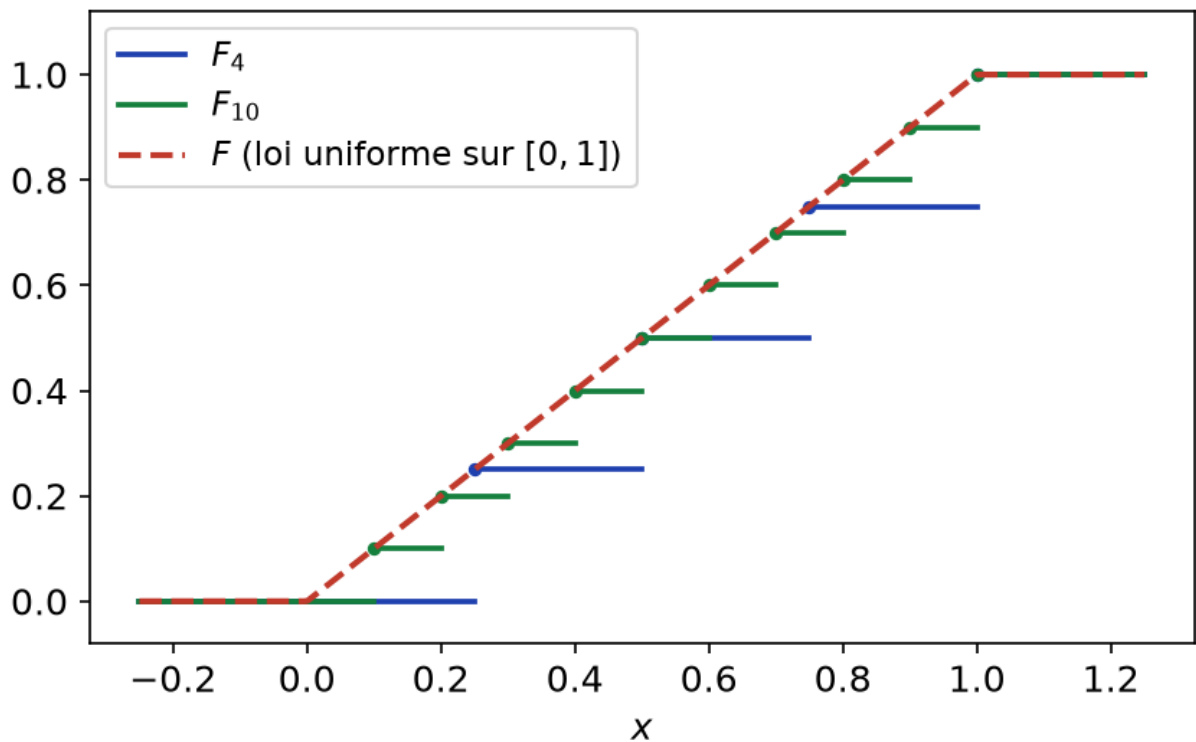
1. Montrer que $B_n f$ est un polynôme de degré au plus n et que $B_n f(x) = E(f(S_n/n))$.
2. Calculer $B_n f$ pour $f(x) = 1$, $f(x) = x$ et $f(x) = x^2$.
3. Soit $\varepsilon > 0$ et $\delta > 0$ tel que $|f(u) - f(v)| \leq \varepsilon$ dès que $|u - v| \leq \delta$. Justifier l'existence de δ , puis montrer que, pour tout $x \in [0,1]$:

$$|B_n f(x) - f(x)| \leq \varepsilon + \frac{|f|_{\infty}}{2n\delta^2}.$$

4. En déduire que $B_n f$ converge uniformément vers f sur $[0,1]$. Quel théorème d'analyse obtient-on ?
5. On suppose f lipschitzienne de rapport L . Montrer que $|B_n f - f|_{\infty} \leq \frac{L}{2\sqrt{n}}$.
6. Pour $f(x) = |x - 1/2|$, calculer $B_4 f(1/2)$ et $B_2 f(1/2)$.

Exercice 21 : Lois discrètes qui convergent vers une loi à densité

Pour $n \geq 1$, soit X_n de loi uniforme sur $\{1/n, 2/n, \dots, n/n\}$, et U de loi uniforme sur $[0,1]$. La figure ci-dessous représente les fonctions de répartition F_4 , F_{10} et celle de U .



1. Déterminer la fonction de répartition F_n de X_n .
2. Montrer que $|F_n(x) - F(x)| \leq 1/n$ pour tout réel x , où F est la fonction de répartition de U . Conclure.
3. Calculer $P(X_n \in \mathbb{Q})$ et $P(U \in \mathbb{Q})$. Pourquoi cela ne contredit-il pas la convergence en loi ?
4. Retrouver la convergence par les fonctions caractéristiques en calculant $E(e^{itX_n})$ pour $t \neq 0$.

Le corrigé des exercices

Chaque exercice est corrigé en détail, question par question, sur la page suivante.



Pour aller plus loin en L3

- Le cours : [loi des grands nombres et TCL, cours de maths en L3](#)
- À maîtriser avant : [Espaces probabilisés, variables aléatoires et espérance](#)
- Chapitre précédent : [Espaces probabilisés, variables aléatoires et espérance](#)
- Tester vos connaissances : [QCM de maths en L3 par chapitre](#)
- Le sommaire : [tous les chapitres de maths de L3](#) et la [licence de maths de L1 à L3](#)