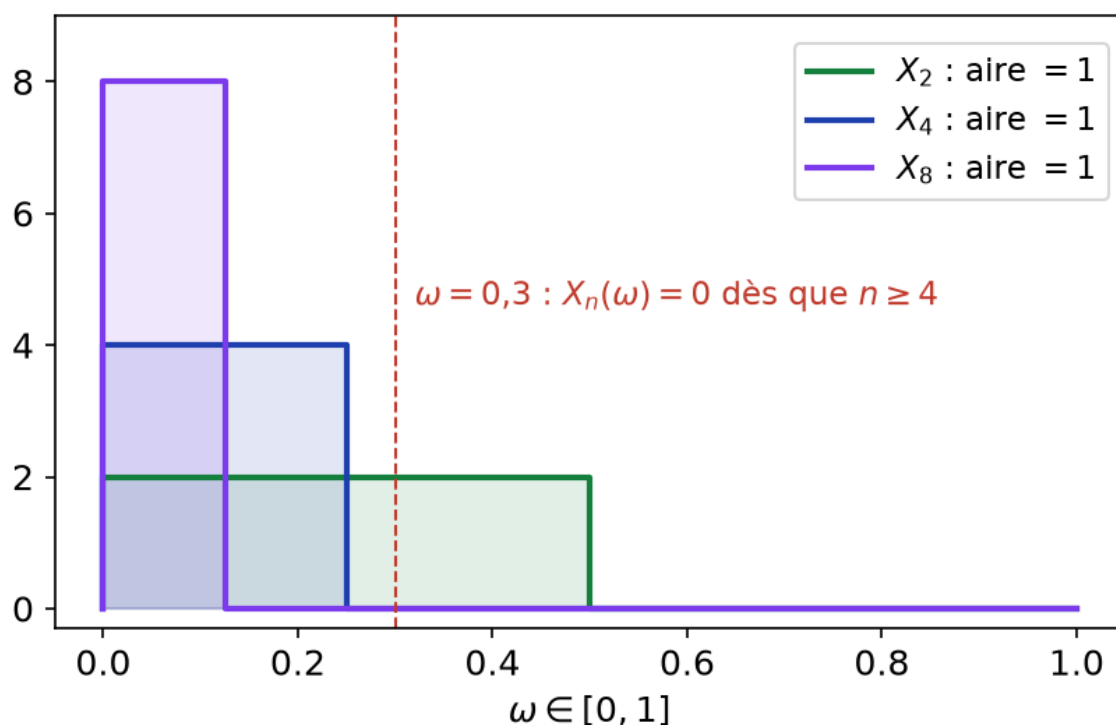


Loi des grands nombres et TCL

Corrigé de l'exercice 1 : Convergence presque sûre sans convergence L^1

1. Soit $\omega \in]0,1]$. Dès que $n > 1/\omega$, on a $\omega \notin [0, 1/n]$, donc $X_n(\omega) = 0$. Ainsi $X_n(\omega) \rightarrow 0$ pour tout $\omega \neq 0$. Or $\{0\}$ est de mesure nulle. Donc $X_n \rightarrow 0$ **presque sûrement**. Pour $\omega = 0,3$, la condition $1/n < 0,3$ équivaut à $n > 10/3$. Par conséquent, $X_n(0,3) = 0$ **dès que** $n \geq 4$, comme le montre la figure ci-dessous.



2. La convergence presque sûre entraîne la convergence en probabilité, par convergence dominée appliquée à $1_{\{|X_n| > \varepsilon\}}$. On peut aussi calculer directement : pour $0 < \varepsilon < 1$,
 $P(|X_n| > \varepsilon) = P([0, 1/n]) = 1/n \rightarrow 0$. Donc $X_n \rightarrow 0$ **en probabilité**.

3. On a $E(X_n) = n \times \frac{1}{n} = 1$. Si X_n convergeait dans L^1 vers une variable X , elle convergerait aussi en probabilité vers X . Par unicité de la limite en probabilité, $X = 0$ presque sûrement. Il faudrait alors $E|X_n - 0| = 1 \rightarrow 0$, ce qui est absurde. **La suite ne converge pas dans L^1 .**
4. D'une part, $E(|Y_n|) = \sqrt{n} \times \frac{1}{\sqrt{n}} = 1 \rightarrow 0 : Y_n \rightarrow 0$ dans L^1 . D'autre part, $E(Y_n^2) = n \times \frac{1}{n} = 1$. Le même argument d'unicité montre que la seule limite possible dans L^2 est 0. Or $E(Y_n^2)$ ne tend pas vers 0. **Donc Y_n ne converge pas dans L^2 .**

Point de méthode : pour réfuter une convergence dans L^p , identifiez d'abord la seule limite possible grâce à une convergence plus faible, puis montrez que la norme de l'écart ne tend pas vers 0.

Corrigé de l'exercice 2 : La bosse glissante

- La variable $X_n^p = 1_{I_n}$ est une indicatrice. Donc $E(X_n^p) = \lambda(I_n) = 2^{-k}$, où $k = \lfloor \log_2 n \rfloor$. Quand $n \rightarrow \infty$, $k \rightarrow \infty$, donc $E(X_n^p) \rightarrow 0$ et $X_n \rightarrow 0$ dans L^p . Ensuite, l'inégalité de Markov donne $P(X_n > \varepsilon) \leq E(X_n)/\varepsilon = 2^{-k}/\varepsilon \rightarrow 0$. **Donc $X_n \rightarrow 0$ en probabilité.**
- Fixons $\omega \in [0,1]$ et une génération k . Les intervalles $I_{2^k}, \dots, I_{2^{k+1}-1}$ recouvrent $[0,1]$. Il existe donc un indice n de cette génération tel que $X_n(\omega) = 1$. Comme il y a une infinité de générations, $X_n(\omega) = 1$ **pour une infinité d'indices**. De plus, pour $k \geq 2$, la génération compte $2^k \geq 4$ intervalles, et ω appartient au plus à deux d'entre eux. Il en existe donc au moins un qui ne contient pas ω . Ainsi $X_n(\omega) = 0$ **pour une infinité d'indices**.
- Pour tout ω , la suite $(X_n(\omega))$ a deux valeurs d'adhérence, 0 et 1. Elle ne converge donc en aucun point. Par conséquent, (X_n) **ne converge presque sûrement vers aucune variable**, puisque l'ensemble de convergence est vide.
- Prenons la sous-suite $n_k = 2^k$, qui correspond à $j = 0$. Alors $X_{2^k} = 1_{[0, 2^{-k}]}$. Pour $\omega > 0$, on a $X_{2^k}(\omega) = 0$ dès que $2^{-k} < \omega$. **Donc $X_{2^k} \rightarrow 0$ presque sûrement**, ce qui illustre le théorème d'extraction.

Corrigé de l'exercice 3 : Convergence en loi sans convergence en probabilité

1. La densité de $\mathcal{N}(0,1)$ est paire, donc $-X$ suit aussi la loi $\mathcal{N}(0,1)$. Ainsi, pour toute f continue bornée, $E(f(X_n)) = E(f(-X)) = E(f(X))$. **La suite converge donc en loi vers X** , et elle est même constante en loi.
2. On a $|X_n - X| = 2|X|$. Donc $P(|X_n - X| > 1) = P(|X| > 1/2) = 2(1 - \Phi(1/2))$. Numériquement, $\Phi(0,5) \approx 0,6915$, d'où $P(|X_n - X| > 1) \approx 0,617$ pour tout n . Cette quantité ne tend pas vers 0. **Donc X_n ne converge pas en probabilité vers X .**
3. Chaque Z_n suit la loi $\mathcal{N}(0,1)$: (Z_n) **converge en loi vers $\mathcal{N}(0,1)$** . Supposons que $Z_n \rightarrow Z$ en probabilité. Alors $Z_{n+1} - Z_n \rightarrow 0$ en probabilité, car $|Z_{n+1} - Z_n| \leq |Z_{n+1} - Z| + |Z - Z_n|$. Or $|Z_{n+1} - Z_n| = 2|X|$, et $P(2|X| > 1) \approx 0,617$ ne tend pas vers 0. **Donc (Z_n) ne converge pas en probabilité.**
4. La convergence en loi ne dépend que des lois. Or X_n et Y ont la même loi, donc $X_n \mathcal{L} Y$. L'unicité de la limite en loi porte sur la **loi** de la limite, et non sur la variable. Ici, X et Y ont bien la même loi, donc il n'y a aucune contradiction.

Corrigé de l'exercice 4 : Convergence en loi vers une constante

1. La fonction de répartition de la constante c est $F = 1_{[c, +\infty[}$. Elle est continue en tout point sauf c . Soit $\varepsilon > 0$. Les points $c + \varepsilon/2$ et $c - \varepsilon$ sont des points de continuité. Donc $F_n(c + \varepsilon/2) \rightarrow 1$ et $F_n(c - \varepsilon) \rightarrow 0$. Or
$$P(|X_n - c| > \varepsilon) \leq P(X_n > c + \varepsilon/2) + P(X_n \leq c - \varepsilon) = 1 - F_n(c + \varepsilon/2) + F_n(c - \varepsilon).$$
Le membre de droite tend vers 0. **Donc $X_n \xrightarrow{P} c$.**
2. La fonction de répartition de X_n vaut 0 avant $c - 1/n$, 1 après $c + 1/n$, et $\frac{n}{2}(x - c + 1/n)$ entre les deux. Si $x < c$, alors $x < c - 1/n$ pour n grand, donc $F_n(x) = 0$. De même, si $x > c$, $F_n(x) = 1$ pour n grand. Ainsi $F_n(x) \rightarrow F(x)$ pour tout $x \neq c$, et $X_n \mathcal{L} c$. Par ailleurs, la loi de $X_n - c$ est uniforme sur $[-1/n, 1/n]$. Donc $P(|X_n - c| > \varepsilon) = \max(0, 1 - n\varepsilon)$, qui est nulle dès que $n \geq 1/\varepsilon$.

3. On a $P(T_n > \varepsilon) = e^{-n\varepsilon} \rightarrow 0$, donc $T_n \rightarrow 0$ en probabilité. Ensuite, $\{|Y_n - c| > \varepsilon\} \subset \{|X_n - c| > \varepsilon/2\} \cup \{T_n > \varepsilon/2\}$. La somme des deux probabilités tend vers 0. **Donc** $Y_n \xrightarrow{P} c$. Remarquez qu'aucune hypothèse d'indépendance entre X_n et T_n n'est nécessaire.

Corrigé de l'exercice 5 : Bernoulli indépendantes et Borel-Cantelli

1. Pour $0 < \varepsilon < 1$, on a $P(|X_n| > \varepsilon) = P(X_n = 1) = p_n$. Donc $X_n \rightarrow 0$ **en probabilité si et seulement si** $p_n \rightarrow 0$.
2. Comme $X_n \in \{0, 1\}$, on a $|X_n|^q = X_n$, d'où $E(|X_n|^q) = p_n$. Ainsi **la convergence dans L^q vers 0 équivaut à** $p_n \rightarrow 0$.
3. La suite $(X_n(\omega))$ est à valeurs dans $\{0, 1\}$. Elle tend vers 0 si et seulement si $X_n(\omega) = 1$ pour un nombre fini d'indices. Autrement dit, $\{X_n \rightarrow 0\} = (\limsup \{X_n = 1\})^c$. Si $\sum p_n < \infty$, le premier lemme de Borel-Cantelli donne $P(\limsup \{X_n = 1\}) = 0$, d'où la convergence presque sûre. Si $\sum p_n = \infty$, les événements $\{X_n = 1\}$ sont indépendants. Le second lemme donne alors $P(\limsup \{X_n = 1\}) = 1$, et la suite ne converge presque sûrement pas vers 0. **Ainsi $X_n \rightarrow 0$ presque sûrement si et seulement si $\sum p_n < \infty$.**
4. Pour $p_n = 1/n$: **convergence dans L^q et en probabilité, mais pas presque sûre**, car la série harmonique diverge. Pour $p_n = 1/n^2$: **convergence dans tous les modes**.

Corrigé de l'exercice 6 : Record de variables exponentielles

1. Pour une loi exponentielle de paramètre 1, $P(X_n > x) = e^{-x}$ pour $x \geq 0$. Donc $P(X_n > c \ln n) = e^{-c \ln n} = n^{-c}$.
2. Pour $c > 1$, la série de Riemann $\sum n^{-c}$ converge. D'après le premier lemme de Borel-Cantelli, l'événement « $X_n > c \ln n$ pour une infinité de n » est négligeable. **Donc presque**

sûrement $X_n \leq c \ln n$ à partir d'un certain rang.

3. Pour $c = 1$, $\sum 1/n = \infty$. De plus, les événements $\{X_n > \ln n\}$ sont indépendants, car les X_n le sont. Le second lemme de Borel-Cantelli s'applique. **Presque sûrement**, $X_n > \ln n$ **pour une infinité d'indices**.
4. Posons $L = \limsup X_n / \ln n$. Pour $c = 1 + 1/k$, la question 2 donne $L \leq 1 + 1/k$ sur un événement Ω_k de probabilité 1. L'intersection dénombrable $\bigcap_k \Omega_k$ est encore de probabilité 1, et on y a $L \leq 1$. Ensuite, la question 3 donne $X_n / \ln n > 1$ pour une infinité de n , donc $L \geq 1$ presque sûrement. **Finalement**, $\limsup X_n / \ln n = 1$ **presque sûrement**.

Point de méthode : les deux lemmes de Borel-Cantelli fournissent ensemble une valeur exacte ; le premier donne la majoration, le second, avec l'indépendance, la minoration.

Corrigé de l'exercice 7 : Convergence rapide en probabilité

1. Soit $k \geq 1$ et $A_n^k = \{|X_n - X| > 1/k\}$. Par hypothèse, $\sum_n P(A_n^k) < \infty$. Le lemme de Borel-Cantelli donne $P(\limsup_n A_n^k) = 0$. Posons $N = \bigcup_k \limsup_n A_n^k$, négligeable comme réunion dénombrable d'ensembles négligeables. Pour $\omega \notin N$ et pour tout k , on a $|X_n(\omega) - X(\omega)| \leq 1/k$ à partir d'un certain rang. **Donc** $X_n(\omega) \rightarrow X(\omega)$ **hors de N : la convergence est presque sûre**.
2. On construit $n_1 < n_2 < \dots$ par récurrence. Comme $P(|X_n - X| > 2^{-k}) \rightarrow 0$, il existe $n_k > n_{k-1}$ tel que $P(|X_{n_k} - X| > 2^{-k}) \leq 2^{-k}$. Soit $\varepsilon > 0$. Pour k assez grand, $2^{-k} \leq \varepsilon$, donc $P(|X_{n_k} - X| > \varepsilon) \leq 2^{-k}$. La série converge. **Par la question 1**, $X_{n_k} \rightarrow X$ **presque sûrement**.
3. Par l'inégalité de Markov, $P(|X_n - X| > \varepsilon) \leq E(|X_n - X|^2)/\varepsilon^2$. C'est le terme général d'une série convergente. **La question 1 donne la convergence presque sûre**.
4. Sens direct : une sous-suite de (X_n) converge encore en probabilité vers X , et la question 2 lui fournit une sous-suite presque sûrement convergente. Réciproque : supposons que X_n ne converge pas en probabilité vers X . Il existe alors $\varepsilon > 0$, $\eta > 0$ et une sous-suite (X_{m_j}) avec $P(|X_{m_j} - X| > \varepsilon) \geq \eta$ pour tout j . Par hypothèse, elle admet une sous-suite qui converge presque sûrement, donc en probabilité, vers X . Cela contredit la minoration par η .

L'équivalence est démontrée.

Corrigé de l'exercice 8 : Loi faible pour des variables non corrélées

1. Les variables sont deux à deux non corrélées, donc $\text{Var}(S_n) = \sum_{k=1}^n \text{Var}(X_k) \leq nC$. Par conséquent,

$$E\left(\left(\frac{S_n - E(S_n)}{n}\right)^2\right) = \frac{\text{Var}(S_n)}{n^2} \leq \frac{C}{n} \rightarrow 0.$$

La convergence vers 0 a donc lieu dans L^2 .

2. L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev donne $P\left(\left|\frac{S_n - E(S_n)}{n}\right| \geq \epsilon\right) \leq \frac{C}{n\epsilon^2}$.
3. Des variables indépendantes sont non corrélées. De plus, $\text{Var}(X_k) = p_k(1 - p_k) \leq 1/4$. On peut donc prendre $C = 1/4$. Ensuite, $\frac{S_n}{n} - p = \frac{S_n - E(S_n)}{n} + \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n p_k - p\right)$. Le premier terme tend vers 0 en probabilité. Le second est déterministe et tend vers 0. **Donc $S_n / n \rightarrow p$ en probabilité.**

4. Les termes $\frac{(-1)^k}{4}$ se compensent deux à deux : $\left|\sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{4}\right| \leq \frac{1}{4}$. Donc $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n p_k = \frac{1}{2} + O(1/n) \rightarrow \frac{1}{2}$. **Ainsi $S_n / n \rightarrow 1/2$ en probabilité**, bien que les lois ne soient pas identiques.

Corrigé de l'exercice 9 : Taille d'un échantillon, Tchebychev contre TCL

- On a $F_n = S_n / n$ avec $S_n \sim \mathcal{B}(n, p)$. Donc $E(F_n) = p$ et $\text{Var}(F_n) = \frac{p(1-p)}{n}$. Or la fonction $p \rightarrow p(1-p)$ atteint son maximum $1/4$ en $p = 1/2$. **Donc** $\text{Var}(F_n) \leq \frac{1}{4n}$.
- Par Bienaymé-Tchebychev, $P(|F_n - p| \geq 0,01) \leq \frac{1}{4n \times 10^{-4}} = \frac{2500}{n}$. Cette borne vaut au plus $0,05$ dès que $n \geq 50\,000$. **Ainsi** $n = 50\,000$ **convient, quel que soit** p .
- Par le théorème central limite, $\frac{\sqrt{n}(F_n - p)}{\sqrt{p(1-p)}}$ est approximativement de loi $\mathcal{N}(0,1)$. Donc $P(|F_n - p| \leq 1,96\sqrt{p(1-p)/n}) \approx 0,95$. Il suffit alors que $1,96 \times \frac{1}{2\sqrt{n}} \leq 0,01$, soit $\sqrt{n} \geq 98$. **La taille** $n = 9\,604$ **suffit approximativement**.
- L'approximation normale demande environ cinq fois moins de lancers. Cependant, la borne de Tchebychev est une **inégalité exacte**, valable pour tout n . En revanche, le résultat du TCL n'est qu'**asymptotique** : il ne comporte pas de garantie à n fixé.

Corrigé de l'exercice 10 : Loi forte des grands nombres avec un moment d'ordre 4

- L'inégalité de Cauchy-Schwarz appliquée à X_1^2 et 1 donne $E(X_1^2)^2 \leq E(X_1^4) E(1)$. **Donc** $\sigma^4 \leq \mu_4$. En particulier, X_1 est de carré intégrable.
- On développe $S_n^4 = \sum_{i,j,k,l} X_i X_j X_k X_l$. Tous les termes sont intégrables, par l'inégalité de Hölder. Si l'un des indices apparaît une seule fois, l'indépendance et le centrage donnent une espérance nulle. Il reste deux types de termes. D'abord, $i = j = k = l$: n termes d'espérance μ_4 . Ensuite, deux paires d'indices distincts : on choisit la paire $\{i, j\}$ de $\binom{n}{2}$ façons, puis la répartition des positions de $\binom{4}{2} = 6$ façons, chaque terme valant σ^4 . Ainsi $6\binom{n}{2} = 3n(n-1)$. **Donc** $E(S_n^4) = n\mu_4 + 3n(n-1)\sigma^4$.
- Avec $\sigma^4 \leq \mu_4$, on obtient $E(S_n^4) \leq \mu_4(n + 3n^2 - 3n) = \mu_4(3n^2 - 2n)$. **Donc** $E(S_n^4) \leq 3n^2\mu_4$.
- Par le théorème de convergence monotone (Beppo Levi), on peut intervertir somme et espérance :

$$E\left(\sum_{n \geq 1} \frac{S_n^4}{n^4}\right) = \sum_{n \geq 1} \frac{E(S_n^4)}{n^4} \leq 3\mu_4 \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} < \infty.$$

Une variable positive d'espérance finie est finie presque sûrement. Donc la série $\sum (S_n/n)^4$ converge presque sûrement, et son terme général tend vers 0. **Ainsi $S_n/n \rightarrow 0$ presque sûrement.**

5. Par l'inégalité de Markov à l'ordre 4, $P(|S_n/n| > \varepsilon) \leq \frac{E(S_n^4)}{n^4 \varepsilon^4} \leq \frac{3\mu_4}{n^2 \varepsilon^4}$. La série converge pour tout ε . **La méthode de Borel-Cantelli (exercice 7) donne la même conclusion.**

6. Si $|X_n| \leq M$, alors $Y_n = X_n - m$ est centrée, bornée par $2M$, donc $E(Y_1^4) \leq 16M^4$. Les Y_n sont indépendantes et de même loi. Par ce qui précède, $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n Y_k = \bar{X}_n - m \rightarrow 0$. **Donc $\bar{X}_n \rightarrow m$ presque sûrement.**

Corrigé de l'exercice 11 : Monte-Carlo et moyenne géométrique

1. La fonction f est continue et bornée par 4 sur $[0,1]$. Les $f(U_k)$ sont donc indépendantes, de même loi et intégrables. Leur espérance vaut $\int_0^1 \frac{4}{1+x^2} dx = 4 \arctan 1 = \pi$. Par la loi forte des grands nombres, $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(U_k) \rightarrow \pi$ **presque sûrement.**

2. On a $E(f(U_1)^2) = 16 \int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2)^2} = 16\left(\frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}\right) = 2\pi + 4$. **Donc**
 $\text{Var}(f(U_1)) = 2\pi + 4 - \pi^2 \approx 0,414$. Par le TCL, l'erreur de la méthode est de l'ordre de $0,64/\sqrt{n}$.

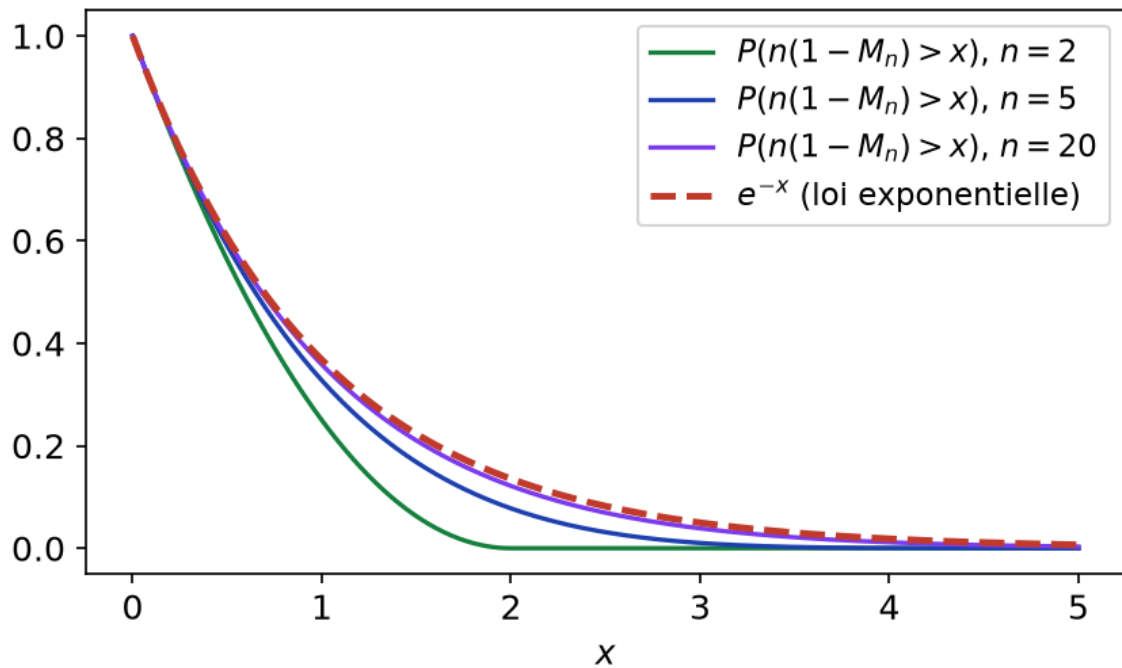
3. Les U_k sont presque sûrement dans $]0,1]$. On peut donc écrire $\ln G_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln U_k$. Les variables $\ln U_k$ sont indépendantes, de même loi, et intégrables. En effet,
 $E|\ln U_1| = -\int_0^1 \ln x dx = [x - x \ln x]_0^1 = 1$. Donc $E(\ln U_1) = -1$. Par la loi forte,

$\ln G_n \rightarrow -1$ presque sûrement. Enfin, l'exponentielle est continue. **Donc**
 $G_n \rightarrow e^{-1} \approx 0,368$ **presque sûrement.**

4. Par la loi forte, $\bar{U}_n \rightarrow 1/2$ presque sûrement. L'inégalité arithmético-géométrique donne
 $G_n \leq \bar{U}_n$ pour tout n . À la limite, on retrouve bien $e^{-1} \leq 1/2$. **C'est cohérent, et l'inégalité est même stricte à la limite.** C'est aussi l'inégalité de Jensen
 $E(\ln U) < \ln E(U)$, car $-1 < \ln(1/2) \approx -0,693$.

Corrigé de l'exercice 12 : Le maximum de variables uniformes

- Pour $x \in [0,1]$, $\{M_n \leq x\} = \bigcap_{k=1}^n \{U_k \leq x\}$. Par indépendance,
 $P(M_n \leq x) = x^n$. Cette fonction vaut 0 pour $x < 0$ et 1 pour $x > 1$.
- Pour $0 < \varepsilon < 1$, $P(|M_n - 1| > \varepsilon) = P(M_n < 1 - \varepsilon) = (1 - \varepsilon)^n \rightarrow 0$. **Donc**
 $M_n \rightarrow 1$ **en probabilité.** De plus, la série géométrique $\sum (1 - \varepsilon)^n$ converge. Par la méthode de Borel-Cantelli, $M_n \rightarrow 1$ **presque sûrement.** On peut aussi remarquer que
 (M_n) est croissante et majorée par 1.
- Pour $0 \leq x \leq n$, on a $P(n(1 - M_n) > x) = P(M_n < 1 - x/n) = (1 - x/n)^n$.
 Pour $x > n$, cette probabilité est nulle. À x fixé, pour $n \geq x$, on a
 $n \ln(1 - x/n) \rightarrow -x$. **Donc** $P(n(1 - M_n) > x) \rightarrow e^{-x}$. La figure ci-dessous montre cette convergence.



4. La fonction de répartition de $n(1 - M_n)$ vaut donc $1 - (1 - x/n)^n \rightarrow 1 - e^{-x}$ pour $x \geq 0$. Pour $x < 0$, elle est nulle. On reconnaît la fonction de répartition de la loi exponentielle de paramètre 1, continue partout. **Ainsi $n(1 - M_n)$ converge en loi vers $\mathcal{E}(1)$.**

Corrigé de l'exercice 13 : De la loi binomiale à la loi de Poisson

- La variable X_n est une somme de n variables indépendantes de Bernoulli de paramètre $p = \lambda/n$. Chacune a pour fonction caractéristique $1 - p + pe^{it}$. Par indépendance,
$$\varphi_{X_n}(t) = \left(1 + \frac{\lambda(e^{it} - 1)}{n}\right)^n.$$
- Soit $z \in \mathbb{C}$. Pour $n > |z|$, la formule du binôme donne $(1 + z/n)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{z^k}{n^k}$. Or $0 \leq \binom{n}{k} n^{-k} \leq \frac{1}{k!}$, et $\binom{n}{k} n^{-k} \rightarrow \frac{1}{k!}$ pour k fixé. Le théorème de convergence dominée pour les séries, avec la domination $|z|^k / k!$, donne
$$(1 + z/n)^n \rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = e^z.$$
- Avec $z = \lambda(e^{it} - 1)$, on obtient $\varphi_{X_n}(t) \rightarrow \exp(\lambda(e^{it} - 1))$. Cette limite est continue en

0 : c'est la fonction caractéristique de $\mathcal{P}(\lambda)$. **Par le théorème de Lévy**, $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{P}(\lambda)$.

4. Pour k fixé, $P(X_n = k) = \binom{n}{k} \frac{\lambda^k}{n^k} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}$. D'abord $\binom{n}{k} n^{-k} \rightarrow 1/k!$. Ensuite $(1 - \lambda/n)^{n-k} \rightarrow e^{-\lambda}$. **Donc** $P(X_n = k) \rightarrow e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$. Pour des lois à valeurs entières, cette convergence ponctuelle entraîne celle des fonctions de répartition, donc la convergence en loi.
5. Le nombre de coquilles suit $\mathcal{B}(1\,000; 0,002)$, proche de $\mathcal{P}(2)$. **La probabilité cherchée vaut environ** $e^{-2} \approx 0,135$. La valeur exacte $0,998^{1\,000} \approx 0,135$ confirme l'approximation.

Corrigé de l'exercice 14 : Loi de Poisson de grand paramètre

1. On a $\varphi_{N_\lambda}(s) = \exp(\lambda(e^{is} - 1))$. Or $\varphi_{aN+b}(t) = e^{ibt} \varphi_N(at)$. Donc $\varphi_{Y_\lambda}(t) = \exp\left(\lambda(e^{it/\sqrt{\lambda}} - 1) - it\sqrt{\lambda}\right)$.
2. La formule de Taylor avec reste intégral, appliquée à $g(s) = e^{is}$ à l'ordre 2, donne

$$e^{iu} - 1 - iu + \frac{u^2}{2} = \int_0^u \frac{(u-s)^2}{2} i^3 e^{is} ds.$$

Le module de l'intégrande est $(u-s)^2/2$. **Donc le module est au plus**

$$\left| \int_0^u \frac{(u-s)^2}{2} ds \right| = \frac{|u|^3}{6}.$$

3. Posons $u = t/\sqrt{\lambda}$ et $r = e^{iu} - 1 - iu + u^2/2$. Alors

$$\lambda(e^{iu} - 1) - it\sqrt{\lambda} = \lambda\left(iu - \frac{u^2}{2} + r\right) - it\sqrt{\lambda} = -\frac{t^2}{2} + \lambda r.$$

Par la question 2, $|\lambda r| \leq \frac{\lambda |t|^3}{6\lambda^{3/2}} = \frac{|t|^3}{6\sqrt{\lambda}} \rightarrow 0$. Donc $\varphi_{Y_\lambda}(t) \rightarrow e^{-t^2/2}$ pour tout t .

Cette limite est la fonction caractéristique de $\mathcal{N}(0,1)$. Le théorème de Lévy, appliqué à toute suite $\lambda_n \rightarrow \infty$, conclut. **Donc** $Y_\lambda \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1)$.

4. On écrit $P(N_{100} \leq 120) = P\left(Y_{100} \leq \frac{120-100}{10}\right) = P(Y_{100} \leq 2)$. **Cette probabilité**

vaut environ $\Phi(2) \approx 0,977$.

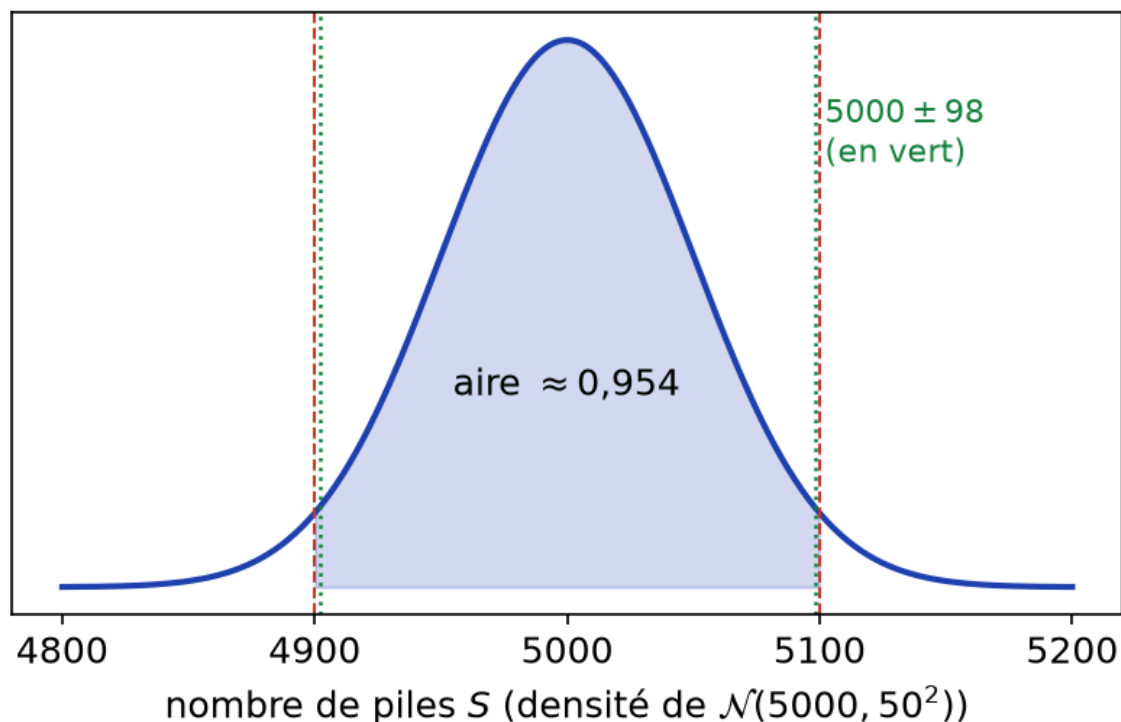
Corrigé de l'exercice 15 : Approximation normale d'un jeu de pile ou face

1. Les lancers sont indépendants et de même probabilité de succès $1/2$. Donc
 $S \sim \mathcal{B}(10\,000; 1/2)$, avec $E(S) = 5\,000$ et $\sigma(S) = \sqrt{10\,000 \times \frac{1}{4}} = 50$.

2. Par le théorème central limite, $\frac{S - 5\,000}{50}$ suit approximativement la loi $\mathcal{N}(0,1)$. Donc

$$P(4\,900 \leq S \leq 5\,100) = P\left(-2 \leq \frac{S - 5\,000}{50} \leq 2\right) \approx 2\Phi(2) - 1.$$

On obtient environ $0,954$. La figure ci-dessous représente cette aire sous la densité de $\mathcal{N}(5\,000, 50^2)$.



3. On cherche a tel que $2\Phi(a/50) - 1 = 0,95$, soit $\Phi(a/50) = 0,975$. Ainsi
 $a/50 = 1,96$. Donc $a \approx 98$.

4. Par Bienaymé-Tchebychev, $P(|S - 5\,000| \geq 100) \leq \frac{2\,500}{10\,000} = 0,25$. Le TCL donne plutôt environ $1 - 0,954 = 0,046$. **La borne de Tchebychev est donc environ cinq fois trop pessimiste ici**, mais elle reste rigoureuse.

Corrigé de l'exercice 16 : Sondage et intervalle de confiance

- On modélise les réponses par des variables $X_1, \dots, X_n$ indépendantes de Bernoulli de paramètre p , grâce au tirage avec remise. La fréquence est $F_n = \bar{X}_n$. Ici $f = 848/1\,600 = 0,53$.
- Pour $p \in]0,1[$, la variance $p(1-p)$ est non nulle. Le TCL donne alors
$$P\left(\left|\frac{\sqrt{n}(F_n - p)}{\sqrt{p(1-p)}}\right| \leq 1,96\right) \rightarrow 2\Phi(1,96) - 1 = 0,95$$
, car la limite est continue. Or $\sqrt{p(1-p)} \leq 1/2$. L'événement $\{|F_n - p| \leq 1,96\sqrt{p(1-p)/n}\}$ est donc inclus dans $\{|F_n - p| \leq 0,98/\sqrt{n}\}$. **Par conséquent, la limite inférieure de $P(|F_n - p| \leq 0,98/\sqrt{n})$ est au moins 0,95.**
- L'événement $|F_n - p| \leq 0,98/\sqrt{n}$ s'écrit $p \in [F_n - 0,98/\sqrt{n}, F_n + 0,98/\sqrt{n}]$. Avec $\sqrt{1\,600} = 40$, la demi-largeur vaut 0,0245. **L'intervalle de confiance est $[0,5055; 0,5545]$.**
- L'intervalle est entièrement au-dessus de 0,5. **On peut donc annoncer la victoire de A avec un niveau de confiance asymptotique de 95 %**, sous réserve que le modèle soit juste. Pour une demi-largeur 0,01, il faut $0,98/\sqrt{n} \leq 0,01$, soit $\sqrt{n} \geq 98$. **Il faut interroger au moins 9 604 personnes.**

Corrigé de l'exercice 17 : Le TCL n'est pas une convergence en probabilité

- Par le théorème central limite, $Z_n \mathcal{LN}(0, \sigma^2)$.
- On a $S_{2n} = S_n + (S_{2n} - S_n)$. Donc $Z_{2n} = \frac{S_n + (S_{2n} - S_n)}{\sqrt{2n}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(Z_n + Z'_n)$. La

variable Z'_n dépend de $X_{n+1}, \dots, X_{2n}$ seulement. Elle est donc indépendante de Z_n , par le lemme des coalitions. De plus, $(X_{n+1}, \dots, X_{2n})$ a la même loi que $(X_1, \dots, X_n)$.
Donc Z'_n a la même loi que Z_n .

3. On écrit $Z_{2n} - Z_n = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - 1\right)Z_n + \frac{1}{\sqrt{2}}Z'_n$. Notons ψ_n la fonction caractéristique de Z_n . Par indépendance :

$$\varphi_{Z_{2n} - Z_n}(t) = \psi_n\left(\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - 1\right)t\right)\psi_n\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right).$$

D'après la question 1 et le théorème de Lévy, $\psi_n(s) \rightarrow e^{-\sigma^2 s^2/2}$ pour tout s . Donc la limite vaut $\exp\left(-\frac{\sigma^2 t^2}{2}\left[\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - 1\right)^2 + \frac{1}{2}\right]\right)$. Or $\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - 1\right)^2 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \sqrt{2} + 1 + \frac{1}{2} = 2 - \sqrt{2}$. **Par Lévy, $Z_{2n} - Z_n \mathcal{L} \mathcal{N}(0, (2 - \sqrt{2})\sigma^2)$.**

4. Supposons que $Z_n \rightarrow Z$ en probabilité. Alors $Z_{2n} \rightarrow Z$ en probabilité, et donc $Z_{2n} - Z_n \rightarrow 0$ en probabilité. Il en découle $Z_{2n} - Z_n \mathcal{L} 0$. Par unicité de la loi limite, la loi $\mathcal{N}(0, (2 - \sqrt{2})\sigma^2)$ serait la masse de Dirac en 0. C'est faux, car $(2 - \sqrt{2})\sigma^2 > 0$. **Donc (Z_n) ne converge pas en probabilité.**
5. On a $E\left((S_n/n^\alpha)^2\right) = \frac{n\sigma^2}{n^{2\alpha}} = \sigma^2 n^{1-2\alpha}$. Cette quantité tend vers 0 pour $\alpha > 1/2$. **La convergence a lieu dans L^2 , donc en probabilité.** Ainsi $\sqrt{n}$ est exactement l'échelle critique.

Corrigé de l'exercice 18 : Une limite par le théorème central limite

1. La somme de variables de Poisson indépendantes est de Poisson, de paramètre la somme des paramètres. On le vérifie avec les fonctions caractéristiques :

$$\prod_{k=1}^n \exp(e^{it} - 1) = \exp(n(e^{it} - 1)). \text{ Donc } S_n \sim \mathcal{P}(n).$$

2. On a $u_n = \sum_{k=0}^n e^{-n} \frac{n^k}{k!} = P(S_n \leq n)$.

3. Les X_k sont indépendantes, de même loi, d'espérance 1 et de variance 1. Le TCL donne

$\frac{S_n - n}{\sqrt{n}} \sim \mathcal{N}(0,1)$. La fonction de répartition limite Φ est continue en 0. Donc $u_n = P\left(\frac{S_n - n}{\sqrt{n}} \leq 0\right) \rightarrow \Phi(0)$. **Ainsi** $u_n \rightarrow 1/2$.

4. Notons G_n la fonction de répartition de $(S_n - n)/\sqrt{n}$ et $x_n = \lfloor \sqrt{n} \rfloor / \sqrt{n}$. La somme vaut $G_n(x_n)$, et $x_n \rightarrow 1$ avec $x_n \leq 1$. Soit $\eta > 0$. Pour n grand, $1 - \eta \leq x_n \leq 1$, donc $G_n(1 - \eta) \leq G_n(x_n) \leq G_n(1)$ par croissance. Les bornes tendent vers $\Phi(1 - \eta)$ et $\Phi(1)$. On fait ensuite tendre η vers 0, par continuité de Φ . **La limite vaut** $\Phi(1) \approx 0,841$.

Corrigé de l'exercice 19 : La loi de Cauchy échappe aux grands nombres

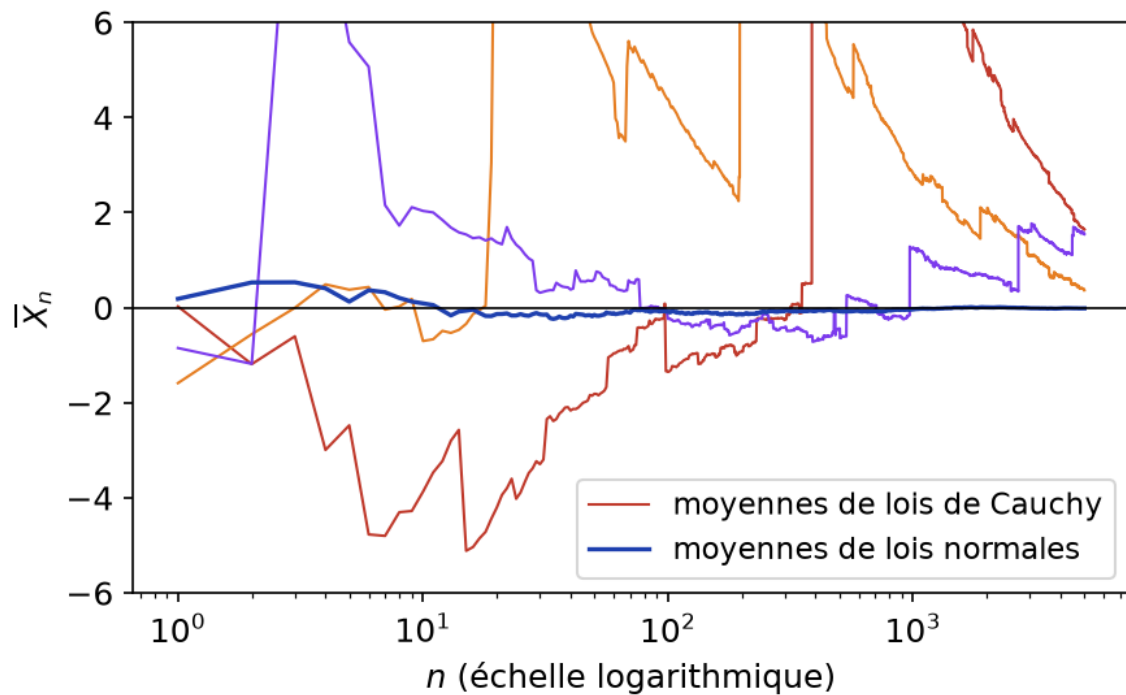
1. On a $E|X_1| = \int_{\mathbb{R}} \frac{|x|}{\pi(1+x^2)} dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{x}{1+x^2} dx$. Or

$$\int_0^A \frac{x}{1+x^2} dx = \frac{1}{2} \ln(1+A^2) \rightarrow +\infty. \text{ Donc } X_1 \text{ n'est pas intégrable.}$$

2. Par indépendance, $\varphi_{\bar{X}_n}(t) = \varphi(t/n)^n = (e^{-|t|/n})^n = e^{-|t|}$. La fonction caractéristique caractérise la loi. **Donc** $\bar{X}_n$ **suit la loi de Cauchy, pour tout** n .

3. La fonction de répartition de la loi de Cauchy est $\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctan x$. Donc $P(|\bar{X}_n| > 1) = 1 - \frac{2}{\pi} \arctan 1 = 1 - \frac{1}{2}$. **Ainsi** $P(|\bar{X}_n| > 1) = 1/2$ **pour tout** n .

4. Supposons que $\bar{X}_n \rightarrow c$ en probabilité. Alors $\bar{X}_n \rightarrow c$ en loi. Or la suite des lois est constante, égale à la loi de Cauchy. Par unicité de la loi limite, la loi de Cauchy serait la masse de Dirac en c . C'est absurde, puisqu'elle a une densité. **La moyenne empirique ne converge vers aucune constante.** La figure ci-dessous confronte des trajectoires de moyennes de Cauchy à une trajectoire de moyennes gaussiennes.



5. On a $\frac{S_n}{n^2} = \frac{\bar{X}_n}{n}$, avec $\bar{X}_n$ de loi de Cauchy. Donc

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n^2}\right| > \varepsilon\right) = P(|\bar{X}_n| > n\varepsilon) = 1 - \frac{2}{\pi} \arctan(n\varepsilon). \text{ Cette quantité tend vers } 1 - \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\pi}{2} = 0. \text{ Donc } S_n/n^2 \rightarrow 0 \text{ en probabilité.}$$

Point de méthode : avant d'appliquer une loi des grands nombres, vérifiez toujours l'intégrabilité ; ici, c'est elle qui manque, et le résultat devient faux.

Corrigé de l'exercice 20 : Problème, polynômes de Bernstein et théorème de Weierstrass

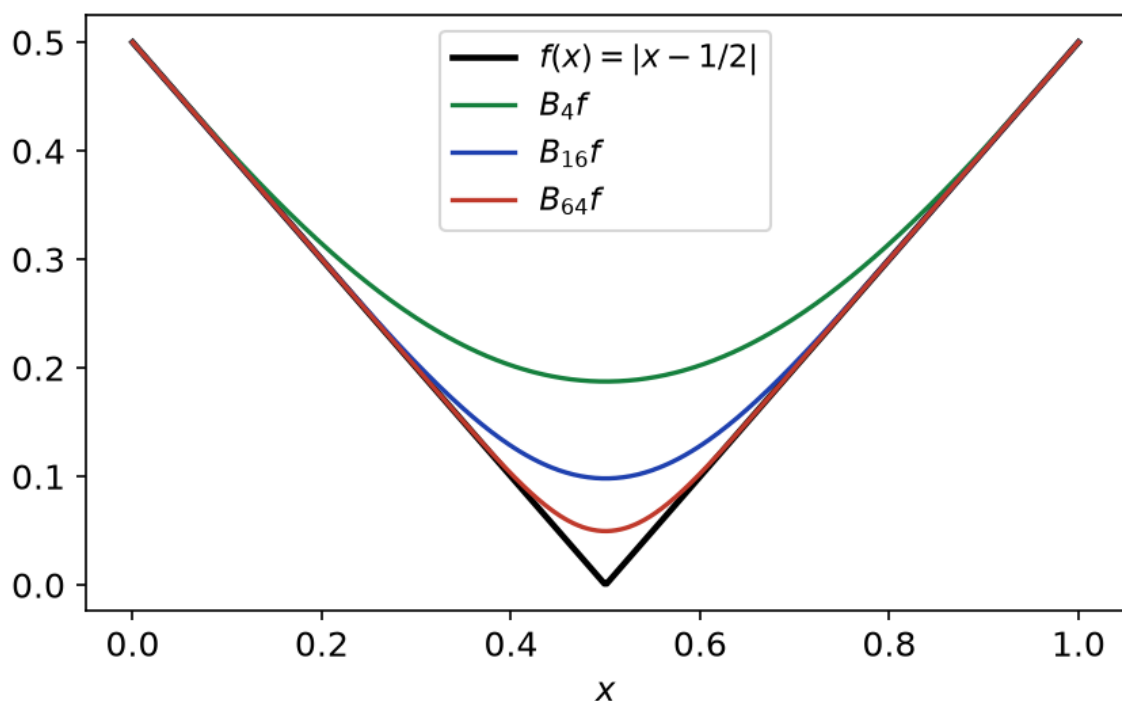
- Chaque terme $f(k/n) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$ est un polynôme de degré n au plus. **Donc $B_n f$ est un polynôme de degré au plus n .** Ensuite, $P(S_n = k) = \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$. Par la formule de transfert, $E(f(S_n/n)) = \sum_{k=0}^n f(k/n) P(S_n = k) = B_n f(x)$.

2. Pour $f = 1$, on obtient $B_n f = 1$. Pour $f(x) = x$, $B_n f(x) = E(S_n)/n = x$, donc $B_n f(x) = x$. Pour $f(x) = x^2$,
 $E(S_n^2) = \text{Var}(S_n) + E(S_n)^2 = nx(1-x) + n^2x^2$. **Donc**
 $B_n f(x) = x^2 + \frac{x(1-x)}{n}$.

3. La fonction f est continue sur le compact $[0,1]$. Par le théorème de Heine, elle y est uniformément continue, ce qui fournit δ . Fixons x et notons $A = \{|S_n/n - x| > \delta\}$. On a
 $|B_n f(x) - f(x)| = |E(f(S_n/n) - f(x))| \leq E(|f(S_n/n) - f(x)|1_{A^c}) + E(|f(S_n/n) - f(x)|1_A)$.

Le premier terme est au plus ϵ . Le second est au plus $2\|f\|_\infty P(A)$. Or, par Bienaymé-Tchebychev, $P(A) \leq \frac{\text{Var}(S_n/n)}{\delta^2} = \frac{x(1-x)}{n\delta^2} \leq \frac{1}{4n\delta^2}$. **D'où**
 $|B_n f(x) - f(x)| \leq \epsilon + \frac{\|f\|_\infty}{2n\delta^2}$.

4. La borne ne dépend pas de x . Donc $\limsup_n \|B_n f - f\|_\infty \leq \epsilon$, pour tout $\epsilon > 0$. **Ainsi**
 $B_n f \rightarrow f$ **uniformément sur** $[0,1]$. On obtient le **théorème d'approximation de Weierstrass** : toute fonction continue sur un segment est limite uniforme de polynômes. La figure ci-dessous montre cette convergence pour $f(x) = |x - 1/2|$.



5. Si f est L -lipschitzienne, $|B_n f(x) - f(x)| \leq L E|S_n/n - x|$. Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, $E|S_n/n - x| \leq \sqrt{\text{Var}(S_n/n)} = \sqrt{x(1-x)/n} \leq \frac{1}{2\sqrt{n}}$. **Donc**
 $\|B_n f - f\|_\infty \leq \frac{L}{2\sqrt{n}}$.

6. Pour $n = 4$ et $x = 1/2$, les probabilités de $S_4 = 0, \dots, 4$ sont $\frac{1}{16}, \frac{4}{16}, \frac{6}{16}, \frac{4}{16}, \frac{1}{16}$. Les valeurs de $|k/4 - 1/2|$ sont $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}$. Donc $B_4 f(1/2) = \frac{1}{16} \left(\frac{1}{2} + 1 + 0 + 1 + \frac{1}{2} \right)$. On obtient $B_4 f(1/2) = \frac{3}{16}$. De même, $B_2 f(1/2) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2}$, soit $B_2 f(1/2) = \frac{1}{4}$. Ces erreurs respectent la borne $\frac{L}{2\sqrt{n}}$ avec $L = 1$: $\frac{3}{16} \leq \frac{1}{4}$ et $\frac{1}{4} \leq \frac{1}{2\sqrt{2}}$.

Point de méthode : une identité $g(x) = E(h(Y_x))$ transforme un problème d'analyse en problème de probabilités, où la loi des grands nombres fournit la convergence.

Corrigé de l'exercice 21 : Lois discrètes qui convergent vers une loi à densité

- Pour $x < 1/n$, $F_n(x) = 0$. Pour $x \geq 1$, $F_n(x) = 1$. Entre les deux, le nombre de valeurs $k/n \leq x$ est $\lfloor nx \rfloor$. Donc $F_n(x) = \frac{\lfloor nx \rfloor}{n}$ pour $0 \leq x < 1$.
- Pour $x \in [0, 1[$, on a $nx - 1 < \lfloor nx \rfloor \leq nx$, donc $|F_n(x) - x| < 1/n$. En dehors de $[0, 1[$, les deux fonctions coïncident. Ainsi $\sup_x |F_n(x) - F(x)| \leq 1/n$, et $F_n \rightarrow F$ en tout point. Donc X_n converge en loi vers U .
- Toutes les valeurs de X_n sont rationnelles, donc $P(X_n \in \mathbb{Q}) = 1$. Au contraire, $\mathbb{Q}$ est dénombrable et la loi de U est diffuse, donc $P(U \in \mathbb{Q}) = 0$. Il n'y a pas de contradiction. La convergence en loi porte sur $E(f(X_n))$ pour f continue bornée, et $1_{\mathbb{Q}}$ n'est pas continue. Autrement dit, $P(X_n \in A) \rightarrow P(U \in A)$ n'a lieu que si la frontière de A est négligeable pour la loi limite ; or la frontière de $\mathbb{Q}$ est $\mathbb{R}$ entier.
- Pour $t \neq 0$, $E(e^{itX_n}) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n e^{itk/n}$. C'est une somme géométrique de raison $e^{it/n} \neq 1$ pour n grand :

$$E(e^{itX_n}) = \frac{e^{it/n}}{n} \cdot \frac{e^{it} - 1}{e^{it/n} - 1}.$$

Or $n(e^{it/n} - 1) \rightarrow it$ et $e^{it/n} \rightarrow 1$. Donc $\varphi_{X_n}(t) \rightarrow \frac{e^{it} - 1}{it}$, qui est la fonction caractéristique de U . Cette limite se prolonge par 1 en $t = 0$, où $\varphi_{X_n}(0) = 1$; elle est

continue. Le théorème de Lévy donne à nouveau $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} U$. On peut aussi y voir une somme de Riemann de $\int_0^1 e^{itx} dx$, comme le suggère la figure de l'énoncé.

[Revenir aux énoncés des exercices](#)

Pour aller plus loin en L3

- Le cours : [loi des grands nombres et TCL, cours de maths en L3](#)
- Les énoncés : [exercices de maths en L3 sur loi des grands nombres et TCL](#)
- À maîtriser avant : [Espaces probabilisés, variables aléatoires et espérance](#)
- Chapitre précédent : [Espaces probabilisés, variables aléatoires et espérance](#)
- Tester vos connaissances : [QCM de maths en L3 par chapitre](#)
- Le sommaire : [tous les chapitres de maths de L3](#) et la [licence de maths de L1 à L3](#)