

Logique et ensembles

Exercice 1 : Tables de vérité et tautologies

Soient P , Q et R trois assertions.

1. Dressez la table de vérité de $P \Rightarrow Q$, de $\neg P \vee Q$ et de $\neg Q \Rightarrow \neg P$. Que constatez-vous ?
2. Montrez que $((P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow R)) \Rightarrow (P \Rightarrow R)$ est une tautologie.
3. L'assertion $(P \Rightarrow Q) \Rightarrow (Q \Rightarrow P)$ est-elle une tautologie ?
4. Montrez que $\neg(P \Rightarrow Q)$ est logiquement équivalente à $P \wedge \neg Q$.

Exercice 2 : Négation d'assertions simples

Dans cet exercice, x et y désignent des réels et n un entier naturel. Écrivez la négation de chaque assertion sous une forme positive, c'est-à-dire sans placer « non » devant toute la phrase.

1. « n est pair et $n \geq 10$ ».
2. « $x \leq 1$ ou $x > 5$ ».
3. « $0 < x \leq 3$ ».
4. « Si n est premier, alors n est impair ». Cette assertion est-elle vraie pour tout n ?

5. « $x = 0 \Leftrightarrow y = 0$ ».

Exercice 3 : Traduction en langage formel

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Traduisez chaque phrase à l'aide de quantificateurs.

1. La fonction f est constante.
2. La fonction f s'annule au moins une fois.
3. La fonction f est la fonction nulle.
4. La fonction f n'est pas la fonction nulle.
5. La fonction f est croissante sur $\mathbb{R}$.
6. La fonction f prend toutes les valeurs réelles.
7. La fonction f est bornée.
8. Entre deux réels distincts, il existe toujours un rationnel.

Exercice 4 : Vrai ou faux avec quantificateurs

Dites si chaque assertion est vraie ou fausse, puis justifiez. Lorsqu'elle est fausse, écrivez sa négation et démontrez celle-ci.

1. $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, y > x$.

2. $\exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, y > x$.

$$\forall x \in \mathbb{R},$$

3. $\exists y \in \mathbb{R},$.
 $y^2 = x$

$$\forall x \in \mathbb{R}_+,$$

4. $\exists y \in \mathbb{R},$.
 $y^2 = x$

$$\exists x \in \mathbb{R},$$

5. $\forall y \in \mathbb{R},$.
 $xy = 0$

$$\forall x \in \mathbb{R},$$

6. $\exists y \in \mathbb{R},$.
 $xy = 1$

$$\forall n \in \mathbb{N},$$

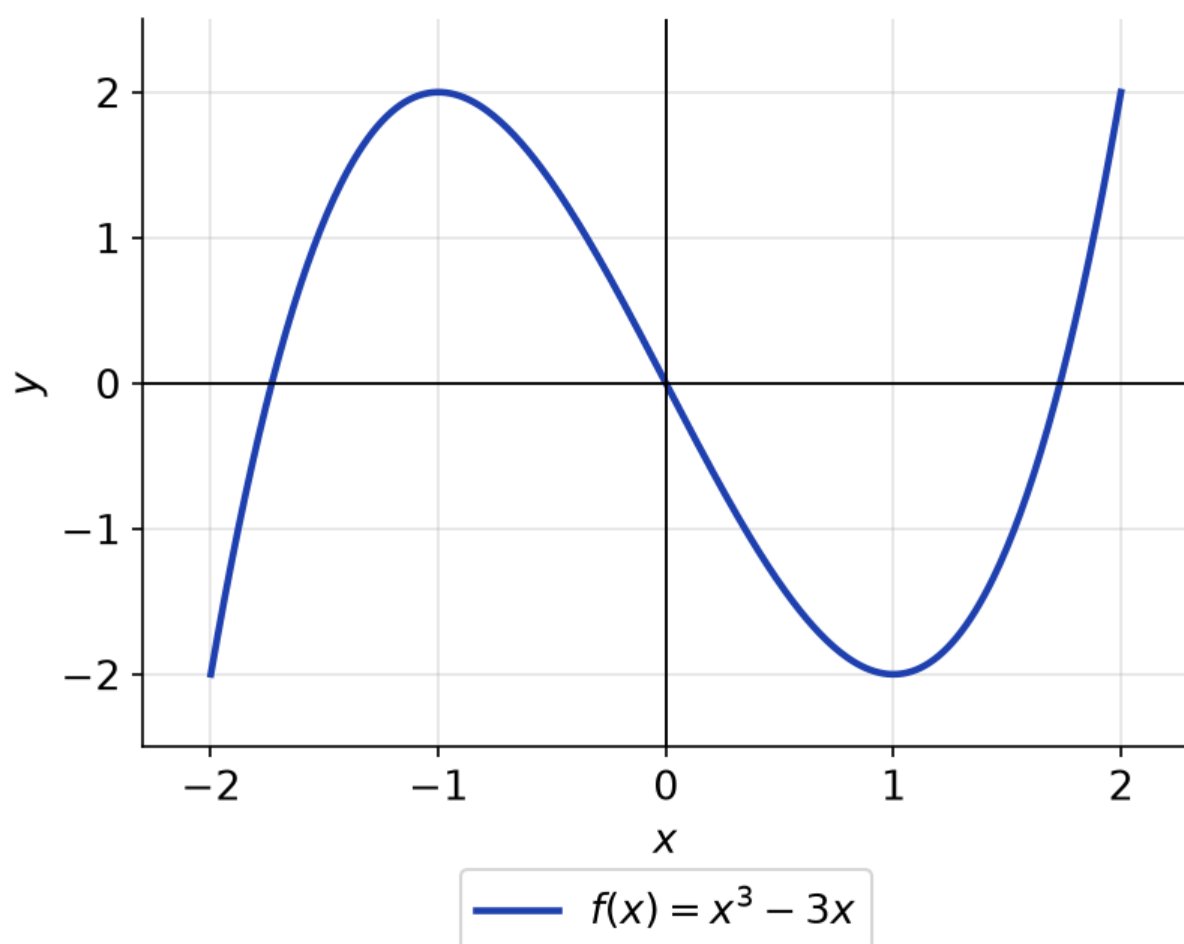
7. $\exists m \in \mathbb{N},$.
 $(n = 2m \text{ ou } n = 2m + 1)$

$$\exists ! x \in \mathbb{R},$$

8. $x^2 = 4$.

Exercice 5 : Lecture d'un graphe et quantificateurs

On considère la fonction f définie sur $[-2, 2]$ par $f(x) = x^3 - 3x$. Sa courbe est tracée ci-dessous.



Pour chacune des assertions suivantes, conjecturez sa valeur de vérité sur le graphique. Écrivez ensuite sa négation, puis démontrez par le calcul celle des deux qui est vraie.

1. $\forall x \in [-2, 2], -2 \leq f(x) \leq 2$. On pourra factoriser $f(x) - 2$ et $f(x) + 2$.

2. $\exists x \in [-2, 2], f(x) = 0$.

3. $\exists ! x \in [-2, 2], f(x) = 1$.

4. $\forall y \in [-2, 2], \exists x \in [-2, 2], f(x) = y$.

5. $\forall x \in [0, 2], f(x) \leq 0$.

$$6. \quad \forall (x, y) \in [-2, 2]^2, \\ , x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y).$$

Exercice 6 : Négation de phrases à plusieurs quantificateurs

Soient $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ et $(u_n)_n \in \mathbb{N}$ une suite réelle. Écrivez chaque propriété avec des quantificateurs, puis écrivez sa négation.

1. f est continue en a : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que tout réel x vérifiant $|x - a| \leq \eta$ vérifie $|f(x) - f(a)| \leq \varepsilon$.
2. La suite (u_n) tend vers $+\infty$.
3. La suite (u_n) est bornée.
4. La fonction f est périodique.
5. La fonction f est uniformément continue sur $\mathbb{R}$: pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que, pour tous réels x et y , $|x - y| \leq \eta$ entraîne $|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$.
6. La suite (u_n) est croissante à partir d'un certain rang.
7. On pose $u_n = (-1)^n$. À l'aide de la négation de la convergence vers 0 , montrez que (u_n) ne converge pas vers 0 .

Exercice 7 : Ordre des quantificateurs

1. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. On considère les assertions $A : \langle \forall x \in \mathbb{R}, \exists M \in \mathbb{R}, f(x) \leq M \rangle$ et $B : \langle \exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) \leq M \rangle$. Montrez que A est vraie pour toute fonction f . Que signifie B ? Donnez une fonction pour laquelle B est fausse.

2. Dans $\mathbb{N}$, dites si les assertions suivantes sont vraies ou fausses : $\forall x \exists y, x \leq y$; $\exists y \forall x, x \leq y$;

$$\exists x \forall y, \quad \forall y \exists x, \\ , x \leq y \quad , x \leq y .$$

3. Reprenez l'assertion $\exists x \forall y, \quad , x \leq y$, lorsque x et y parcourent $\mathbb{Z}$.

4. Soit $P(x, y)$ un prédicat, avec $x \in E$ et $y \in F$. Démontrez que

$$\left(\begin{array}{l} \exists y \in F, \\ \forall x \in E, \\ , P(x, y) \end{array} \right) \Rightarrow \left(\begin{array}{l} \forall x \in E, \\ \exists y \in F, \\ , P(x, y) \end{array} \right).$$

Exercice 8 : Réciproque et contraposée

Pour chaque implication, où x, a, b sont réels et n entier, écrivez la réciproque et la contraposée. Dites ensuite si l'implication et sa réciproque sont vraies.

- $x > 1 \Rightarrow x^2 > 1$.
- n est multiple de 6 $\Rightarrow n$ est pair.
- $ab = 0 \Rightarrow (a = 0 \text{ ou } b = 0)$.
- $x^2 = x \Rightarrow x = 1$.
- La condition « $x > 1$ » est-elle nécessaire pour avoir $x^2 > 1$? Est-elle suffisante ?

Exercice 9 : Raisonnements par contraposition

Démontrez chacune des implications suivantes en raisonnant par contraposition.

- Pour tous réels x et y : si $x \neq y$, alors $(x+1)(y-1) \neq (x-1)(y+1)$.
- Pour tout entier n : si $n^2 - 1$ n'est pas divisible par 8, alors n est pair.

3. Pour tout réel a : si $|a| \leq \varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$, alors $a = 0$.
4. Pour tout entier $n \geq 2$: si $2^n - 1$ est premier, alors n est premier. On pourra utiliser l'identité $x^b - 1 = (x - 1)(x^{b-1} + x^{b-2} + \dots + x + 1)$.

Exercice 10 : Irrationalité par l'absurde

On admet que $\sqrt{2}$ est irrationnel et que toute fraction positive s'écrit sous forme irréductible.

1. Montrez par l'absurde que $\sqrt{6}$ est irrationnel.
2. En calculant $(\sqrt{2} + \sqrt{3})^2$, montrez que $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ est irrationnel.
3. Soient $x \in \mathbb{Q}$ et $y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Montrez que $x + y$ est irrationnel. Si de plus $x \neq 0$, montrez que xy est irrationnel.
4. La somme de deux irrationnels est-elle toujours irrationnelle ?

Exercice 11 : Nombres premiers et logarithmes

1. On admet que tout entier $N \geq 2$ possède au moins un diviseur premier. Montrez par l'absurde qu'il existe une infinité de nombres premiers. On pourra considérer $N = p_1 p_2 \dots p_k + 1$.
2. Montrez que $\frac{\ln 2}{\ln 3}$ est irrationnel.
3. Montrez que $\log_{10} 2 = \frac{\ln 2}{\ln 10}$ est irrationnel.

Exercice 12 : Principe des tiroirs

1. Montrez par l'absurde le principe des tiroirs : si l'on range $n + 1$ objets dans n tiroirs, alors un

tiroir au moins contient deux objets.

2. Soit $n \geq 1$. On choisit $n + 1$ entiers distincts dans $\left\{1, 2, \dots, 2n\right\}$. Montrez que deux d'entre eux sont consécutifs.
3. On place cinq points dans un carré plein de côté 2. Montrez que deux d'entre eux sont à une distance inférieure ou égale à $\sqrt{2}$.
4. Soit $n \geq 1$. Montrez que parmi $n + 1$ entiers quelconques, il en existe deux dont la différence est divisible par n .

Exercice 13 : Choisir un type de raisonnement

Pour chaque énoncé, choisissez un mode de raisonnement adapté, justifiez ce choix, puis rédigez la démonstration.

1. L'assertion « $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq x$ » est fausse.
2. Pour tout entier n , si n^2 est divisible par 3, alors n est divisible par 3.
3. Pour tous réels $a, b \geq 0$, on a $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$.
4. Il n'existe pas d'entiers relatifs a et b tels que $6a + 9b = 4$.
5. Tout réel x s'écrit de manière unique $x = n + r$ avec $n \in \mathbb{Z}$ et $r \in [0, 1[$. On admet que, pour tout réel x , il existe un unique entier $\lfloor x \rfloor$ tel que $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$.

Exercice 14 : Analyse-synthèse : parties paire et impaire

1. Montrez qu'une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ à la fois paire et impaire est la fonction nulle.
2. Par analyse-synthèse, montrez que toute fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ s'écrit de manière unique comme somme d'une fonction paire g et d'une fonction impaire h . Donnez g et h .

- Déterminez les parties paire et impaire des fonctions $x \rightarrow x^3 + 2x^2 - x + 5$, $x \rightarrow e^x$ et $x \rightarrow \frac{1}{1+e^x}$.
- Montrez de même que toute fonction $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ s'écrit de manière unique $f = g + h$, où g est affine, c'est-à-dire de la forme $x \rightarrow \alpha x + \beta$, et où h vérifie $h(0) = h(1) = 0$.

Exercice 15 : Analyse-synthèse : équations fonctionnelles

Dans chaque question, déterminez toutes les fonctions $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant la condition donnée. Séparez clairement l'analyse et la synthèse.

- $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$,
 $f(x+y) + f(x-y) = 2x^2 + 2y^2$.
- $\forall x \in \mathbb{R}$,
 $f(x) + 2f(1-x) = x$.
- $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$,
 $f(x)f(y) - f(xy) = x + y$.

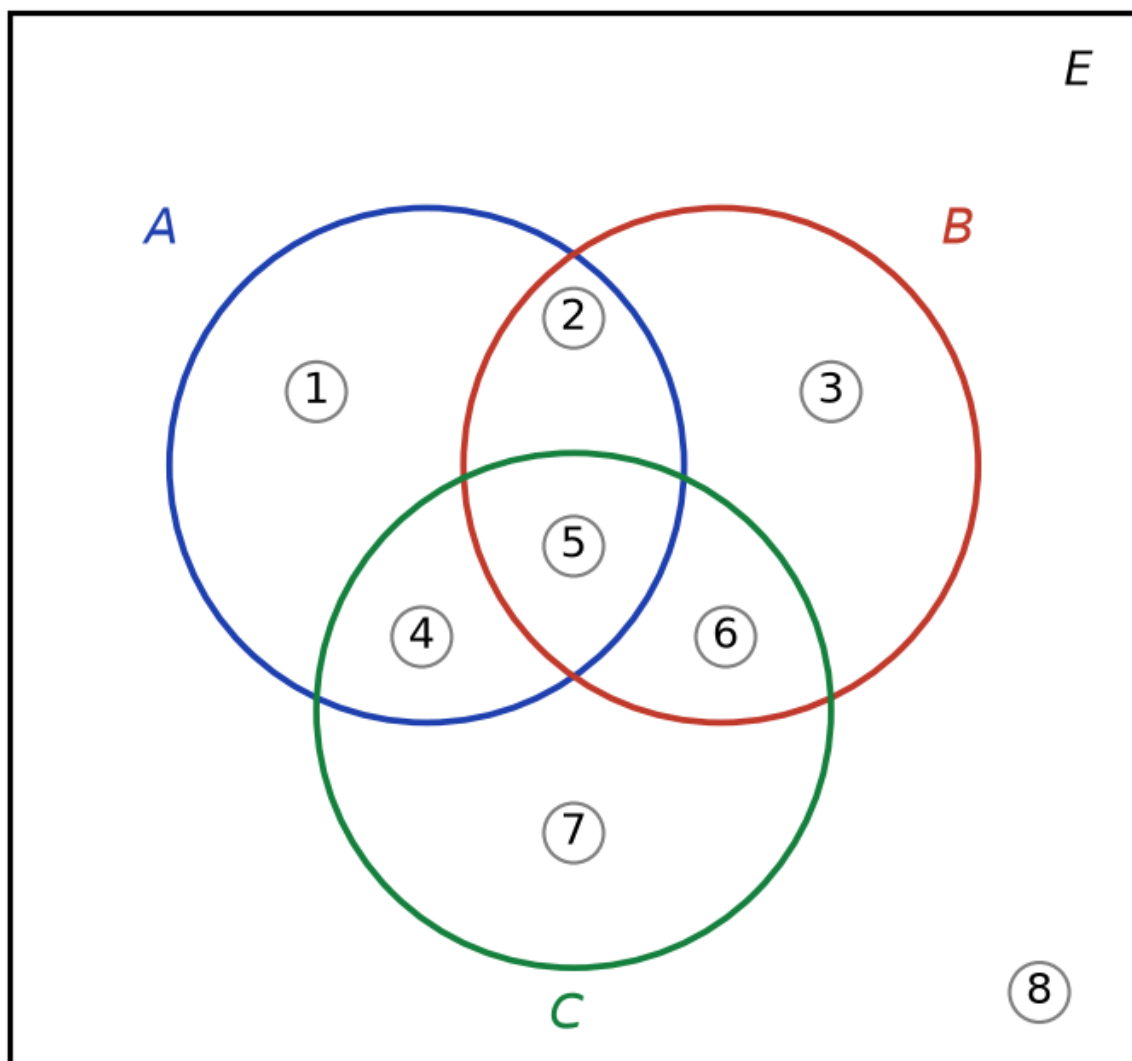
Exercice 16 : Ensembles définis par une propriété

- Écrivez en extension les ensembles $A = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ divise } 12\}$,
 $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 3x + 2 = 0\}$ et $C = \{n \in \mathbb{Z} \mid |n-1| \leq 2\}$.
- Écrivez sous forme d'intervalle ou de réunion d'intervalles :
 $I = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \leq 4\} \cap \{x \in \mathbb{R} \mid x > 1\}$, le complémentaire J dans $\mathbb{R}$ de $]-\infty, 1] \cup [3, +\infty[$, et
 $K = \{x \in \mathbb{R} \mid |x-2| < 1\} \cup \{x \in \mathbb{R} \mid |x-3| \leq 1\}$.
- On note $\bigcup_{n \geq 1} A_n$ l'ensemble des réels qui appartiennent à au moins un A_n , et $\bigcap_{n \geq 1} A_n$ celui des réels qui appartiennent à tous les A_n . Montrez que

$$\bigcup_{n \geq 1} \left[\frac{1}{n}, 2 - \frac{1}{n} \right] =]0, 2[\text{ et } \bigcap_{n \geq 1} \left] -\frac{1}{n}, \frac{1}{n} \right[= \{0\}.$$

Exercice 17 : Égalités d'ensembles

Soient A , B , C trois parties d'un ensemble E . La figure ci-dessous découpe E en huit zones numérotées de 1 à 8.



1. Donnez les numéros des zones qui composent $A \cap (B \cup C)$, $(A \cap B) \cup (A \cap C)$, $A \setminus (B \cap C)$, $(A \setminus B) \cup (A \setminus C)$, $(A \setminus B) \setminus C$ et $A \setminus (B \cup C)$. Quelles égalités conjecturez-vous ?
2. Démontrez par double inclusion que $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$.
3. Démontrez par une chaîne d'équivalences que $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$.
4. Démontrez que $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Exercice 18 : Inclusions et simplifications

Soient A , B , C trois parties d'un ensemble E .

1. Montrez que $A \cup B = A \cap B$ si et seulement si $A = B$.
2. Montrez que $A \cup B \subset A \cap C$ si et seulement si $B \subset A \subset C$.
3. Montrez que si $A \cap B = A \cap C$ et $A \cup B = A \cup C$, alors $B = C$.
4. Montrez par des contre-exemples qu'aucune des deux hypothèses de la question 3 ne suffit seule.
5. Montrez que $A \subset B$ si et seulement si $\overline{B} \subset \overline{A}$.

Exercice 19 : Ensemble des parties

1. Écrivez $\mathcal{P}(E)$ pour $E = \{0, 1, 2\}$.
2. Écrivez $\mathcal{P}(\emptyset)$ et $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset))$.
3. Avec $E = \{0, 1, 2\}$, dites si chaque assertion est vraie ou fausse : $0 \in E$; $\{0\} \in E$; $\{0\} \subset E$; $\{0\} \in \mathcal{P}(E)$; $\emptyset \in \mathcal{P}(E)$; $\emptyset \subset \mathcal{P}(E)$; $\{\{0\}, \{1, 2\}\} \subset \mathcal{P}(E)$; $E \in \mathcal{P}(E)$.

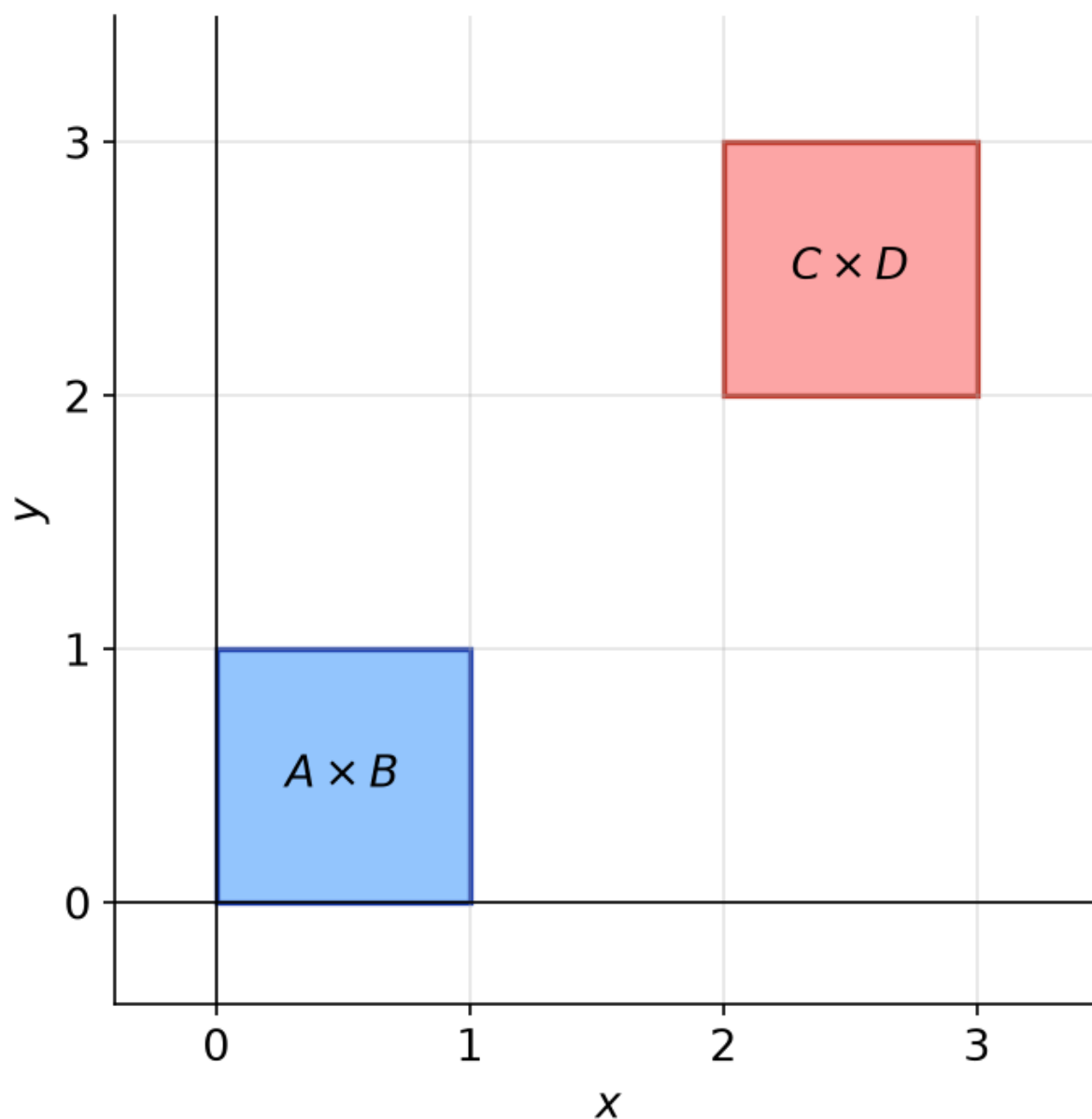
4. Soient A et B deux ensembles. Montrez que $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$.
5. Montrez que $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subset \mathcal{P}(A \cup B)$, et que l'inclusion peut être stricte.

Exercice 20 : Produit cartésien

1. Soient $G = \{1, 2\}$ et $H = \{a, b, c\}$. Écrivez $G \times H$ en extension. A-t-on $G \times H = H \times G$?

Dans la suite, A et C sont des parties d'un ensemble E , et B et D des parties d'un ensemble F .

2. Montrez que $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$.
3. Montrez que $(A \times B) \cup (C \times D) \subset (A \cup C) \times (B \cup D)$.
4. On prend $E = F = \mathbb{R}$, $A = B = [0, 1]$ et $C = D = [2, 3]$, comme sur la figure ci-dessous. Montrez que l'inclusion de la question 3 est alors stricte.
5. Montrez que $A \times B = \emptyset$ si et seulement si $A = \emptyset$ ou $B = \emptyset$.



Exercice 21 : Fonctions indicatrices

Soient A et B deux parties d'un ensemble E . On note $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ la différence symétrique de A et B .

1. Exprimez $1_{A \setminus B}$ et $1_{A \Delta B}$ en fonction de 1_A et 1_B .
2. Démontrez la loi de De Morgan $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ à l'aide des indicatrices.
3. Montrez que $A \subset B$ si et seulement si $1_A 1_B = 1_A$.

4. Vérifiez que $(1_A - 1_B)^2 = 1_A + 1_B - 21_A 1_B$. Retrouvez alors, avec les indicatrices, que $A \cup B = A \cap B$ équivaut à $A = B$.

Exercice 22 : Indicatrices et formule du crible

Soient E un ensemble fini et A, B, C trois parties de E .

1. Justifiez que $\text{card}(A) = \sum_{x \in E} 1_A(x)$.
2. Montrez que $1_{A \cup B \cup C} = 1 - (1 - 1_A)(1 - 1_B)(1 - 1_C)$, puis développez.
3. Déduisez-en une formule pour $\text{card}(A \cup B \cup C)$.
4. Dans une promotion de 100 étudiants, 45 suivent un cours d'espagnol, 38 d'allemand et 30 d'italien. De plus, 12 suivent espagnol et allemand, 10 espagnol et italien, 8 allemand et italien, et 3 suivent les trois. Combien d'étudiants ne suivent aucune de ces trois langues ? Combien en suivent exactement une ?

Exercice 23 : Problème : la différence symétrique

Soit E un ensemble. Pour $A, B \in \mathcal{P}(E)$, on pose $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

1. Montrez que $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.
2. Montrez que $1_{A \Delta B} = 1_A + 1_B - 21_A 1_B$.
3. Calculez $A \Delta \emptyset$, $A \Delta A$ et $A \Delta E$.
4. Montrez que la différence symétrique est associative : $(A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C)$.
Décrivez les éléments de $A \Delta B \Delta C$.
5. Montrez que $A \Delta B = \emptyset$ si et seulement si $A = B$.

6. Soient $A, B \in \mathcal{P}(E)$. Montrez que l'équation $A \Delta X = B$, d'inconnue $X \in \mathcal{P}(E)$, possède une unique solution, que vous déterminerez. Déduisez-en que $A \Delta B = A \Delta C$ entraîne $B = C$.
7. Montrez que $A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C)$.

Exercice 24 : Problème : l'argument diagonal de Cantor

Soit E un ensemble. On suppose qu'à chaque élément x de E on associe une partie $f(x)$ de E . On pose

$$D = \left\{ x \in E \mid x \notin f(x) \right\}.$$

- Dans cette question, $E = \{1, 2, 3\}$, $f(1) = \{1, 2\}$, $f(2) = \emptyset$ et $f(3) = \{1, 3\}$. Déterminez D et vérifiez que D n'est égal à aucune des parties $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$.
- Revenons au cas général. Soit $a \in E$. En raisonnant par l'absurde et en vous demandant si $a \in D$, montrez que $D \neq f(a)$.
- Déduisez-en qu'il n'existe aucune façon d'associer à chaque élément de E une partie de E de sorte que toutes les parties de E soient atteintes.
- Soit $(s_k)_k \in \mathbb{N}$ une suite de suites, chaque $s_k = (s_k(n))_n \in \mathbb{N}$ étant à valeurs dans $\{0, 1\}$. On définit la suite t par $t(n) = 1 - s_n(n)$. Montrez que t est différente de chaque s_k . Quel lien voyez-vous avec la question 3, via les fonctions indicatrices des parties de $\mathbb{N}$?
- Montrez par l'absurde qu'il n'existe pas d'ensemble U dont les éléments seraient tous les ensembles. On pourra considérer $R = \{x \in U \mid x \notin x\}$.

Le corrigé des exercices

Chaque exercice est corrigé en détail, question par question, sur la page suivante.



Pour aller plus loin en L1

- Le cours : [logique et ensembles, cours de maths en L1](#)
- Chapitre suivant : [Applications et relations binaires](#)
- Tester vos connaissances : [QCM de maths en L1 par chapitre](#)
- Le sommaire : [tous les chapitres de maths de L1](#) et la [licence de maths de L1 à L3](#)