Logique et ensembles

Corrigé de l'exercice 1 : Tables de vérité et tautologies

1. On dresse la table en parcourant les quatre cas possibles pour P et Q :

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$\neg P \vee Q$	$\neg Q \Rightarrow \neg P$
V	V	V	V	V
V	F	F	F	F
F	V	V	V	V
F	F	V	V	V

   Les trois dernières colonnes sont identiques. **Ainsi,** $P \Rightarrow Q$ **,** $\neg P \vee Q$ **et la contraposée** $\neg Q \Rightarrow \neg P$ **sont logiquement équivalentes.**

2. Une implication n'est fausse que si son hypothèse est vraie et sa conclusion fausse. Supposons donc $P \Rightarrow R$ fausse, c'est-à-dire P vraie et R fausse. Si $P \Rightarrow Q$ était vraie, alors Q serait vraie, puisque P l'est. Ensuite, $Q \Rightarrow R$ donnerait R vraie, ce qui est faux. Par conséquent, dès que la conclusion est fausse, l'hypothèse $(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow R)$ est fausse. **L'implication est donc vraie dans tous les cas : c'est une tautologie**, appelée transitivité de l'implication.

3. Prenons P fausse et Q vraie. Alors $P \Rightarrow Q$ est vraie, mais $Q \Rightarrow P$ est fausse. L'implication $(P \Rightarrow Q) \Rightarrow (Q \Rightarrow P)$ a donc une hypothèse vraie et une conclusion fausse. **Ce n'est pas une tautologie** : une implication n'entraîne pas sa réciproque.

4. D'après la question 1, $\neg(P \Rightarrow Q) \equiv \neg(\neg P \vee Q)$. Par la loi de De Morgan, cette assertion équivaut à $\neg(\neg P) \wedge \neg Q$. Enfin, la double négation donne $\neg(P \Rightarrow Q) \equiv P \wedge \neg Q$.

Point de méthode : la négation d'une implication n'est jamais une implication. C'est une conjonction : « l'hypothèse est vraie et la conclusion est fausse ».

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

Corrigé de l'exercice 2 : Négation d'assertions simples

1. L'assertion est une conjonction. Par De Morgan, sa négation est une disjonction : « n **est impair ou** $n \leq 9$ ». En effet, pour un entier, $n < 10$ équivaut à $n \leq 9$.

2. La négation d'une disjonction est la conjonction des négations. On obtient « $x > 1$ et $x \leq 5$ », c'est-à-dire $1 < x \leq 5$.

3. L'assertion signifie « $0 < x$ et $x \leq 3$ ». Sa négation est donc « $x \leq 0$ **ou** $x > 3$ ».

4. D'après l'exercice 1, la négation de $P \Rightarrow Q$ est $P \wedge \neg Q$. On obtient ainsi « n **est premier et** n **est pair** ». Or cette négation est vraie pour $n = 2$. **L'assertion de départ n'est donc pas vraie pour tout** n ; elle est fausse pour $n = 2$, et vraie pour tout autre entier.

5. L'équivalence $P \Leftrightarrow Q$ signifie $(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$. Sa négation est donc $(P \wedge \neg Q) \vee (Q \wedge \neg P)$. Ici, cela donne « **(** $x = 0$ **et** $y \neq 0$ **) ou (** $x \neq 0$ **et** $y = 0$ **)** ». Autrement dit, exactement l'un des deux réels est nul.

Corrigé de l'exercice 3 : Traduction en langage formel

1. La fonction prend toujours la même valeur : $\begin{array}{l}\exists\, c \in \mathbb{R},\\ \forall\, x \in \mathbb{R},\\ f(x) = c\end{array}$. Une traduction équivalente est $\begin{array}{l}\forall\, (x, y) \in \mathbb{R}^2,\\ f(x) = f(y)\end{array}$.

2. Il suffit d'un point d'annulation : $\begin{array}{l}\exists\, x \in \mathbb{R},\\ f(x) = 0\end{array}$.

3. Tous les points sont des zéros : $\begin{array}{l}\forall\, x \in \mathbb{R},\\ f(x) = 0\end{array}$.

4. C'est la négation de la phrase précédente : $\begin{array}{l}\exists\, x \in \mathbb{R},\\ f(x) \neq 0\end{array}$. Attention, ce n'est pas « $\begin{array}{l}\forall\, x,\\ f(x) \neq 0\end{array}$ », qui signifierait que f ne s'annule jamais.

5. $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \\ ,x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$.

6. Chaque réel y doit être atteint : $\forall y \in \mathbb{R}, \\ ,\exists x \in \mathbb{R}, \\ ,f(x) = y$. Ici, x dépend de y, d'où l'ordre des quantificateurs.

7. Une même constante doit majorer $|f|$ partout : $\exists M \in \mathbb{R}, \\ ,\forall x \in \mathbb{R}, \\ ,|f(x)| \leq M$.

8. Quitte à échanger les deux réels, on peut supposer le premier strictement plus petit. On écrit donc $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \\ ,x < y \Rightarrow \exists q \in \mathbb{Q}, \\ ,x < q < y$.

Point de méthode : écrivez les quantificateurs dans l'ordre où l'on choisit les objets. Un objet qui dépend d'un autre doit être introduit après lui.

Corrigé de l'exercice 4 : Vrai ou faux avec quantificateurs

1. **Vraie.** Soit $x \in \mathbb{R}$. Le réel $y = x + 1$ vérifie $y > x$.

2. **Fausse.** Sa négation est $\forall y \in \mathbb{R}, \\ ,\exists x \in \mathbb{R}, \\ ,x \geq y$. Or elle est vraie : pour y donné, $x = y$ convient.
   Autrement dit, aucun réel ne majore strictement tous les réels.

3. **Fausse.** Sa négation s'écrit $\exists x \in \mathbb{R}, \\ ,\forall y \in \mathbb{R}, \\ ,y^2 \neq x$. Prenons $x = -1$: pour tout réel y, $y^2 \geq 0 > -1$, donc $y^2 \neq -1$.

4. **Vraie.** Soit $x \geq 0$. Le réel $y = \sqrt{x}$ vérifie $y^2 = x$.

5. **Vraie.** Le réel $x = 0$ convient, car $0 \times y = 0$ pour tout y.

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

6. **Fausse.** Sa négation est $\begin{array}{l}\exists\, x \in \mathbb{R},\\ \forall\, y \in \mathbb{R},\\ xy \neq 1\end{array}$. En effet, pour $x = 0$, on a $xy = 0 \neq 1$ pour tout y.

7. **Vraie.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Si n est pair, $m = n/2$ est un entier naturel et $n = 2m$. Sinon, $n \geq 1$ est impair, donc $m = (n-1)/2$ est un entier naturel et $n = 2m + 1$.

8. **Fausse.** La négation de « il existe un unique x » est « il n'existe aucun x, ou il en existe au moins deux distincts ». Ici, 2 et -2 sont deux réels distincts de carré 4. L'unicité est donc en défaut.

Corrigé de l'exercice 5 : Lecture d'un graphe et quantificateurs

1. **Vraie.** Sa négation est $\begin{array}{l}\exists\, x \in [-2,2],\\ f(x) < -2 \text{ ou } f(x) > 2\end{array}$. Démontrons l'assertion. D'abord, on vérifie en développant que

$$f(x) - 2 = x^3 - 3x - 2 = (x+1)^2\,(x-2), \quad f(x) + 2 = x^3 - 3x + 2 = (x-1)^2\,(x+2).$$

Soit $x \in [-2,2]$. Comme $(x+1)^2 \geq 0$ et $x - 2 \leq 0$, on a $f(x) - 2 \leq 0$. De même, $(x-1)^2 \geq 0$ et $x + 2 \geq 0$, donc $f(x) + 2 \geq 0$. **Ainsi,** $-2 \leq f(x) \leq 2$ **pour tout** $x \in [-2,2]$**.** Ces bornes sont atteintes en $x = 1$ et $x = -1$.

2. **Vraie.** Sa négation est $\begin{array}{l}\forall\, x \in [-2,2],\\ f(x) \neq 0\end{array}$. Or $f(0) = 0$, ce qui suffit. Plus précisément, $f(x) = x(x^2 - 3)$ s'annule en 0, $\sqrt{3}$ et $-\sqrt{3}$. Ces trois réels sont dans $[-2,2]$, car $3 < 4$ donne $\sqrt{3} < 2$.

3. **Fausse.** Sa négation est : « $\begin{array}{l}\forall\, x \in [-2,2],\\ f(x) \neq 1\end{array}$, ou il existe deux réels distincts x, x' de $[-2,2]$ tels que $f(x) = f(x') = 1$ ». Montrons la seconde partie. La fonction $g = f - 1$ est polynomiale, donc continue. De plus, $g(-2) = -3$, $g(-1) = 1$, $g(0) = -1$ et $g(2) = 1$. Par le théorème des valeurs intermédiaires, g s'annule sur $]-2,-1[$, sur $]-1,0[$ et sur $]0,2[$. **L'équation** $f(x) = 1$ **a donc au moins trois solutions distinctes** (environ $-1{,}53$, $-0{,}35$ et $1{,}88$).

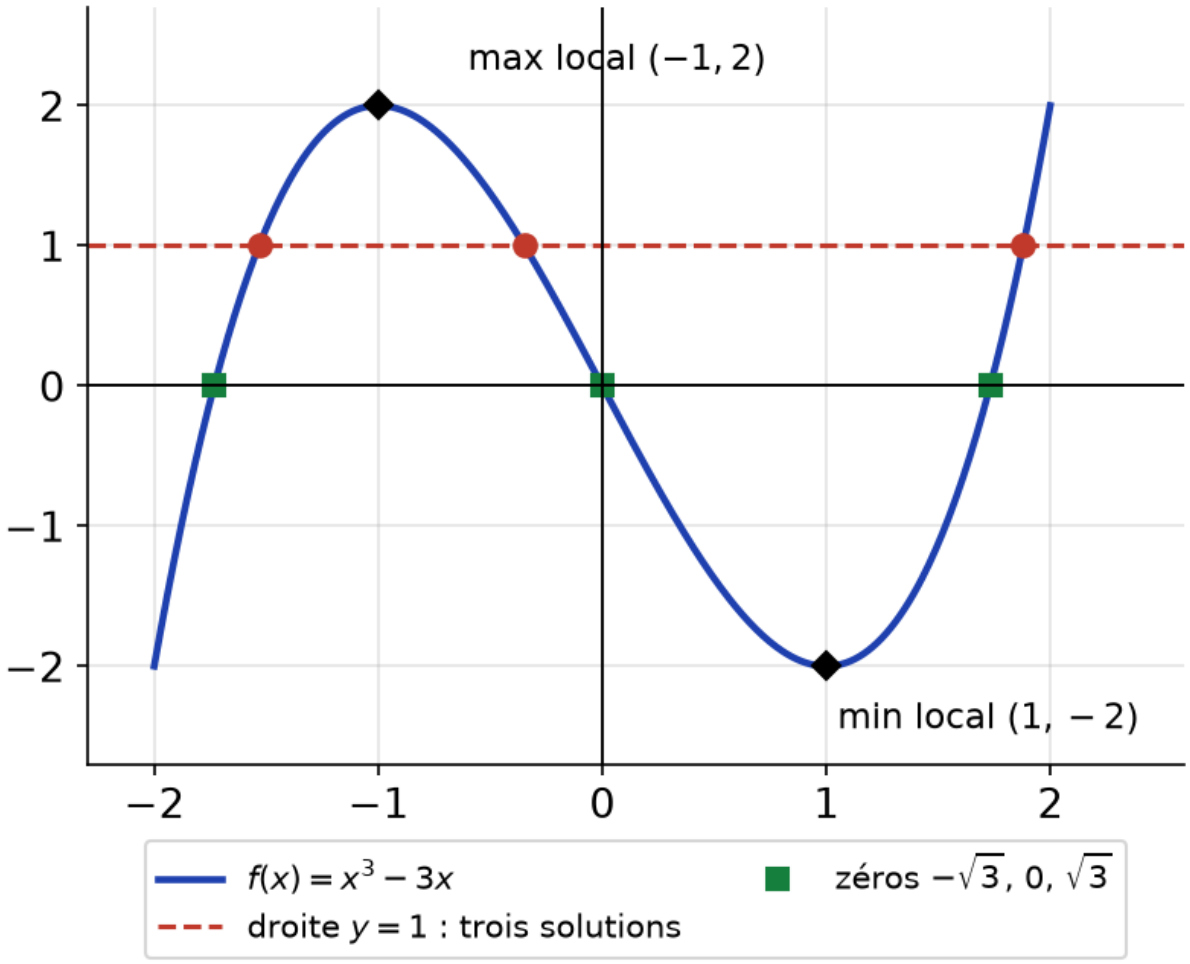
4. **Vraie.** Sa négation est $\begin{array}{l}\exists\, y \in [-2,2],\\ \forall\, x \in [-2,2],\\ f(x) \neq y\end{array}$. Démontrons l'assertion. Soit $y \in [-2,2]$. La fonction f est continue sur $[-1,1]$, avec $f(-1) = 2$ et $f(1) = -2$. Comme y est compris

entre ces deux valeurs, le théorème des valeurs intermédiaires fournit $x \in [-1, 1]$ tel que $f(x) = y$. **Tout réel de $[-2, 2]$ est donc atteint.**

5. **Fausse.** Sa négation est $\begin{matrix}\exists\, x \in [0, 2], \\ f(x) > 0\end{matrix}$. Or $f(2) = 8 - 6 = 2 > 0$. **Le réel $x = 2$ est un contre-exemple.** En fait, $f(x) \leq 0$ seulement sur $[0, \sqrt{3}]$.

6. **Fausse.** L'assertion dit que f est croissante. Sa négation est $\begin{matrix}\exists\, (x, y) \in [-2, 2]^2, \\ x \leq y \text{ et } f(x) > f(y)\end{matrix}$. Prenons $x = -1$ et $y = 1$: on a $x \leq y$, et pourtant $f(-1) = 2 > -2 = f(1)$. **La fonction f n'est donc pas croissante sur $[-2, 2]$.**

La figure ci-dessous reprend la courbe avec les points utilisés : les zéros, les extremums locaux et les trois solutions de $f(x) = 1$.



Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

Corrigé de l'exercice 6 : Négation de phrases à plusieurs quantificateurs

1. Continuité en a :

$$\begin{array}{l}\forall\ \varepsilon > 0,\\ ,\exists\ \eta > 0,\\ ,\forall\ x \in \mathbb{R},\\ ,|x-a| \leq \eta \Rightarrow |f(x)-f(a)| \leq \varepsilon.\end{array}$$

Négation : $\begin{array}{l}\exists\ \varepsilon > 0,\\ ,\forall\ \eta > 0,\\ ,\exists\ x \in \mathbb{R},\\ ,|x-a| \leq \eta \text{ et } |f(x)-f(a)| > \varepsilon\end{array}$ **.** L'implication finale devient bien une conjonction.

2. Limite $+\infty$: $\begin{array}{l}\forall\ A \in \mathbb{R},\\ ,\exists\ N \in \mathbb{N},\\ ,\forall\ n \geq N,\\ ,u_n \geq A\end{array}$. **Négation :** $\begin{array}{l}\exists\ A \in \mathbb{R},\\ ,\forall\ N \in \mathbb{N},\\ ,\exists\ n \geq N,\\ ,u_n < A\end{array}$ **.**

3. Suite bornée : $\begin{array}{l}\exists\ M \in \mathbb{R},\\ ,\forall\ n \in \mathbb{N},\\ ,|u_n| \leq M\end{array}$. **Négation :** $\begin{array}{l}\forall\ M \in \mathbb{R},\\ ,\exists\ n \in \mathbb{N},\\ ,|u_n| > M\end{array}$ **.**

4. Périodicité : $\begin{array}{l}\exists\ T > 0,\\ ,\forall\ x \in \mathbb{R},\\ ,f(x+T) = f(x)\end{array}$. **Négation :** $\begin{array}{l}\forall\ T > 0,\\ ,\exists\ x \in \mathbb{R},\\ ,f(x+T) \neq f(x)\end{array}$ **.**

5. Continuité uniforme : $\begin{array}{l}\forall\ \varepsilon > 0,\\ ,\exists\ \eta > 0,\\ ,\forall\ (x,y) \in \mathbb{R}^2,\\ ,|x-y| \leq \eta \Rightarrow |f(x)-f(y)| \leq \varepsilon\end{array}$. **Négation :**

$\begin{array}{l}\exists\ \varepsilon > 0,\\ ,\forall\ \eta > 0,\\ ,\exists\ (x,y) \in \mathbb{R}^2,\\ ,|x-y| \leq \eta \text{ et } |f(x)-f(y)| > \varepsilon\end{array}$ **.** Comparez avec la question 1 : ici, η ne dépend pas du point.

6. Croissance à partir d'un rang : $\begin{array}{l}\exists\, N \in \mathbb{N},\\ \forall\, n \geq N,\\ u_n \leq u_{n+1}\end{array}$. **Négation :** $\begin{array}{l}\forall\, N \in \mathbb{N},\\ \exists\, n \geq N,\\ u_n > u_{n+1}\end{array}$**.** Autrement dit, la suite décroît strictement d'un terme au suivant une infinité de fois.

7. La négation de « (u_n) converge vers 0 » s'écrit $\begin{array}{l}\exists\, \varepsilon > 0,\\ \forall\, N \in \mathbb{N},\\ \exists\, n \geq N,\\ |u_n| > \varepsilon\end{array}$. Prenons $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Soit $N \in \mathbb{N}$; choisissons $n = N$. Alors $|u_N| = |(-1)^N| = 1 > \frac{1}{2}$. **La négation est donc vraie : (u_n) ne converge pas vers 0.**

Point de méthode : dans une négation, les ensembles de quantification ne changent pas. Par exemple, « $\forall\, \varepsilon > 0$ » devient « $\exists\, \varepsilon > 0$ », et jamais « $\exists\, \varepsilon \leq 0$ ».

Corrigé de l'exercice 7 : Ordre des quantificateurs

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Posons $M = f(x)$; alors $f(x) \leq M$. **L'assertion A est donc vraie pour toute fonction**, car M peut dépendre de x. En revanche, B exige une constante M commune à tous les x : B **signifie que f est majorée**. Pour $f(x) = x$, B est fausse. En effet, sa négation $\begin{array}{l}\forall\, M,\\ \exists\, x,\\ f(x) > M\end{array}$ est vraie avec $x = M + 1$.

2. Dans $\mathbb{N}$:
   - $\begin{array}{l}\forall\, x\ \exists\, y,\\ x \leq y\end{array}$ est **vraie**, avec $y = x$;
   - $\begin{array}{l}\exists\, y\ \forall\, x,\\ x \leq y\end{array}$ est **fausse**, car sa négation $\begin{array}{l}\forall\, y\ \exists\, x,\\ x > y\end{array}$ est vraie avec $x = y + 1$;
   - $\begin{array}{l}\exists\, x\ \forall\, y,\\ x \leq y\end{array}$ est **vraie**, avec $x = 0$, plus petit élément de $\mathbb{N}$;
   - $\begin{array}{l}\forall\, y\ \exists\, x,\\ x \leq y\end{array}$ est **vraie**, avec $x = y$.

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

3. Dans $\mathbb{Z}$, l'assertion $\begin{matrix}\exists\, x\ \forall\, y,\\ x \leq y\end{matrix}$ est **fausse**. En effet, sa négation $\begin{matrix}\forall\, x\ \exists\, y,\\ y < x\end{matrix}$ est vraie avec $y = x - 1$. Ainsi, $\mathbb{Z}$ n'a pas de plus petit élément.

4. Supposons qu'il existe $y_0 \in F$ tel que $P(x, y_0)$ soit vraie pour tout $x \in E$. Soit alors $x \in E$. Par hypothèse, $P(x, y_0)$ est vraie. Il existe donc bien un $y \in F$, à savoir y_0, tel que $P(x, y)$. Comme x est quelconque, **on a démontré** $\begin{matrix}\forall\, x \in E,\\ \exists\, y \in F,\\ P(x, y)\end{matrix}$. La question 2 montre que la réciproque est fausse.

Corrigé de l'exercice 8 : Réciproque et contraposée

1. Réciproque : $x^2 > 1 \Rightarrow x > 1$. Contraposée : $x^2 \leq 1 \Rightarrow x \leq 1$. L'implication est vraie. En effet, si $x > 1$, alors $x > 0$, donc $x^2 = x \cdot x > 1 \cdot x > 1$. En revanche, la réciproque est fausse : $x = -2$ vérifie $x^2 = 4 > 1$ mais pas $x > 1$. **Implication vraie, réciproque fausse.**

2. Réciproque : n pair $\Rightarrow$ n multiple de 6. Contraposée : n impair $\Rightarrow$ n n'est pas multiple de 6. Si $n = 6k$, alors $n = 2(3k)$ est pair. Cependant, $n = 2$ est pair sans être multiple de 6. **Implication vraie, réciproque fausse.**

3. Réciproque : $(a = 0 \text{ ou } b = 0) \Rightarrow ab = 0$. Contraposée : $(a \neq 0 \text{ et } b \neq 0) \Rightarrow ab \neq 0$. L'implication est vraie : si $ab = 0$ et $a \neq 0$, alors $b = \frac{ab}{a} = 0$. La réciproque est vraie aussi, car un produit dont un facteur est nul est nul. **Les deux sont vraies : on a une équivalence.**

4. Réciproque : $x = 1 \Rightarrow x^2 = x$. Contraposée : $x \neq 1 \Rightarrow x^2 \neq x$. L'implication est fausse, car $x = 0$ vérifie $x^2 = x$ et $x \neq 1$. La réciproque est vraie, puisque $1^2 = 1$. **Implication fausse, réciproque vraie.** En fait, $x^2 = x \Leftrightarrow x \in \{0, 1\}$.

5. D'après la question 1, « $x > 1$ » entraîne « $x^2 > 1$ » : **c'est une condition suffisante**. En revanche, $x = -2$ vérifie $x^2 > 1$ sans vérifier $x > 1$: **ce n'est pas une condition nécessaire**. La condition nécessaire et suffisante est $|x| > 1$.

Corrigé de l'exercice 9 : Raisonnements par contraposition

1. La contraposée s'écrit : si $(x+1)(y-1) = (x-1)(y+1)$, alors $x = y$. Supposons cette égalité. En développant, on obtient $xy - x + y - 1 = xy + x - y - 1$, donc $2y = 2x$. **Ainsi $x = y$, et l'implication de départ est démontrée.**

2. La contraposée s'écrit : si n est impair, alors 8 divise $n^2 - 1$. Supposons $n = 2k + 1$ avec $k \in \mathbb{Z}$. Alors
$$n^2 - 1 = 4k^2 + 4k = 4k(k+1).$$
Or $k(k+1)$ est pair, comme produit de deux entiers consécutifs. Écrivons $k(k+1) = 2j$ avec $j \in \mathbb{Z}$. Alors $n^2 - 1 = 8j$. **Donc 8 divise $n^2 - 1$, ce qui établit la contraposée.**

3. La contraposée s'écrit : si $a \neq 0$, alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que $|a| > \varepsilon$. Supposons $a \neq 0$, donc $|a| > 0$. Posons $\varepsilon = \frac{|a|}{2}$. Alors $\varepsilon > 0$ et $|a| = 2\varepsilon > \varepsilon$. **La contraposée est vraie, donc l'implication aussi.**

4. La contraposée s'écrit : si $n \geq 2$ n'est pas premier, alors $2^n - 1$ n'est pas premier. Supposons $n = ab$ avec a, b entiers tels que $2 \leq a < n$ et $2 \leq b < n$. Appliquons l'identité avec $x = 2^a$:
$$2^n - 1 = (2^a)^b - 1 = (2^a - 1)\left(2^{a(b-1)} + 2^{a(b-2)} + \ldots + 2^a + 1\right).$$
D'une part, $2^a - 1 \geq 3$, car $a \geq 2$. D'autre part, $2^a - 1 < 2^n - 1$, car $a < n$. Ainsi, $2^n - 1$ admet un diviseur strictement compris entre 1 et lui-même. **Il n'est donc pas premier, ce qui prouve l'implication.** Par exemple, $2^4 - 1 = 15 = 3 \times 5$. Notez que la réciproque est fausse : $2^{11} - 1 = 2047 = 23 \times 89$.

Point de méthode : commencez toujours par écrire la contraposée en toutes lettres. Ensuite, annoncez « Supposons… » avec la négation de la conclusion.

Corrigé de l'exercice 10 : Irrationalité par l'absurde

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

1. Supposons par l'absurde que $\sqrt{6} = \frac{p}{q}$, avec $p, q \in \mathbb{N}^*$ et la fraction irréductible. Alors $p^2 = 6q^2$, donc p^2 est pair. D'après le cours, p est alors pair : écrivons $p = 2k$. On obtient $4k^2 = 6q^2$, soit $2k^2 = 3q^2$. Ainsi, $3q^2$ est pair. Or si q^2 était impair, $3q^2$ serait impair ; donc q^2 est pair, puis q est pair. Finalement, 2 divise p et q, ce qui contredit l'irréductibilité. **Donc $\sqrt{6}$ est irrationnel.**

2. On calcule $(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2 = 2 + 2\sqrt{6} + 3 = 5 + 2\sqrt{6}$. Supposons par l'absurde que $s = \sqrt{2}+\sqrt{3}$ soit rationnel. Alors s^2 est rationnel, donc $\sqrt{6} = \frac{s^2-5}{2}$ aussi. Cela contredit la question 1. **Donc $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ est irrationnel.**

3. Supposons par l'absurde que $r = x + y$ soit rationnel. Alors $y = r - x$ est une différence de rationnels, donc un rationnel. C'est absurde, donc $x + y \notin \mathbb{Q}$. De même, supposons $x \neq 0$ et $xy = r \in \mathbb{Q}$. Alors $y = \frac{r}{x}$ est rationnel, ce qui est absurde. **Donc $xy \notin \mathbb{Q}$.**

4. **Non.** D'après la question 3 avec $x = -1$, le réel $-\sqrt{2}$ est irrationnel. Pourtant, $\sqrt{2} + (-\sqrt{2}) = 0$ est rationnel. De même, $\sqrt{2}$ et $1 - \sqrt{2}$ sont irrationnels, et leur somme vaut 1.

Corrigé de l'exercice 11 : Nombres premiers et logarithmes

1. Supposons par l'absurde qu'il n'existe qu'un nombre fini de nombres premiers $p_1, \dots, p_k$. Posons $N = p_1 p_2 \cdots p_k + 1$. Comme $N \geq 3$, il possède un diviseur premier p. Or p figure dans la liste : $p = p_i$. Ainsi, p_i divise N et le produit $p_1 \cdots p_k$, donc leur différence, qui vaut 1. C'est impossible, car $p_i \geq 2$. **Il existe donc une infinité de nombres premiers.**

2. Les réels $\ln 2$ et $\ln 3$ sont strictement positifs, donc le quotient aussi. Supposons par l'absurde que $\frac{\ln 2}{\ln 3} = \frac{p}{q}$ avec $p, q \in \mathbb{N}^*$. Alors $q \ln 2 = p \ln 3$, soit $\ln(2^q) = \ln(3^p)$. Comme $\ln$ est strictement croissante, donc injective, on obtient $2^q = 3^p$. Or 2^q est pair puisque $q \geq 1$, alors que 3^p est impair. **C'est absurde, donc $\frac{\ln 2}{\ln 3}$ est irrationnel.**

3. De même, supposons $\frac{\ln 2}{\ln 10} = \frac{p}{q}$ avec $p, q \in \mathbb{N}^*$. On obtient $2^q = 10^p = 2^p \times 5^p$. Comme $5^p > 1$, on a $2^q > 2^p$, donc $q > p$. En divisant par 2^p, il vient $2^{q-p} = 5^p$. Le membre de gauche est pair, car $q - p \geq 1$, et celui de droite est impair. **C'est absurde, donc $\log_{10} 2$ est irrationnel.**

Corrigé de l'exercice 12 : Principe des tiroirs

1. Supposons par l'absurde que chaque tiroir contienne au plus un objet. Alors le nombre total d'objets est au plus $n \times 1 = n$. Or il y a $n+1$ objets, et $n+1 > n$. **C'est contradictoire, donc un tiroir contient au moins deux objets.**

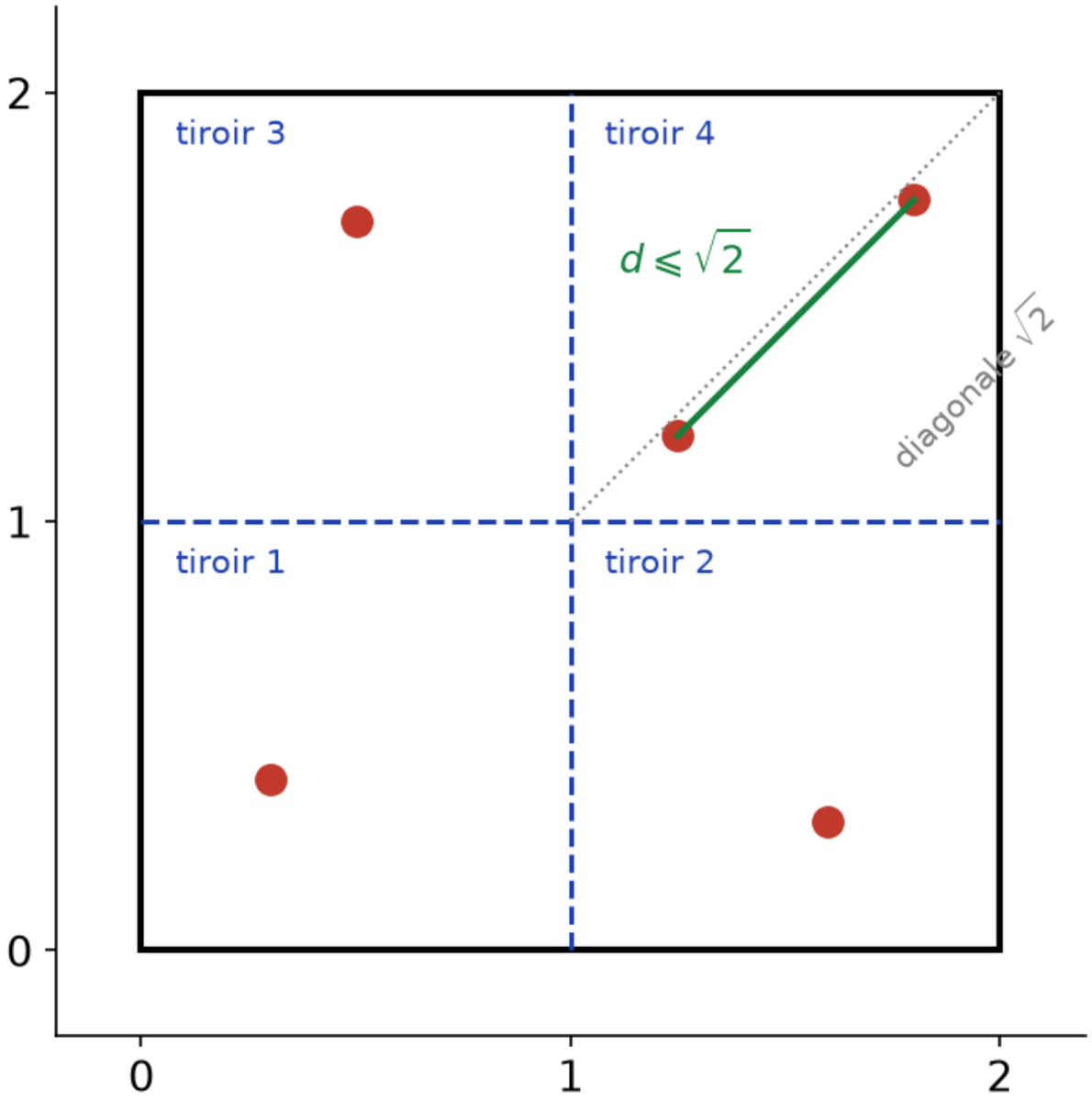
2. On forme les n tiroirs $T_k = \{2k-1, 2k\}$, pour $k = 1, \ldots, n$. Ils recouvrent exactement $\begin{Bmatrix} 1, \\ fs4\ldots\}, \ 2n \end{Bmatrix}$. On range $n+1$ entiers dans n tiroirs, donc deux entiers distincts tombent dans le même T_k. Ce sont alors $2k-1$ et $2k$. **Ils sont consécutifs.**

3. On découpe le carré $[0,2]^2$ en quatre carrés de côté 1, qui jouent le rôle de tiroirs. Chaque point est dans au moins un petit carré ; on l'affecte à l'un d'eux. Cinq points pour quatre tiroirs : deux points $M_1(x_1, y_1)$ et $M_2(x_2, y_2)$ sont dans le même petit carré. Alors $|x_1 - x_2| \leq 1$ et $|y_1 - y_2| \leq 1$, donc

$$M_1 M_2 = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \leq \sqrt{1+1} = \sqrt{2}.$$

Deux des points sont donc à distance au plus $\sqrt{2}$. La figure ci-dessous illustre ce découpage.

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.



4. Soient $a_0, \cdots, a_n$ les $n+1$ entiers. Le reste de la division euclidienne de chacun par n appartient à $\{0, \ldots, n-1\}$, qui a n éléments. Par le principe des tiroirs, deux entiers a_i et a_j, avec $i \neq j$, ont le même reste r. Écrivons $a_i = nq_i + r$ et $a_j = nq_j + r$. Alors $a_i - a_j = n(q_i - q_j)$. **La différence $a_i - a_j$ est donc divisible par n.**

Corrigé de l'exercice 13 : Choisir un type de raisonnement

1. **Contre-exemple.** Pour réfuter un énoncé universel, un seul cas suffit. Prenons $x = \frac{1}{2}$: on a $x^2 = \frac{1}{4} < \frac{1}{2} = x$. **L'assertion est donc fausse.**

2. **Contraposition**, car la divisibilité de n donne une écriture exploitable. Supposons n non divisible par 3 . Alors $n = 3k+1$ ou $n = 3k+2$, avec $k \in \mathbb{Z}$. Dans le premier cas, $n^2 = 9k^2 + 6k + 1 = 3(3k^2 + 2k) + 1$. Dans le second, $n^2 = 9k^2 + 12k + 4 = 3(3k^2 + 4k + 1) + 1$. Dans les deux cas, le reste vaut 1 . **Donc n^2 n'est pas divisible par 3 , ce qui prouve l'implication.**

3. **Raisonnement direct.** Soient $a, b \geq 0$. Comme $a = (\sqrt{a})^2$ et $b = (\sqrt{b})^2$, on a

$$\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = \frac{a - 2\sqrt{a}\sqrt{b} + b}{2} = \frac{(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2}{2} \geq 0.$$

D'où $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$, avec égalité si et seulement si $a = b$.

4. **Raisonnement par l'absurde**, adapté à un énoncé d'impossibilité. Supposons qu'il existe $a, b \in \mathbb{Z}$ tels que $6a + 9b = 4$. Or $6a + 9b = 3(2a + 3b)$ est un multiple de 3 , tandis que 4 ne l'est pas. **C'est absurde : de tels entiers n'existent pas.**

5. **Analyse-synthèse**, car on demande existence et unicité. Analyse : si $x = n + r$ avec $n \in \mathbb{Z}$ et $0 \leq r < 1$, alors $n \leq x < n + 1$. Par unicité de la partie entière, $n = \lfloor x \rfloor$, puis $r = x - \lfloor x \rfloor$. Synthèse : posons $n = \lfloor x \rfloor$ et $r = x - \lfloor x \rfloor$. Alors $n \in \mathbb{Z}$, $x = n + r$, et l'encadrement $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$ donne $0 \leq r < 1$. **L'écriture existe et elle est unique.** Par exemple, $-2{,}3 = -3 + 0{,}7$.

Corrigé de l'exercice 14 : Analyse-synthèse : parties paire et impaire

1. Soit f paire et impaire, et soit $x \in \mathbb{R}$. Alors $f(-x) = f(x)$ et $f(-x) = -f(x)$. Par conséquent, $f(x) = -f(x)$, donc $2f(x) = 0$. **Ainsi $f(x) = 0$ pour tout x : f est la fonction nulle.**

2. **Analyse.** Supposons $f = g + h$, avec g paire et h impaire. Pour tout x, on a $f(x) = g(x) + h(x)$ et $f(-x) = g(x) - h(x)$. En faisant la somme et la différence, on obtient

$$g(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}, \quad h(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}.$$

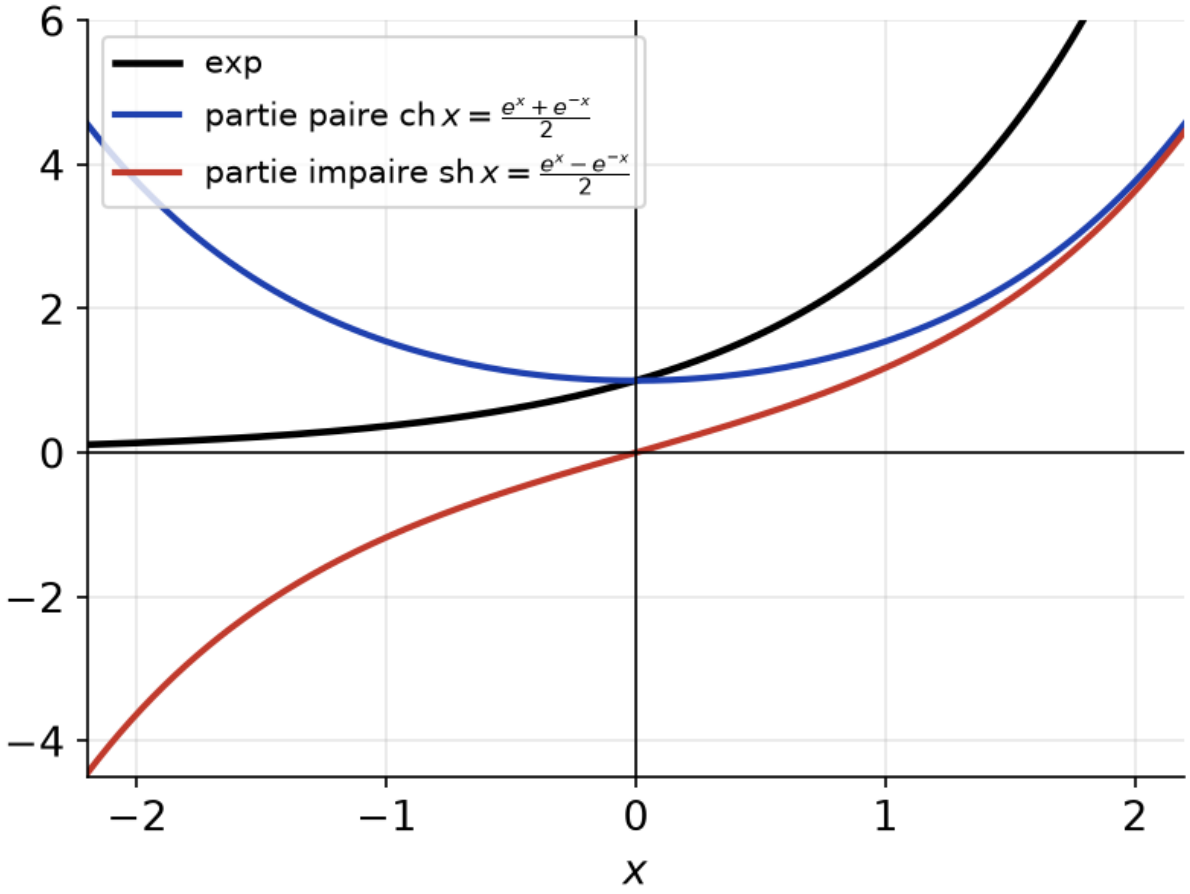
Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

Les fonctions g et h sont donc imposées, d'où l'unicité. **Synthèse.** Définissons g et h par ces formules. D'abord, $g(-x) = \frac{f(-x)+f(x)}{2} = g(x)$, donc g est paire. Ensuite, $h(-x) = \frac{f(-x)-f(x)}{2} = -h(x)$, donc h est impaire. Enfin, $g + h = f$. **La décomposition existe et elle est unique.** On peut aussi prouver l'unicité par la question 1 : si $g + h = g_1 + h_1$, alors $g - g_1 = h_1 - h$ est paire et impaire, donc nulle.

3. Pour $f(x) = x^3 + 2x^2 - x + 5$, on a $f(-x) = -x^3 + 2x^2 + x + 5$. Par suite, **la partie paire est** $x \to 2x^2 + 5$ **et la partie impaire** $x \to x^3 - x$. Pour l'exponentielle, **la partie paire est** $\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ **et la partie impaire** $\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$. Enfin, pour $k(x) = \frac{1}{1+e^x}$, on a $k(-x) = \frac{1}{1+e^{-x}} = \frac{e^x}{e^x+1}$. Donc $k(x) + k(-x) = 1$. **La partie paire est la constante** $\frac{1}{2}$**, et la partie impaire est** $x \to \frac{1-e^x}{2(1+e^x)}$**.** On vérifie en effet que $\frac{1}{1+e^x} - \frac{1}{2} = \frac{2-1-e^x}{2(1+e^x)}$.

4. **Analyse.** Supposons $f = g + h$, avec $g(x) = \alpha x + \beta$ et $h(0) = h(1) = 0$. En $x = 0$, on obtient $f(0) = \beta$. En $x = 1$, on obtient $f(1) = \alpha + \beta$. Donc $\beta = f(0)$, $\alpha = f(1) - f(0)$, puis $h = f - g$. Tout est déterminé. **Synthèse.** Posons $g(x) = (f(1) - f(0))x + f(0)$ et $h = f - g$. Alors g est affine, $h(0) = f(0) - f(0) = 0$ et $h(1) = f(1) - f(1) = 0$. **La décomposition existe et elle est unique.**

La figure ci-dessous montre l'exponentielle et ses deux parties. La courbe de ch est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées, celle de sh par rapport à l'origine.



Corrigé de l'exercice 15 : Analyse-synthèse : équations fonctionnelles

1. **Analyse.** Soit f une solution. Prenons $y = 0$: pour tout x, $2f(x) = 2x^2$, donc $f(x) = x^2$. **Synthèse.** Pour $f(x) = x^2$, on a bien $(x+y)^2 + (x-y)^2 = 2x^2 + 2y^2$ pour tous x, y. **L'unique solution est $x \to x^2$.**

2. **Analyse.** Soit f une solution. Notons (E) la relation $f(x) + 2f(1-x) = x$, valable pour tout réel x. En l'appliquant à $1-x$, on obtient (E') : $f(1-x) + 2f(x) = 1-x$. Calculons $2 \times$ (E') $-$ (E) :

$$2f(1-x) + 4f(x) - f(x) - 2f(1-x) = 2 - 2x - x, \text{ soit } 3f(x) = 2 - 3x.$$

Donc $f(x) = \frac{2}{3} - x$. **Synthèse.** Pour cette fonction,

$$f(x) + 2f(1-x) = \frac{2}{3} - x + 2\left(\frac{2}{3} - 1 + x\right) = \frac{2}{3} - x + \frac{4}{3} - 2 + 2x = x.$$

L'unique solution est $x \to \frac{2}{3} - x$.

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

3. **Analyse.** Soit f une solution. Avec $x = y = 0$, on obtient $f(0)^2 - f(0) = 0$, donc $f(0) \in \{0, 1\}$. Ensuite, avec $y = 0$, on a pour tout x : $f(x)f(0) - f(0) = x$. Si $f(0) = 0$, cette relation donne $0 = x$ pour tout x, ce qui est faux pour $x = 1$. Donc $f(0) = 1$, puis $f(x) - 1 = x$, c'est-à-dire $f(x) = x + 1$. **Synthèse.** Pour $f(x) = x + 1$, on calcule $(x + 1)(y + 1) - (xy + 1) = xy + x + y + 1 - xy - 1 = x + y$. **L'unique solution est** $x \to x + 1$ **.**

Point de méthode : l'analyse ne prouve pas que les candidats conviennent. Sans la synthèse, la conclusion serait fausse si aucun candidat ne vérifiait l'équation.

Corrigé de l'exercice 16 : Ensembles définis par une propriété

1. Les diviseurs positifs de 12 sont $A = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$. Ensuite, $x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2)$, donc $B = \{1, 2\}$. Enfin, $|n - 1| \leq 2$ équivaut à $-2 \leq n - 1 \leq 2$, soit $-1 \leq n \leq 3$. Ainsi, $C = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$.

2. D'abord, $x^2 \leq 4 \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 2$. En intersectant avec $]1, +\infty[$, on obtient $I =]1, 2]$. Ensuite, un réel n'est ni dans $]-\infty, 1]$ ni dans $[3, +\infty[$ si et seulement si $1 < x < 3$: $J =]1, 3[$. Enfin, $|x - 2| < 1 \Leftrightarrow x \in]1, 3[$ et $|x - 3| \leq 1 \Leftrightarrow x \in [2, 4]$. Ces intervalles se chevauchent, donc $K =]1, 4]$.

3. Notons U la réunion. Montrons d'abord $U \subset]0, 2[$. Soit $x \in U$: il existe $n \geq 1$ tel que $\frac{1}{n} \leq x \leq 2 - \frac{1}{n}$. Comme $0 < \frac{1}{n}$, on a $0 < x < 2$. Réciproquement, soit $x \in]0, 2[$. Les réels x et $2 - x$ sont strictement positifs. Il existe donc un entier $n \geq \max\left(\frac{1}{x}, \frac{1}{2 - x}\right)$. Pour cet entier, $\frac{1}{n} \leq x$ et $\frac{1}{n} \leq 2 - x$, donc $x \in \left[\frac{1}{n}, 2 - \frac{1}{n}\right]$. **Par double inclusion,** $U =]0, 2[$ **.**
Notons V l'intersection. Le réel 0 appartient à chaque intervalle $\left]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right[$, donc $0 \in V$. Soit maintenant $x \neq 0$. Choisissons un entier $n > \frac{1}{|x|}$. Alors $|x| > \frac{1}{n}$, donc x n'est pas dans $\left]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right[$, ni dans V. **Ainsi,** $V = \{0\}$ **.**

Corrigé de l'exercice 17 : Égalités d'ensembles

1. Sur la figure, A est formé des zones $1, 2, 4, 5$, B des zones $2, 3, 5, 6$ et C des zones $4, 5, 6, 7$. On en déduit :

   - $A \cap (B \cup C)$: zones $2, 4, 5$; $(A \cap B) \cup (A \cap C)$: zones $2, 5$ et $4, 5$, soit $2, 4, 5$;
   - $A \setminus (B \cap C)$: on retire la zone 5 de A, d'où $1, 2, 4$; $(A \setminus B) \cup (A \setminus C)$: zones $1, 4$ et $1, 2$, soit $1, 2, 4$;
   - $(A \setminus B) \setminus C$: zones $1, 4$ privées de 4, soit 1 ; $A \setminus (B \cup C)$: zone 1.

   On conjecture trois égalités : $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$, $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$ **et** $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$.

2. Montrons d'abord l'inclusion directe. Soit $x \in A \setminus (B \cap C)$. Alors $x \in A$ et $x \notin B \cap C$, donc $x \notin B$ ou $x \notin C$. Si $x \notin B$, alors $x \in A \setminus B$. Sinon, $x \notin C$ et $x \in A \setminus C$. Dans les deux cas, x est dans la réunion. Montrons ensuite l'inclusion réciproque. Soit $x \in A \setminus B$. Alors $x \in A$ et $x \notin B$. Comme $B \cap C \subset B$, on a $x \notin B \cap C$, donc $x \in A \setminus (B \cap C)$. Le cas $x \in A \setminus C$ est identique. **Par double inclusion,** $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$.

3. Soit $x \in E$. On a les équivalences

$$\begin{aligned} x \in (A \setminus B) \setminus C &\Leftrightarrow (x \in A \text{ et } x \notin B) \text{ et } x \notin C \\ &\Leftrightarrow x \in A \text{ et non}(x \in B \text{ ou } x \in C) \\ &\Leftrightarrow x \in A \text{ et } x \notin B \cup C \\ &\Leftrightarrow x \in A \setminus (B \cup C). \end{aligned}$$

   La deuxième ligne utilise la loi de De Morgan. **Donc** $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$.

4. Soit $x \in E$. Par distributivité du « ou » sur le « et »,

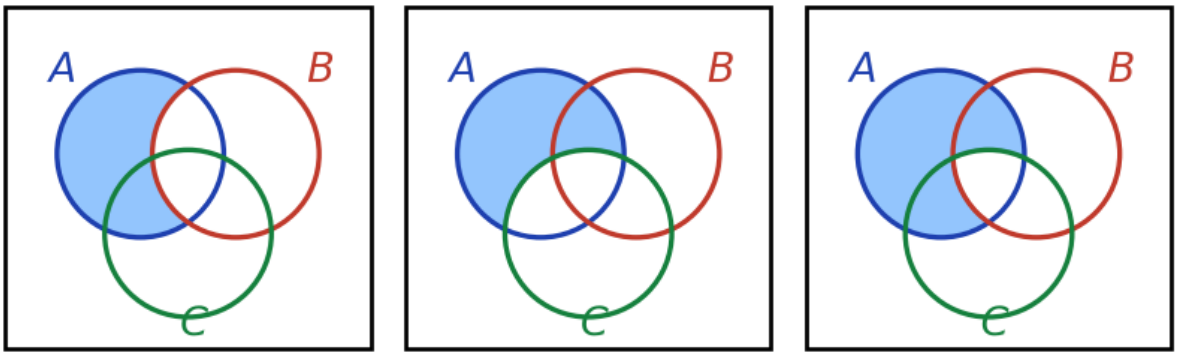
$$x \in A \cup (B \cap C) \Leftrightarrow x \in A \text{ ou } (x \in B \text{ et } x \in C) \Leftrightarrow (x \in A \text{ ou } x \in B) \text{ et } (x \in A \text{ ou } x \in C).$$

   Le dernier énoncé signifie $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$. **D'où** $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

La figure suivante colorie $A \setminus B$, $A \setminus C$ et $A \setminus (B \cap C)$. On constate que la troisième région

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

est bien la réunion des deux premières.



Corrigé de l'exercice 18 : Inclusions et simplifications

1. Si $A = B$, alors $A \cup B = A = A \cap B$. Réciproquement, supposons $A \cup B = A \cap B$. On a $A \subset A \cup B = A \cap B \subset B$, et de même $B \subset A \cup B = A \cap B \subset A$. **Donc** $A = B$**.**

2. Supposons $A \cup B \subset A \cap C$. D'une part, $B \subset A \cup B \subset A \cap C \subset A$. D'autre part, $A \subset A \cup B \subset A \cap C \subset C$. Donc $B \subset A \subset C$. Réciproquement, si $B \subset A \subset C$, alors $A \cup B = A$ et $A \cap C = A$. L'inclusion $A \cup B \subset A \cap C$ est alors une égalité. **L'équivalence est démontrée.**

3. Supposons $A \cap B = A \cap C$ et $A \cup B = A \cup C$. On calcule, en justifiant chaque étape :
$$\begin{aligned} B &= B \cap (A \cup B) = B \cap (A \cup C) \\ &= (B \cap A) \cup (B \cap C) = (A \cap C) \cup (B \cap C) \\ &= (A \cup B) \cap C = (A \cup C) \cap C = C. \end{aligned}$$
La première égalité vient de $B \subset A \cup B$, et la dernière de $C \subset A \cup C$. Les autres utilisent les hypothèses et la distributivité. **Donc** $B = C$**.**

4. Prenons $E = \{1, 2\}$. Avec $A = \emptyset$, $B = \{1\}$, $C = \{2\}$, on a $A \cap B = A \cap C = \emptyset$, mais $B \neq C$. Avec $A = E$, $B = \{1\}$, $C = \{2\}$, on a $A \cup B = A \cup C = E$, mais $B \neq C$. **Aucune des deux hypothèses ne suffit seule.**

5. Supposons $A \subset B$. Soit $x \in \overline{B}$. Si l'on avait $x \in A$, on aurait $x \in B$, ce qui est faux. Donc $x \notin A$, c'est-à-dire $x \in \overline{A}$. Ainsi $\overline{B} \subset \overline{A}$. Réciproquement, appliquons ce résultat à l'inclusion $\overline{B} \subset \overline{A}$: on obtient $\overline{\overline{A}} \subset \overline{\overline{B}}$, soit $A \subset B$. **L'équivalence est démontrée ; c'est la contraposition traduite en ensembles.**

Corrigé de l'exercice 19 : Ensemble des parties

1. En classant par nombre d'éléments : $\mathcal{P}(E) = \Big\{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{0,1\}, \big\{0, \{\{1,2\}, \{0,1,2\}\big\}\Big\}$, qui a $2^3 = 8$ éléments.

2. La seule partie de $\emptyset$ est $\emptyset$, donc $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$. Cet ensemble a un élément, donc deux parties : $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$.

3. Voici les réponses.

   - $0 \in E$: **vrai**.
   - $\{0\} \in E$: **faux**, car les éléments de E sont des nombres, pas des ensembles.
   - $\{0\} \subset E$: **vrai**, car $0 \in E$.
   - $\{0\} \in \mathcal{P}(E)$: **vrai**, c'est la même information que la ligne précédente.
   - $\emptyset \in \mathcal{P}(E)$: **vrai**, car $\emptyset \subset E$.
   - $\emptyset \subset \mathcal{P}(E)$: **vrai**, car l'ensemble vide est inclus dans tout ensemble.
   - $\{\{0\}, \{1,2\}\} \subset \mathcal{P}(E)$: **vrai**, car $\{0\}$ et $\{1,2\}$ sont des parties de E.
   - $E \in \mathcal{P}(E)$: **vrai**, car $E \subset E$.

4. Soit X un ensemble. Si $X \subset A \cap B$, alors $X \subset A$ et $X \subset B$, car $A \cap B$ est inclus dans A et dans B. Réciproquement, si $X \subset A$ et $X \subset B$, tout élément de X est dans A et dans B, donc $X \subset A \cap B$. Ainsi, $X \in \mathcal{P}(A \cap B) \Leftrightarrow X \in \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$. **D'où** $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$**.**

5. Soit $X \in \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$. Alors $X \subset A$ ou $X \subset B$. Dans les deux cas, $X \subset A \cup B$, donc $X \in \mathcal{P}(A \cup B)$. L'inclusion est démontrée. Pour la stricte inclusion, prenons $A = \{1\}$

et $B = \{2\}$. La partie $\{1, 2\}$ appartient à $\mathcal{P}(A \cup B)$, mais elle n'est incluse ni dans A ni dans B. **L'inclusion est donc stricte dans cet exemple.**

Corrigé de l'exercice 20 : Produit cartésien

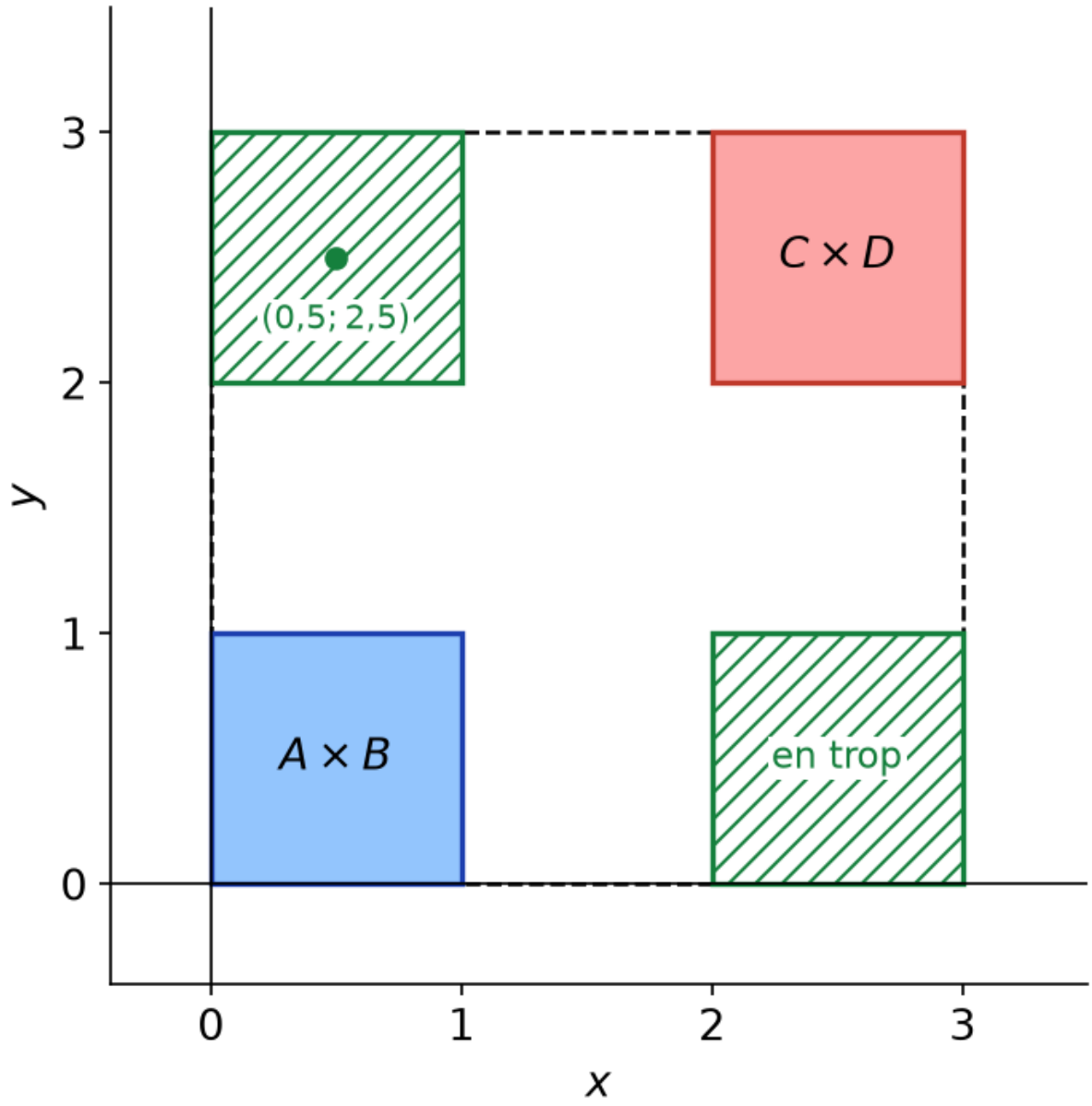
1. On obtient $G \times H = \{(1, a), (1, b), (1, c\ (2, a), (2, b, b), (2, c)\}$, qui a $2 \times 3 = 6$ éléments. En revanche, $(a, 1) \in H \times G$, alors que la première composante d'un couple de $G \times H$ est 1 ou 2. **Donc** $G \times H \neq H \times G$.

2. Soit $(x, y) \in E \times F$. On a les équivalences
$$\begin{aligned}(x, y) \in (A \times B) \cap (C \times D) &\Leftrightarrow (x \in A \text{ et } y \in B) \text{ et } (x \in C \text{ et } y \in D)\\ &\Leftrightarrow x \in A \cap C \text{ et } y \in B \cap D.\end{aligned}$$
D'où $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$.

3. Soit $(x, y) \in A \times B$. Alors $x \in A \subset A \cup C$ et $y \in B \subset B \cup D$, donc $(x, y) \in (A \cup C) \times (B \cup D)$. Le cas $(x, y) \in C \times D$ est identique. **L'inclusion est démontrée.**

4. Considérons le point $(0{,}5\ ;\ 2{,}5)$. On a $0{,}5 \in [0, 1] \subset A \cup C$ et $2{,}5 \in [2, 3] \subset B \cup D$. Ce point est donc dans $(A \cup C) \times (B \cup D)$. Cependant, il n'est pas dans $A \times B$, car $2{,}5 \notin [0, 1]$. Il n'est pas non plus dans $C \times D$, car $0{,}5 \notin [2, 3]$. **L'inclusion est donc stricte.** Comme le montre la figure ci-dessous, le produit $(A \cup C) \times (B \cup D)$ contient en plus deux carrés hachurés.

5. Si $A = \emptyset$, aucun couple (x, y) ne vérifie $x \in A$, donc $A \times B = \emptyset$; de même si $B = \emptyset$. Réciproquement, raisonnons par contraposition. Supposons $A \neq \emptyset$ et $B \neq \emptyset$, et prenons $a \in A$ et $b \in B$. Alors $(a, b) \in A \times B$, qui n'est donc pas vide. **Ainsi,** $A \times B = \emptyset \Leftrightarrow (A = \emptyset \text{ ou } B = \emptyset)$.



Corrigé de l'exercice 21 : Fonctions indicatrices

1. Comme $A \setminus B = A \cap \overline{B}$, on obtient $1_{A \setminus B} = 1_A (1 - 1_B) = 1_A - 1_A 1_B$. Ensuite, $A \setminus B$ et $B \setminus A$ sont disjoints : un élément du premier n'est pas dans B, donc pas dans le second. Or, pour deux parties disjointes X et Y, $1_{X \cup Y} = 1_X + 1_Y - 1_{X \cap Y} = 1_X + 1_Y$. Par conséquent,
$$1_{A \,\Delta\, B} = (1_A - 1_A 1_B) + (1_B - 1_A 1_B) = 1_A + 1_B - 2 1_A 1_B.$$
C'est la formule cherchée.

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

2. D'une part, $1_{\overline{A \cap B}} = 1 - 1_A\,1_B$. D'autre part,

$$1_{\overline{A} \cup \overline{B}} = (1 - 1_A) + (1 - 1_B) - (1 - 1_A)(1 - 1_B) = 2 - 1_A - 1_B - 1 + 1_A + 1_B - 1_A\,1_B = 1 - 1_A\,1_B.$$

Les indicatrices sont égales. **Donc** $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$**.**

3. On a $A \subset B \Leftrightarrow A \cap B = A$. En effet, si $A \subset B$, tout élément de A est dans $A \cap B$; réciproquement, $A = A \cap B \subset B$. Or $A \cap B = A$ équivaut à $1_{A \cap B} = 1_A$, c'est-à-dire $1_A\,1_B = 1_A$. **D'où l'équivalence demandée.**

4. En développant et en utilisant $1_A^2 = 1_A$ et $1_B^2 = 1_B$, on trouve $(1_A - 1_B)^2 = 1_A + 1_B - 21_A\,1_B$. Ensuite,

$$A \cup B = A \cap B \Leftrightarrow 1_A + 1_B - 1_A\,1_B = 1_A\,1_B \Leftrightarrow (1_A - 1_B)^2 = 0.$$

Or un carré de réel est nul si et seulement si le réel est nul. Cela équivaut donc à $1_A = 1_B$. **Ainsi,** $A \cup B = A \cap B \Leftrightarrow A = B$**.**

Corrigé de l'exercice 22 : Indicatrices et formule du crible

1. Dans la somme $\sum_{x \in E} 1_A(x)$, chaque élément de A apporte 1, et chaque élément hors de A apporte 0. **La somme compte donc les éléments de** A **: elle vaut** $\mathrm{card}(A)$**.**

2. Par De Morgan, le complémentaire de $A \cup B \cup C$ est $\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}$. Son indicatrice est le produit $(1 - 1_A)(1 - 1_B)(1 - 1_C)$. D'où $1_{A \cup B \cup C} = 1 - (1 - 1_A)(1 - 1_B)(1 - 1_C)$. En développant, puis en utilisant $1_A\,1_B = 1_{A \cap B}$, on obtient

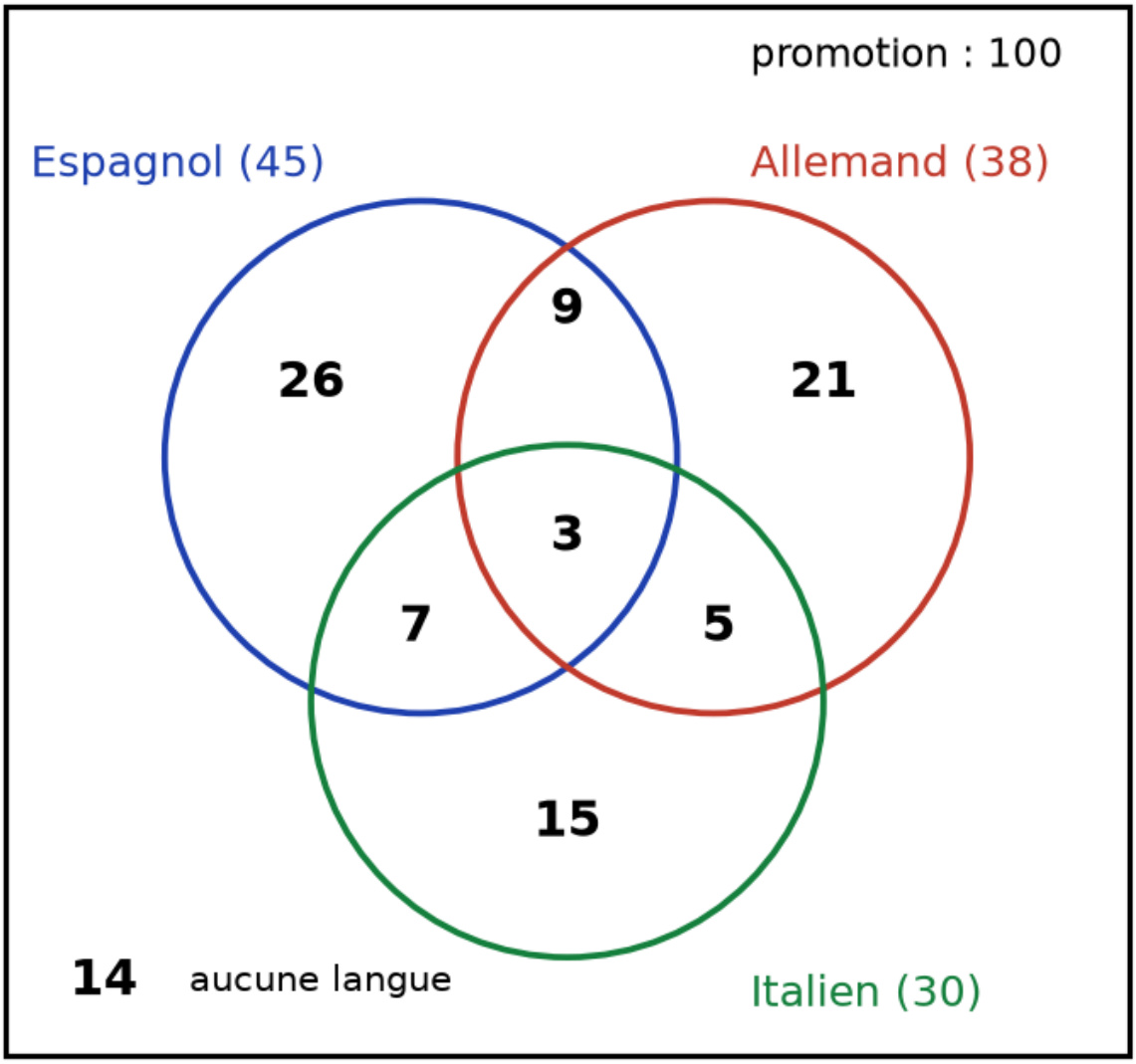
$$1_{A \cup B \cup C} = 1_A + 1_B + 1_C - 1_{A \cap B} - 1_{A \cap C} - 1_{B \cap C} + 1_{A \cap B \cap C}.$$

3. On somme cette égalité sur $x \in E$, puis on applique la question 1. **On obtient la formule du crible :**

$$\mathrm{card}(A \cup B \cup C) = \mathrm{card}\,A + \mathrm{card}\,B + \mathrm{card}\,C - \mathrm{card}(A \cap B) - \mathrm{card}(A \cap C) - \mathrm{card}(B \cap C) + \mathrm{card}(A \cap B \cap C).$$

4. Notons A, B, C les ensembles d'étudiants suivant respectivement l'espagnol, l'allemand et l'italien. La formule donne $\mathrm{card}(A \cup B \cup C) = 45 + 38 + 30 - 12 - 10 - 8 + 3 = 86$. **Il y a donc** $100 - 86 = 14$ **étudiants qui ne suivent aucune de ces langues.** Pour compter ceux qui en suivent exactement une, on remplit le diagramme de l'intérieur vers l'extérieur. D'abord, 3 étudiants suivent les trois langues. Ensuite, $12 - 3 = 9$ suivent seulement espagnol et allemand, $10 - 3 = 7$ seulement espagnol et italien, $8 - 3 = 5$ seulement allemand et italien. Enfin, l'espagnol seul concerne $45 - 9 - 7 - 3 = 26$ étudiants, l'allemand seul

$38 - 9 - 5 - 3 = 21$ et l'italien seul $30 - 7 - 5 - 3 = 15$. **Au total,** $26 + 21 + 15 = 62$ **étudiants suivent exactement une langue.** La figure ci-dessous récapitule ces effectifs, dont la somme vaut bien 100.



Corrigé de l'exercice 23 : Problème : la différence symétrique

1. Soit $x \in E$. Étudions les quatre cas d'appartenance. Si x est dans A et dans B, il n'est ni dans $A \Delta B$ ni dans $(A \cup B) \setminus (A \cap B)$. S'il est dans A seulement, ou dans B seulement, il est dans les deux ensembles. Enfin, s'il n'est ni dans A ni dans B, il n'est dans aucun des deux. **Les deux ensembles ont les mêmes éléments :**

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

$$A \,\Delta\, B = (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

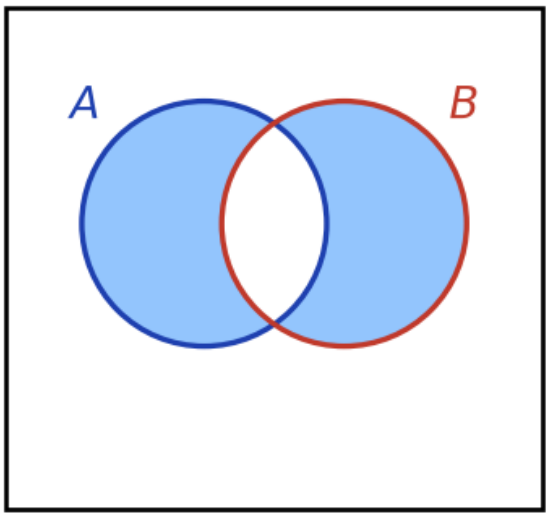
2. Comme $A \cap B \subset A \cup B$, l'exercice 21 donne
$1_{(A \cup B) \setminus (A \cap B)} = 1_{A \cup B} - 1_{A \cup B} 1_{A \cap B} = 1_{A \cup B} - 1_{A \cap B}$. Par conséquent,
$1_{A \,\Delta\, B} = 1_A + 1_B - 1_A 1_B - 1_A 1_B = 1_A + 1_B - 21_A 1_B$.

3. Avec $1_\emptyset = 0$, on obtient $1_{A \,\Delta\, \emptyset} = 1_A$, donc $A \,\Delta\, \emptyset = A$. Ensuite,
$1_{A \,\Delta\, A} = 21_A - 21_A^2 = 0$, donc $A \,\Delta\, A = \emptyset$. Enfin,
$1_{A \,\Delta\, E} = 1_A + 1 - 21_A = 1 - 1_A$, donc $A \,\Delta\, E = \overline{A}$.

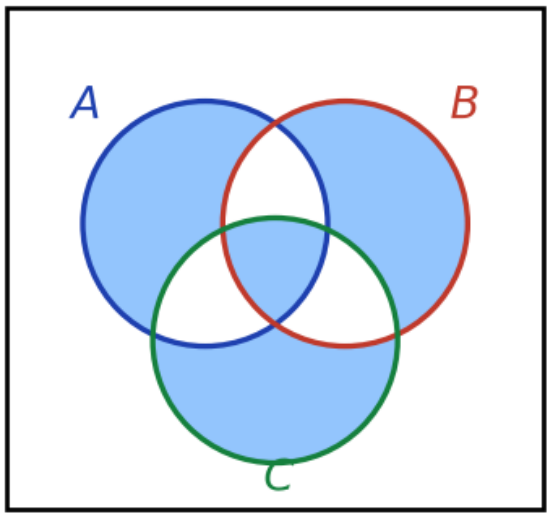
4. Notons $a = 1_A$, $b = 1_B$, $c = 1_C$. En appliquant deux fois la question 2,

$$\begin{aligned} 1_{(A \,\Delta\, B) \,\Delta\, C} &= (a + b - 2ab) + c - 2(a + b - 2ab)c \\ &= a + b + c - 2(ab + ac + bc) + 4abc. \end{aligned}$$

Cette expression est symétrique en a, b, c. Or la différence symétrique est commutative, par définition. Donc $1_{A \,\Delta\, (B \,\Delta\, C)} = 1_{(B \,\Delta\, C) \,\Delta\, A}$ est donnée par la même formule. **Ainsi,** $(A \,\Delta\, B) \,\Delta\, C = A \,\Delta\, (B \,\Delta\, C)$**.** Évaluons enfin cette formule en un point x. Si x est dans exactement un ensemble, elle vaut 1. S'il est dans exactement deux, elle vaut $2 - 2 = 0$. S'il est dans les trois, elle vaut $3 - 6 + 4 = 1$. **Les éléments de** $A \,\Delta\, B \,\Delta\, C$ **sont ceux qui appartiennent à un nombre impair des trois ensembles**, comme le montre la figure ci-dessous.



$A \Delta B$



$A \Delta B \Delta C$

5. D'après l'exercice 21, $1_{A \,\Delta\, B} = (1_A - 1_B)^2$. Donc $A \,\Delta\, B = \emptyset$ équivaut à

$(1_A - 1_B)^2 = 0$, c'est-à-dire à $1_A = 1_B$. **Ainsi,** $A \,\Delta\, B = \emptyset \Leftrightarrow A = B$**.**

6. **Analyse.** Supposons $A \,\Delta\, X = B$. Composons par A à gauche : $A \,\Delta\, (A \,\Delta\, X) = A \,\Delta\, B$. Par associativité, le membre de gauche vaut $(A \,\Delta\, A) \,\Delta\, X = \emptyset \,\Delta\, X = X$. Donc $X = A \,\Delta\, B$. **Synthèse.** On a $A \,\Delta\, (A \,\Delta\, B) = (A \,\Delta\, A) \,\Delta\, B = \emptyset \,\Delta\, B = B$. **L'unique solution est** $X = A \,\Delta\, B$**.** Enfin, supposons $A \,\Delta\, B = A \,\Delta\, C$ et notons D cette partie. Alors B et C sont deux solutions de $A \,\Delta\, X = D$. Par unicité, $B = C$.

7. Avec les notations de la question 4, et comme $a^2 = a$,
$$1_{(A \cap B) \,\Delta\, (A \cap C)} = ab + ac - 2(ab)(ac) = ab + ac - 2abc = a(b + c - 2bc) = 1_{A \cap (B \,\Delta\, C)}.$$
Donc $A \cap (B \,\Delta\, C) = (A \cap B) \,\Delta\, (A \cap C)$**.**

Point de méthode : les indicatrices ramènent chaque égalité d'ensembles à une identité entre polynômes en a, b, c, avec la seule règle $a^2 = a$.

Corrigé de l'exercice 24 : Problème : l'argument diagonal de Cantor

1. Examinons chaque élément. D'abord, $1 \in f(1) = \{1, 2\}$, donc $1 \notin D$. Ensuite, $2 \notin f(2) = \emptyset$, donc $2 \in D$. Enfin, $3 \in f(3) = \{1, 3\}$, donc $3 \notin D$. **Ainsi** $D = \{2\}$**.** Cette partie diffère de $\{1, 2\}$, de $\emptyset$ et de $\{1, 3\}$: elle n'est égale à aucun $f(x)$.

2. Supposons par l'absurde que $D = f(a)$. Distinguons deux cas. Si $a \in D$, alors par définition de D, $a \notin f(a) = D$: contradiction. Si $a \notin D$, alors $a \notin f(a)$, et la définition de D donne $a \in D$: contradiction encore. **Les deux cas sont impossibles, donc** $D \neq f(a)$**.**

3. D'après la question 2, la partie D de E n'est égale à aucune des parties $f(a)$, pour $a \in E$. Quelle que soit la façon d'associer une partie à chaque élément, la partie D correspondante n'est donc jamais atteinte. **Il est impossible d'atteindre toutes les parties de** E : c'est le théorème de Cantor. Autrement dit, $\mathcal{P}(E)$ est strictement « plus gros » que E.

4. Supposons par l'absurde que $t = s_k$ pour un certain k. En évaluant en $n = k$, on obtient $t(k) = s_k(k)$. Or, par définition, $t(k) = 1 - s_k(k)$. Donc $2s_k(k) = 1$, ce qui est impossible pour $s_k(k) \in \{0, 1\}$. **Ainsi,** t **diffère de chaque** s_k : elle diffère de s_k au

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

rang k, sur la « diagonale ». Le lien est le suivant. À chaque partie A_k de $\mathbb{N}$ correspond la suite $s_k = 1_{A_k}$. La suite t vaut alors 1 en n exactement quand $n \notin A_n$. Donc $t = 1_D$, avec $D = \left\{n \in [\mathbb{N} \mid n \nu \notin A_n\right\}$. **C'est la question 3 appliquée à $E = \mathbb{N}$: on ne peut pas ranger toutes les parties de $\mathbb{N}$ en une suite $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$.**

5. Supposons par l'absurde qu'un tel ensemble U existe. L'ensemble $R = \left\{x \in U \mid x \notin x, x\right\}$ est un ensemble, donc $R \in U$. Si $R \in R$, alors, par définition de R, $R \notin R$: contradiction. Si $R \notin R$, alors, comme $R \in U$, la définition donne $R \in R$: contradiction. **Un tel ensemble U ne peut donc pas exister.** C'est pour cette raison qu'on définit toujours un ensemble en compréhension à l'intérieur d'un ensemble déjà connu.

Point de méthode : dans un argument diagonal, on construit un objet qui diffère de chaque objet de la liste en au moins un endroit, choisi à l'aide de l'indice de cet objet.

Revenir aux énoncés des exercices

Pour aller plus loin en L1

- Le cours : logique et ensembles, cours de maths en L1
- Les énoncés : exercices de maths en L1 sur logique et ensembles
- Chapitre suivant : Applications et relations binaires
- Tester vos connaissances : QCM de maths en L1 par chapitre
- Le sommaire : tous les chapitres de maths de L1 et la licence de maths de L1 à L3