

Logique, ensembles et applications

Exercice 1 : Négation de propositions quantifiées

Traduisez chaque phrase avec des quantificateurs, puis écrivez sa négation sans utiliser le symbole $\neg$.
Ici, f désigne une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et (u_n) une suite réelle.

1. Tout réel est le carré d'un réel. Cette phrase est-elle vraie ?
2. La fonction f est bornée.
3. La fonction f est croissante.
4. La suite (u_n) converge vers 0.
5. La fonction f est périodique.

Exercice 2 : Ordre des quantificateurs

Dites si chacune des propositions suivantes est vraie ou fausse, en justifiant. Écrivez ensuite la négation de celles qui sont fausses.

$$P_1: \forall x \in \mathbb{R}, \\ 1. \exists y \in \mathbb{R}, \\ x + y = 0$$

$$P_2: \exists y \in \mathbb{R}, \\ 2. \forall x \in \mathbb{R}, \\ x + y = 0$$

$$P_3: \forall n \in \mathbb{N},$$

3. $\exists m \in \mathbb{N},$
 $m > n$

$$P_4: \exists m \in \mathbb{N},$$

4. $\forall n \in \mathbb{N},$
 $m > n$

$$P_5: \exists x \in \mathbb{R},$$

5. $\forall y \in \mathbb{R},$
 $xy = y$

$$P_6: \forall y \in \mathbb{R},$$

6. $\exists x \in \mathbb{R},$
 $xy = 1$

Exercice 3 : Implication, réciproque et contraposée

- Soit P et Q deux propositions. À l'aide d'une table de vérité, montrez que $P \Rightarrow Q$ équivaut à $\neg P \vee Q$. Déduisez-en la négation de $P \Rightarrow Q$.
- Soit x un réel. On considère l'implication « $x > 2 \Rightarrow x^2 > 4$ ». Écrivez sa réciproque et sa contraposée, puis dites lesquelles sont vraies.
- Soit $n \in \mathbb{Z}$. Montrez par contraposition que si $n^2 - 1$ n'est pas divisible par 4, alors n est pair.
- Soit x et y deux réels strictement supérieurs à 1. Montrez par contraposition que $x \neq y \Rightarrow x^2 - 2x \neq y^2 - 2y$.

Exercice 4 : Raisonnements par l'absurde

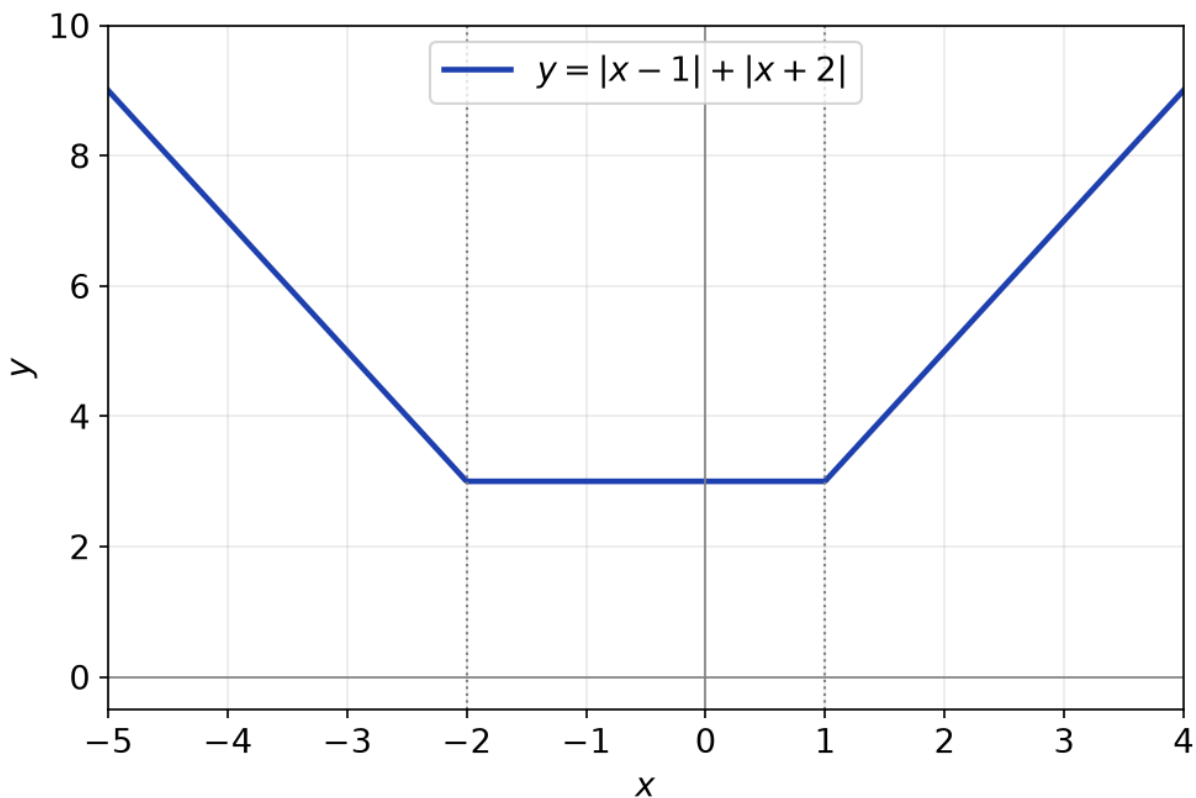
- Montrez que, pour tout entier p , si 3 ne divise pas p , alors 3 ne divise pas p^2 .
- Déduisez-en par l'absurde que $\sqrt{3}$ est irrationnel.
- Soit x un réel tel que, pour tout $\varepsilon > 0$, $|x| \leq \varepsilon$. Montrez par l'absurde que $x = 0$.

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrez par l'absurde que $\sqrt{n^2 + 1}$ n'est pas un entier.

Exercice 5 : Disjonction des cas

1. Montrez que, pour tout entier k , le produit $k(k+1)$ est pair. Dédisez-en que, pour tout entier impair n , le nombre $n^2 - 1$ est divisible par 8.
2. On pose $g(x) = |x - 1| + |x + 2|$ pour x réel. Exprimez $g(x)$ sans valeur absolue sur chacun des intervalles $] -\infty, -2]$, $[-2, 1]$ et $[1, +\infty[$.
3. Résolvez dans $\mathbb{R}$ l'équation $g(x) = 5$, puis l'inéquation $g(x) \leq 5$.

La courbe de g est tracée ci-dessous : elle permet de contrôler vos résultats.



Exercice 6 : Analyse-synthèse et équation fonctionnelle

On cherche toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) + 2f(-x) = x^2 + x.$$

1. Analyse : soit f une solution. En remplaçant x par $-x$, obtenez une seconde relation, puis calculez $f(x)$.
2. Synthèse : vérifiez que la fonction obtenue est solution. Concluez.

Exercice 7 : Fonctions paires et impaires par analyse-synthèse

1. Montrez que la seule fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ à la fois paire et impaire est la fonction nulle.
2. Montrez que toute fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ s'écrit de manière unique $f = p + i$, avec p paire et i impaire. On raisonnera par analyse-synthèse.
3. Déterminez p et i lorsque $f(x) = e^x$, puis lorsque $f(x) = (x+1)^2$.

Exercice 8 : Récurrences simples

1. Montrez que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^n k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$.
2. Montrez que, pour tout entier $n \geq 4$, $2^n \geq n^2$. La propriété est-elle vraie pour $n = 3$?
3. On « démontre » par récurrence que, dans tout groupe de $n \geq 1$ crayons, tous les crayons ont la même couleur. L'hérédité s'écrit ainsi : dans un groupe de $n+1$ crayons, on retire le premier ; les n restants ont la même couleur. On retire ensuite le dernier ; les n restants ont encore la même

couleur. Les deux groupes se chevauchent, donc les $n + 1$ crayons ont la même couleur. Trouvez l'erreur.

Exercice 9 : Récurrence double

1. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 2$, $u_1 = 3$ et $u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrez que $u_n = 2^n + 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Soit (F_n) la suite de Fibonacci : $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$. Montrez que, pour tout $n \geq 1$, $F_n \leq 2^{n-1}$.
3. Montrez de même que, pour tout $n \geq 1$, $F_n \geq \left(\frac{3}{2}\right)^{n-2}$.

Exercice 10 : Récurrence forte

1. Soit (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_0 + u_1 + \dots + u_n$. Calculez u_1 , u_2 , u_3 , puis montrez que $u_n = 2^{n-1}$ pour tout $n \geq 1$.
2. Montrez par récurrence forte que tout entier $n \geq 1$ s'écrit comme une somme de puissances de 2 deux à deux distinctes. On distinguera les cas n pair et n impair.
3. Écrivez 45 sous cette forme en suivant la démarche de la question précédente.

Exercice 11 : Égalités et inclusions d'ensembles

Soit A , B , C trois parties d'un ensemble E .

1. Montrez que $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$.
2. Montrez que $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

3. Montrez que $A \cap B = A \cup B$ si et seulement si $A = B$.
4. On suppose $A \cup B \subset A \cup C$ et $A \cap B \subset A \cap C$. Montrez que $B \subset C$.

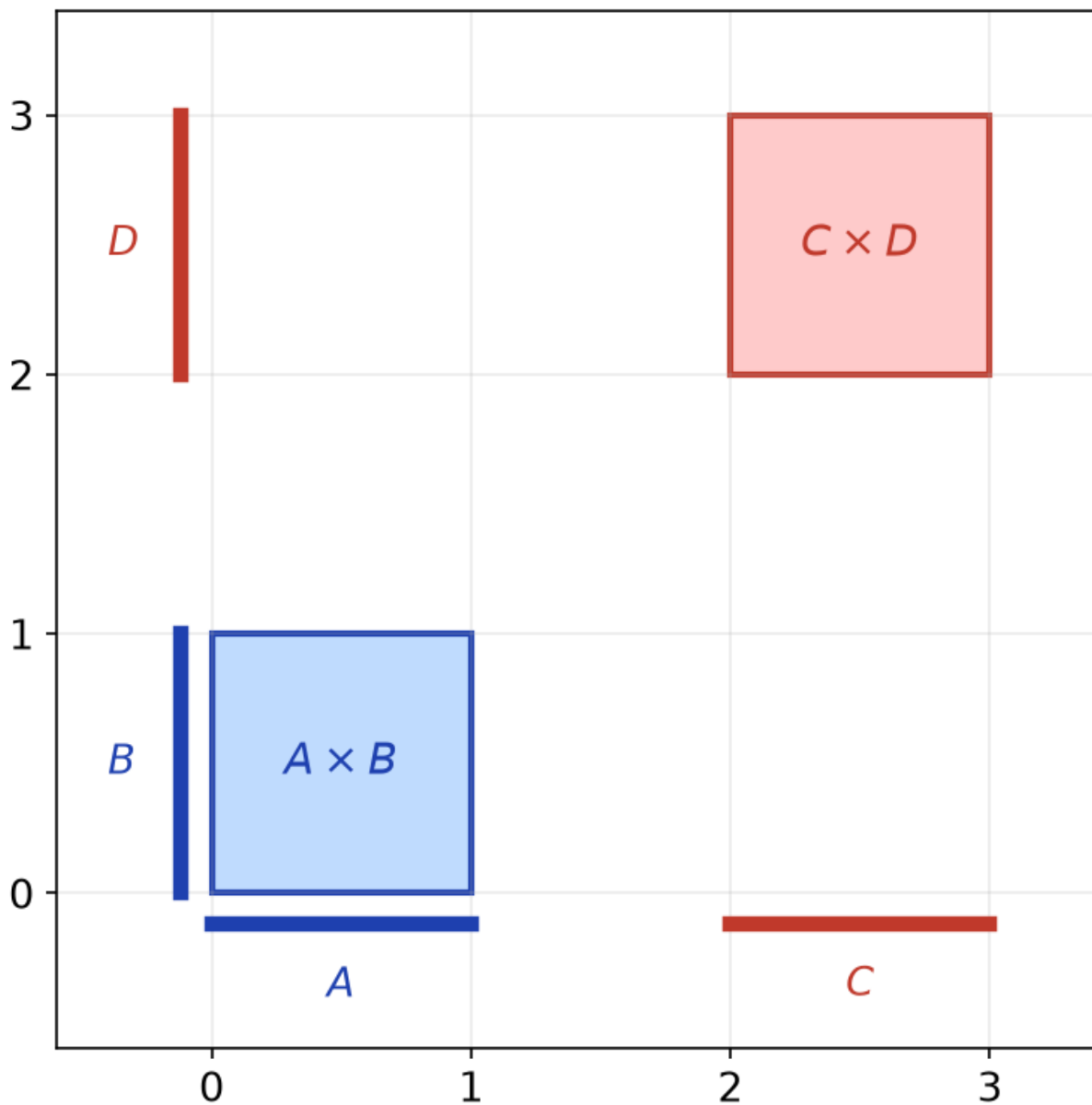
Exercice 12 : Ensemble des parties

1. Écrivez tous les éléments de $\mathcal{P}(E)$ pour $E = \{1, 2, 3\}$. Combien y en a-t-il ?
2. Soit A et B deux ensembles. Montrez que $\mathcal{P}(A) \subset \mathcal{P}(B)$ si et seulement si $A \subset B$.
3. Montrez que $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$.
4. Montrez que $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subset \mathcal{P}(A \cup B)$, et donnez un exemple où l'inclusion est stricte.

Exercice 13 : Produit cartésien

Soit A, C deux parties d'un ensemble E , et B, D deux parties d'un ensemble F .

1. Montrez que $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$.
2. Montrez que $(A \times B) \cup (C \times D) \subset (A \cup C) \times (B \cup D)$.
3. Avec $E = F = \mathbb{R}$, $A = B = [0, 1]$ et $C = D = [2, 3]$ (voir la figure), montrez que l'inclusion précédente est stricte.
4. Montrez que le complémentaire de $A \times B$ dans $E \times F$ vaut $(\overline{A} \times F) \cup (E \times \overline{B})$.



Exercice 14 : Fonctions indicatrices et différence symétrique

Soit E un ensemble. Pour $A, B \subset E$, on note $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ la différence symétrique.

1. Montrez que $1_{A \Delta B} = 1_A + 1_B - 21_A 1_B = (1_A - 1_B)^2$.
2. Déduisez-en que $A \Delta B = \emptyset$ si et seulement si $A = B$.
3. Montrez que, pour tout $x \in E$, $1_{A \Delta B}(x)$ est le reste de la division euclidienne de

$$1_A(x) + 1_B(x) \text{ par } 2.$$

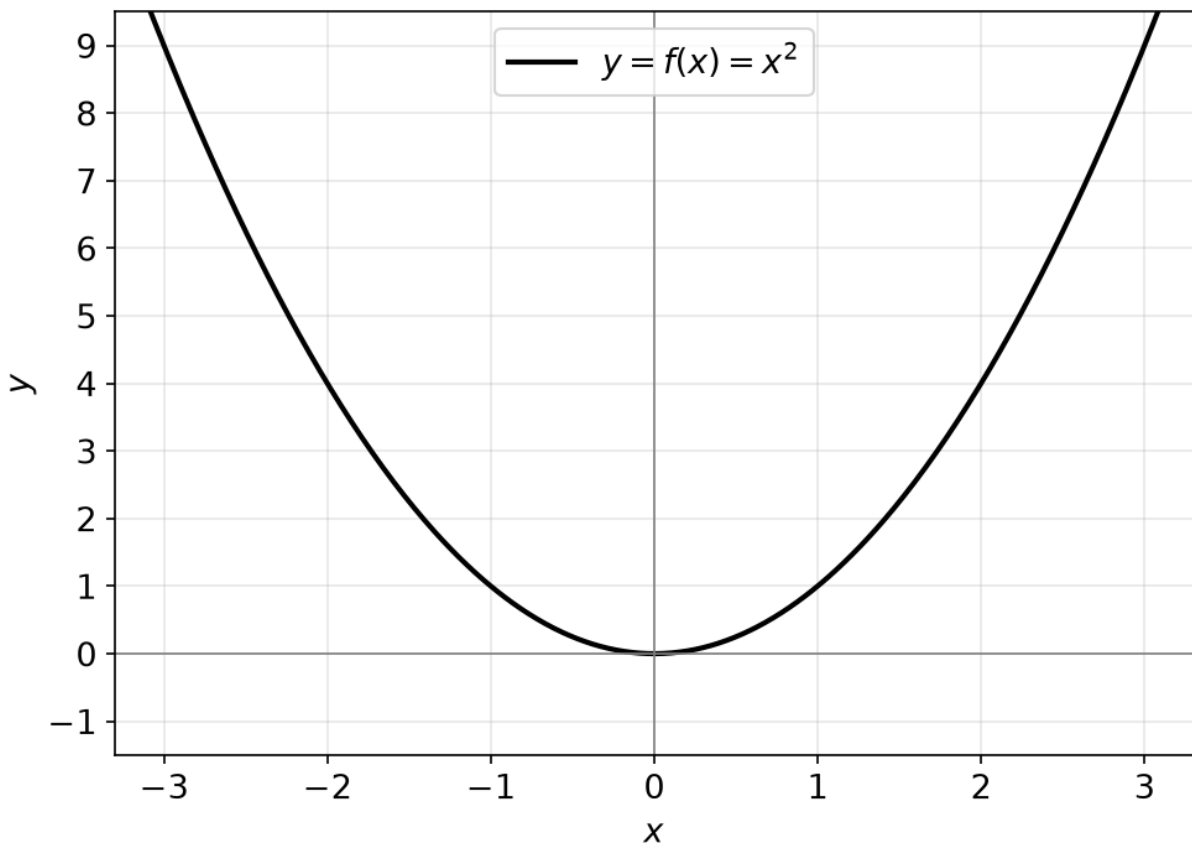
4. Déduisez-en que, pour toutes parties A , B , C de E ,
 $(A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C)$.

Exercice 15 : Recouvrements disjoints et partitions

- Parmi les familles suivantes, lesquelles sont des partitions de $E = \{1, 2, 3, 4\}$? (a) $\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{4\}$; (b) $\{1, 3\}, \{2\}, \{4\}$; (c) $\{1, 2, 3, 4\}, \emptyset$.
- Montrez que la famille $([k, k+1[)_{k \in \mathbb{Z}}$ est une partition de $\mathbb{R}$.
- Soit A et B deux parties de E . Montrez que $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$ et $\overline{A \cup B}$ forment un recouvrement disjoint de E . Est-ce toujours une partition ?

Exercice 16 : Image directe et image réciproque

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \rightarrow x^2$, dont la courbe est tracée ci-dessous.



1. Déterminez $f([-1, 2])$, $f([1, 3])$, $f^{-1}([1, 4])$, $f^{-1}([-4, -1])$ et $f^{-1}([-1, 4])$.
2. Avec $A = [0, 2]$, calculez $f^{-1}(f(A))$. Avec $B = [-1, 4]$, calculez $f(f^{-1}(B))$. Comparez avec A et B .
3. Avec $A_1 = [-1, 0]$ et $A_2 = [0, 1]$, comparez $f(A_1 \cap A_2)$ et $f(A_1) \cap f(A_2)$.
4. Soit $g: E \rightarrow F$ quelconque, $A \subset E$ et $B \subset F$. Montrez que $A \subset g^{-1}(g(A))$ et $g(g^{-1}(B)) \subset B$.

Exercice 17 : Injections et surjections entre entiers

On définit $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ par $f(n) = 2n$, et $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ par $g(n) = \frac{n}{2}$ si n est pair, $g(n) = \frac{n-1}{2}$ si n est impair.

1. Étudiez l'injectivité et la surjectivité de f et de g .
2. Calculez $g \circ f$ et $f \circ g$. Commentez.
3. On définit $h : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$ par $h(n) = \frac{n}{2}$ si n est pair et $h(n) = -\frac{n+1}{2}$ si n est impair. Montrez que h est bijective et explicitez h^{-1} .

Exercice 18 : Bijections explicites, restriction et prolongement

1. Montrez que $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{2\}$, $x \rightarrow \frac{2x+1}{x-1}$, est bien définie et bijective. Explicitez f^{-1} .
2. Montrez que $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow]-1, 1[$, $x \rightarrow \frac{x}{1+|x|}$, est bijective et explicitez φ^{-1} .
3. Soit $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \rightarrow x^2 - 2x$. Montrez que u n'est ni injective ni surjective. Montrez ensuite que l'application $[1, +\infty[\rightarrow [-1, +\infty[$, $x \rightarrow u(x)$, est bijective, et donnez sa réciproque.
4. Montrez que la fonction racine carrée, définie sur $[0, +\infty[$, admet un unique prolongement impair à $\mathbb{R}$, et donnez-le.

Exercice 19 : Composition et réciproque d'une composée

Soit $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$ deux applications.

1. Montrez que si $g \circ f$ est injective, alors f est injective.
2. Montrez que si $g \circ f$ est surjective, alors g est surjective.
3. Donnez un exemple où $g \circ f$ est bijective mais où ni f ni g n'est bijective.
4. Soit $u : E \rightarrow E$ telle que $u \circ u \circ u = \text{id}_E$. Montrez que u est bijective et que $u^{-1} = u \circ u$.

5. Dans cette question, $E = F = G = \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + 1$ et $g(x) = x^3$; ces deux applications sont des bijections de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. Calculez $(g \circ f)^{-1}$ de deux manières : en résolvant $(g \circ f)(x) = y$, puis avec la formule du cours.

Exercice 20 : Caractérisations par les images

Soit $f : E \rightarrow F$ une application.

1. Montrez que f est injective si et seulement si $f^{-1}(f(A)) = A$ pour toute partie A de E .
2. Montrez que f est surjective si et seulement si $f(f^{-1}(B)) = B$ pour toute partie B de F .
3. Montrez que f est injective si et seulement si $f(A \cap A') = f(A) \cap f(A')$ pour toutes parties A , A' de E .

Exercice 21 : Relation d'équivalence et cercles

1. Sur $\mathbb{R}^2$, on pose $(x, y) \mathcal{R} (x', y')$ si $x^2 + y^2 = x'^2 + y'^2$. Montrez que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
2. Décrivez géométriquement la classe d'un point (a, b) . Donnez la classe de $(0, 0)$, puis trois éléments de la classe de $(1, 2)$.
3. Montrez que l'application qui à une classe associe le rayon du cercle correspondant est une bijection de l'ensemble des classes sur $[0, +\infty[$.
4. Sur $\mathbb{R}$, on pose $x \mathcal{S} y$ si $|x - y| \leq 1$. La relation $\mathcal{S}$ est-elle une relation d'équivalence ?

Exercice 22 : Congruences et sommes de deux carrés

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On rappelle que $a \equiv b \pmod{n}$ signifie que n divise $b - a$.

1. Montrez que la congruence modulo n est une relation d'équivalence sur $\mathbb{Z}$, et décrivez ses classes pour $n = 4$.
2. Montrez que si $a \equiv b \pmod{n}$ et $c \equiv d \pmod{n}$, alors $a + c \equiv b + d \pmod{n}$ et $ac \equiv bd \pmod{n}$.
3. Montrez que le carré d'un entier est congru à 0 ou à 1 modulo 4.
4. Déduisez-en que 2027 n'est pas la somme de deux carrés d'entiers.
5. Montrez que $10 \equiv 1 \pmod{9}$, puis qu'un entier naturel est congru modulo 9 à la somme de ses chiffres en base dix. Appliquez à 2027.

Exercice 23 : Classes modulo $\mathbb{Z}$ et partie entière

Sur $\mathbb{R}$, on pose $x \sim y$ si $x - y \in \mathbb{Z}$. On note $\lfloor x \rfloor$ la partie entière de x , c'est-à-dire l'unique entier tel que $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$.

1. Montrez que $\sim$ est une relation d'équivalence et décrivez la classe d'un réel α .
2. Montrez par analyse-synthèse que chaque classe contient exactement un élément de $[0, 1[$, et donnez-le pour la classe de x .
3. Déduisez-en que l'application $\alpha \mapsto \text{cl}(\alpha)$ est une bijection de $[0, 1[$ sur l'ensemble des classes.
4. Déterminez toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telles que $x \sim y \Rightarrow f(x) = f(y)$.

Exercice 24 : Ordre de divisibilité et ordres sur le plan

1. Montrez que la divisibilité est une relation d'ordre sur $\mathbb{N}^*$. Est-elle totale ? Est-ce encore une relation d'ordre sur $\mathbb{Z}$?
2. On restreint cet ordre à l'ensemble D des diviseurs positifs de 12. Représentez-le par un schéma, et trouvez le plus petit et le plus grand élément de D .
3. Sur $\mathbb{R}^2$, on pose $(x, y) \preceq (x', y')$ si $x \leq x'$ et $y \leq y'$. Montrez que c'est une relation d'ordre partiel.
4. Sur $\mathbb{R}^2$, on pose $(x, y) \leq (x', y')$ si $x < x'$, ou bien si $x = x'$ et $y \leq y'$. Montrez que c'est une relation d'ordre total (ordre lexicographique).

Exercice 25 : Problème sur les parties d'un ensemble et le théorème de Cantor

Soit E un ensemble. On note $\{0, 1\}^E$ l'ensemble des applications de E dans $\{0, 1\}$.

Partie A : parties et indicatrices.

1. Montrez que $\Phi : \mathcal{P}(E) \rightarrow \{0, 1\}^E$, $A \rightarrow 1_A$, est injective.
2. Pour $u \in \{0, 1\}^E$, on pose $A_u = u^{-1}(\{1\})$. Calculez 1_{A_u} . Déduisez-en que Φ est bijective et donnez Φ^{-1} .

Partie B : nombre de parties d'un ensemble fini.

1. Soit E un ensemble fini, a un élément n'appartenant pas à E et $E' = E \cup \{a\}$. Montrez que $A \rightarrow A \cup \{a\}$ est une bijection de $\mathcal{P}(E)$ sur l'ensemble des parties de E' contenant a .

2. Déduisez-en par récurrence qu'un ensemble à n éléments possède exactement 2^n parties.

Partie C : théorème de Cantor.

1. Montrez que $x \rightarrow \{x\}$ est une injection de E dans $\mathcal{P}(E)$.
2. Soit $f : E \rightarrow \mathcal{P}(E)$ une application quelconque. On pose $D = \left\{ x \in E \mid x \notin f(x) \right\}$. Montrez par l'absurde que D n'a pas d'antécédent par f .
3. Concluez : il n'existe aucune surjection de E sur $\mathcal{P}(E)$.
4. Déduisez-en qu'il n'existe aucune surjection de $\mathbb{N}$ sur $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$, l'ensemble des suites à valeurs dans $\{0, 1\}$.

Le corrigé des exercices

Chaque exercice est corrigé en détail, question par question, sur la page suivante.



Pour aller plus loin en maths sup

- Le cours : [logique, ensembles et applications, cours de maths sup](#)
- Chapitre suivant : [Calculs algébriques : sommes, produits, inégalités](#)
- Tester vos connaissances : [QCM de maths sup par chapitre](#)

- Le sommaire : [tous les chapitres de maths sup](#) et les [chapitres de maths spé](#)